I PRIMI SEI LIBRI
DE GL'ELEMENTI
d'Euclide ridotti alla Prattica

DA PIETRO ANTONIO CATALDI LETTORE DELLE SCIENZE
Mathematiche nello Studio di Bologna.

DOVE SI MOSTRANO LE INVENTIONI DELLE REGOLE GEOMETRICHE, & Algebratiche necessarie, & di continuo uso.

ALL'ILL.MO ET NOBILISS. SIG.
IL SIG. GREGORIO MALVEZZI.

IN BOLOGNA, Per Sebastiano Bonomi. M. DC. XX.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.

D. Homob. de Benis Cler. Reg. S. Pauli pro Illustriss. Card. Archiepisc. Bonon.

Imprimatur

F. Hieronym. Onuphr. Consult. S. Officij pro Reuerendiss. Inquisit,

ALL'ILLVSTRISS. ET NOBILISS. SIG.
Padrone Colendissimo
IL SIG. GREGORIO MALVEZZI.

IDE, & conobbe V.S.Illustriss.con occhio molto acuto, & quasi diuino come gli Elementi de Euclide oltre la dilettevole speculatione poteuano hauere etiandio cōgiunta seco vtilità grandissima, & che si trouauano poche Arti di quelle che ingegnose chiama Aristotele, che da queste non pigliassero le suoi principij. Onde le piacque comandarmi, che tentassi di ridurre le Propositioni di quel nobile Geometra alla più facile prattica, ch'io potessi. Presi volontieri l'assunto per l'infinito desiderio, che tengo di seruire ad vn tanto Caualliero, nel quale oltra la nobiltà del sangue, il giudicio, & la beneficenza naturale ornamēto dell'animo suo, si trouano ancora queste scienze di Mathematica in non picciola perfettione, & di ciò ne sia chiaro segno l'hauer potuto prima essa da se scoprire, & poi destare in me risolutione di spiegare così rara dottrina, & di consequēza grandissima alla vita humana, il che facilmente io tutto occupato intorno à cose particolari di queste nobili Scienze haurei lasciato dà parte, quando ella comandato non me l'hauesse; Questa fatica, che Ella mi hà imposto è la perfetta cognitione de gli Elementi d'Euclide, vtile à chi bene la intende, & l'adopra bene all'Astronomia, all'Agricoltura, Medicina, & Nauigatione, in oltre alla Prospettiua, Pittura, & Militare, & in somma à tutte quelle Arti, & cognitioni, che versano intorno alle magnitudini, & numeri, & per dirlo in vna parola, pare che da quelli prendano regola tutte le attioni, & essercitij di questa vita. Essendo dunque la presente Opera da lei promossa, & per lei nata è ben ragione, che à Lei tutta si dedichi, & doni, & particolarmente perche vscendo in luce adorna del suo nobilissimo, & Illustriss. nome, acquisterà splendore, & honore, & à gli Studiosi (che à lei ne doueranno hauere particolare obligo) apportarà piacere, & vtilità. Viua V.S.Illustriss. lungamente felice, & seguendo il suo nobile intento di essercitarsi nelle scienze honorate, & nelle attioni da Caualliero si compiaccia conseruarmi in quel grado della gratia sua, nel qual sopra ogni mio merito si è degnata di pormi, & con ogni riuerenza me le inchino, & le bacio le mani.

Di V.S.Illustriss. & Nobiliss.

Humilissimo Seruitore

Pietroantonio Cataldi.

Aritmetica universale doue si mostrano le Operationi delli numeri rationali (o vogliamo dire esplicabili) & le Regole, & inuentioni loro. in foglio.

Trattato del modo breuissimo di trouare la radice quadra delli numeri, & Regole facilissime di approssimarsi di continuo al vero nelle Radici delli numeri non quadrati, con le cause, & inuentioni loro. Et il modo di pigliare la radice Cuba, applicando il tutto alle Operationi militari, & altre, in foglio.

Trattato della Quadratura del Cerchio, doue si esamina vn nuouo modo di quadrarlo per numeri, & come dato vn Rettilineo si formi vn Curuilineo eguale ad esso dato, & alcune Trasformationi di curuilinei misti fra loro, in foglio.

Algebra proportionale doue si mostrano le inuentioni delli primi Capitoli, o Equationi d'esse, in foglio.

Nuoua Algebra proportionale doue si mostra la inuentione della Radice cuba di molti binomij, quali gl'illustri Scrittori teneuano non potere essere cubi, & anco delli Trinomij con molte considerationi intorno a simili quantità in foglio.

Regola della Quantità o Cosa di cosa, in foglio.

Algebra Discorsiua numerale, & lineale doue discorrendo con il giudicio naturale, si inuentano le regole alle Equationi Algebratiche, con il modo da esequire le operationi loro in numeri, & in linee, in foglio.

Diffesa d'Archimede dalle Oppositioni del Signor Gioseffe Scaligero intorno alla Quadratura del Cerchio, con l'esamine del Diuinum inuentum, scritto da Nicolò Raymarro, in foglio.

Trattato Geometrico, doue si esamina il modo di formare il Pentagono sopra ad vna linea retta, descritto da Alberto Durero, concludendosi, che egli non è Equiangolo, & si mostra come si formino molte figure equilatere, & equiangole sopra ad vna proposta linea retta, in foglio.

Elementi delle quantità irrationali, o inesplicabili, doue si mostrano tutte le Operationi loro, in foglio.

Trattato delli Elementi delle quantità Algebratiche doue si mostrano tutte le Operationi loro. in foglio.

Transformatione Geometrica, doue si mostra come dato vn rettilineo egli stesso si riduca alla forma di qual si vogli rettilineo proposto, in foglio reale.

Transformatio Geometrica.

Opusculum de lineis rectis æquidistantibus, & non æquidistantibus, in quarto.

Operetta delle linee rette equidistanti, & non equidistanti, doue si dimostra il quinto postulato del primo libro d'Euclide, & Aggionta ad essa Operetta doue anco si dimostra ostensiuamente la settima propositione del primo libro d'Euclide, chiamata fuga miserorum, & facilissimamente, in quarto.

Trattato delli numeri perfetti, in quarto.

Prima lettione nel principio del leggere Euclide nello Studio di Perugia alli 12. di Maggio 1572. Et due lettioni fatteui nella Academia del Disegno, in quarto.

Operetta di Ordinanze quadre di Terreno, & di gente, & altre con alcuni quesiti intorno alle Ordinanze diuerse, in quarto.

Due lettioni fatte nella Academia erigenda del trouare la grandezza delle figure rettilinee, & Aggionta del trouare la grandezza, & superficie delle Sfere, & parti loro. Et delle cinque zone terrestri, & parti loro, in quarto.

Molte altre Opere composte, & che si vanno componendo si Stampariano quando vi fusse la commodità.

ALLI LETTORI.

IA molti anni ſono m'ero poſto in animo di formare vn'Opera di Matematica, che conteneſſe i principij Teoricali dell'Aritmetica, & Geometria, & delle Proportioni in vniuerſale à ſimilitudine d'Euclide, ma principiando al Trattato delle Proportioni, ſeguendo poi all'Aritmetica, & alla Geometria leuandone il quinto Poſtulato, ò Petitione nella Geometria, & riducendolo à Propoſitione, & dimoſtrandolo come hò fatto nella mia Operetta delle linie rette equidiſtanti, & non equidiſtanti; abbreuiando ne' luoghi che ſi fuſſe potuto, & riducendo quello che occorreua all'vſo con gl'eſempij opportuni; Ma perche à teſſere vn'Opera tale conuiene quiete d'animo, & comodità baſteuole, vedendomene priuo, & paſſando auanti gl'anni che indeboliſcono le forze, & però hauendo biſogno più di ripoſo che di lunga fatica, veggo di non lo potere eſeguire con quel modo, & ordine che vorei, & ſi recercaria; Onde per ſodisfare pure in quel modo che poſſo à molti nobili intelletti che deſiderano di vedere l'Opera d'Euclide de gl'Elementi Matematici con le dichiarationi facili doue ſi poſſa, & eſemplificata con numeri, riducendole anco all'vſo pratico ne' luoghi opportuni, Et eſſendo anco che più non ſi trouano fra i librari Euclidi Italiani, per accomodarne quelli che lo ricercono nella noſtra natiua lingua, hò preſo fatica di riuederlo, & attendendo al ſenſo delle coſe trattate in eſſo dichiarare, aggiungere con breuità, & eſemplificare doue mi è parſo poterlo fare con giouamento de' Studenti, mantenendo però fermo in tutto l'ordine d'Euclide, & reſtando il quinto Poſtulato pure come è in Euclide, poiche dalla mia Operetta detta ſi potrà ſodisfare chi vorrà vederlo ridutto à Propoſitione, & dimoſtrato; Accettate dunque di nuouo benignamente gentiliſſimi Lettori, queſt'Opera Italiana di tanto celebre, & Ecc. Matematico, mantenendo di continuo viua la ſua mirabile, & vtiliſſima Dottrina, con apprenderla, & eſercitarla giocondamente, indrizzandola anco alla intelligenza, & proficuo vſo della Muſica, Perſpettiua, Aſtronomia, Architettura, & altre Dottrine, & Arti, à gloria ſempre di N. Sig. Dio, Illuſtratore de gl'intelletti, & donatore benigniſſimo di tutti i beni, al quale ſiano date tutte le lodi, da tutte le lingue, per tutti i ſecoli.

Quali,

Quali, & quante siano le Scienze Matematiche, & perche così chiamate.

SCienze Matematiche si dicono essere quelle che considerano, o versano intorno alla quantità considerata in astratto, cioè libera, o disgiunta dalla materia, & perche essa quantità è di due sorti, cioe discreta, & continua, o vogliamo dire moltitudine (o numero) & Grandezza, due anco perciò si dicono essere le simplici, o pure Scienze Matematiche, cioè Aritmetica, o Scienza de' numeri, che specula intorno alla moltitudine in astratto, & Geometria, cioè Scienza delle misure, che specula intorno alla grandezza in astratto; L'altre scienze poi che considerano la quantità non in astratto, ma congiunta con la materia, o con denominatione, come la Musica, che ha per soggetto il numero sonoro, la Perspettiua che considera la linea visuale, &c. la Astronomia che versa intorno alle quantità de i Corpi Celesti, &c. si dicono essere dependenti dal le due pure, o simplici Matematiche Aritmetica, & Geometria; Questa parola Matematica che è Greca, si dice in nostra lingua significare il medesmo che Disciplina, o Dottrina, & si dice essere stato dato questo nome a dette Scienze in particolare, perche elle anco in particolare fra l'altre Scienze ritengono il modo, & la ragione, o forma della scienza. Che posti alcuni principij certissimi, & notissimi, essi mediante elle vanno dimostrando di mano in mano le loro conclusioni, o Propositioni, dependendo vna dall'altra ordinatamente, ilche è proprio officio della Dottrina, o Disciplina, & non mai si seruono d'alcuna cosa la quale prima non sia stata prouata, o dimostrata intieramente con certissime dimostrationi, onde di qui hanno preso il nome di Scienze certissime; & perilche elle appagano intieramente l'intelletto, & se gli rendono giocondissime, & gratissime; Et oltre di ciò vtilissime, poiche non è Scienza, o Arte alcuna nella quale non interuenga il numero, o la misura, & che perciò non gli sia di molto giouamento la intelligenza della Aritmetica, ò Geometria.

In che tempo viuesse Euclide, & perche quest'Opera si chiami Elementi Matematici, & quello che contenga.

PEr quanto scriue Proclo famoso Filosofo, & altri antichi Scrittori si tiene che questo Euclide de Greco (che vn'altro Euclide Megarese Filosofo eminente si tiene essere stato al tempo di Platone) viuesse al tempo di Tolomeo primo, che cominciò a regnare in Egitto doppo la morte di Alessandro Magno; circa ad anni 320. auanti alla Natiuità di Nostro Signor Giesù Christo. Onde hora che siamo del 1616. sarebbono circa ad anni 1936. questo compose molte Opere Matematiche delle quali si veggono la Phenomena, o delle Apparenze; la Speculariа, la Perspettiua, la Data, & il fragmento del Leue, & ponderoso, già circa ad ottanta anni sono tradotte in Latino da Bartolomeo Zamberto Veneto quale anco tradusse in Latino quest'Opera de gli Elementi del medesimo Euclide, Et ha preso nome di Elementi, perche senza questi, Opera alcuna di Matematica non si può intendere, poiche i Scrittori delle Scienze Matematiche, come sono Archimede, Tolomeo, Apollonio, Teodosio, & altri nelle loro dimostrationi si seruono di questi Elementi d'Euclide, come di principij già dimostrati, & noti, essendo essi massime con mirabile ordine & con certissime dimostrationi formati, & stabiliti; Questi Elementi trattando della Teorica della Geometria, & dell'Aritmetica, & delle Proportioni in vniuersale sono diuisi in quindici libri, de i quali i primi quattro trattano di molte proprietà, & qualità delle figure, o superficie piane rettilinee, & in particolare de i Triangoli, & Quadrangoli di lati equidistanti, & poi del Cerchio, & angoli, & linee in essi Cerchij accommodati, Et della inscrittione, & circonscrittione di molte figure nel Cerchio, & intorno al Cerchio; Nel quinto tratta delle proportioni delle grãdezze, & in vniuersale; Nel sesto della similitudine, & della proportione delle superficie fra loro; Nel settimo, ottauo, & nono, tratta delle qualità de i numeri, & proportioni loro; Nel decimo delle quantità rationali, & irrationali, & della commensurabilità, & incommensurabilità loro; Nelli seguenti cinque libri si tratta delli Corpi, che nelli dui primi vndecimo, & duodecimo di molte cose pertinenti alli Corpi in vniuersale, Nel decimoterzo tratta della formatione, & proportione de i lati fra loro, & al diametro della Sfera nella quale si inscriuino, delli cinque Corpi chiamati regolari, che sono la Piramide, o Corpo di quattro basi triangolari, l'Ottaedro, o Corpo di otto basi triangolari, che sono due Piramidi quadrate congiunte insieme mediante la loro commune base interna quadrata; il Cubo, o Corpo di sei basi quadrate, l'Icosaedro, o Corpo di vinti basi triangolari; Et il Dodecaedro, o Corpo di dodici basi pentagonali; quali corpi dalli Platonici si attribuiscono al Cielo, & alli quattro Elementi così, Il Dodecaedro al Cielo, la Piramide

al Fuoco,l'Ottaedro all'Aria,l'Icosaedro all'Aequa, & il Cubo alla Terra ; Nel decimoquarto libro,& nel decimoquinto si tratta delle comparationi fra loro,& inscrittioni l'vno nell'altro di essi cinque Corpi.

Delle parti principali di questa Dottrina Matematica.

QVesta Dottrina ha tre parti che sono le Diffinitioni, Primi principij, o Suppositioni, & Propositioni. Le Diffinitioni sono quelle nelle quali si esplicano i vocaboli dell'Arte, o i nomi dati alle cose di che si ha da trattare; Primi principij,o Suppositioni,sono quelle cose notissime al senso,ma indemonstrabili, quali per ciò, & per la loro chiarezza nella Dottrina che si tratta sono concessi,& tenuti da tutti per certissimi,sopra i quali,come sopra a stabilissimi fondamenti si viene fabricando la Scienza. quale dependendo da essi certissimi fondamenti, o principij, perciò si dice anc'ella essere certissima,& le sue Conclusioni verissime,Questi Principij sono nelle Matematiche di due sorti,l'vna che particolarmente appartengono alla Scienza di che si tratta,& si chiamano Petitioni,o Domande, perche si domanda dal Matematico che li siano concesse, per potersene seruire come di cose già noto esser vere;poiche con chi non le concedesse non occorreria trattare,dicendosi communemente, Contra negantes Principia non est disputandum; essendo essi indemonstrabili,se bene,come si è detto,conosciuti per certissimi dal senso; Et ogni Dottrina deue posare,o hauere alcuni principij,alli quali peruenutosi come a base,o fondamento non si vada più auanti,acciò non si segua in infinito. L'altra sorte che è vniuersale ad essa Scienza,& ad altre ancora si chiamano Communi Sententie,o Communi notitie,o Communi Concessioni,La terza parte della Scienza,o Propositioni,contiene le Dimostrationi delle cose che si propongono in essa,& alcune si chiamano Problemi; & altri Theoremi, che Problemi sono quelle Propositioni nelle quali si propone di fare qualche cosa, come se dicessimo, Si propone di formare vn Quadrato sopra ad vna retta linea data,che qui bisogna mostrare come si operi a formare la figura proposta,& doppo conuien dimostrare che essa figura sia Quadrato come si è voluto fare, & così questa sorte di Propositione si potrà chiamare Operatione, o Propositione Operatiua. Auuertendo nondimeno che questa è Operatione intellettuale non soggetta alla imperfettione di Stromento alcuno materiale,come sono il Compasso,o Sesto,la Riga,Squadra,o altro,nè alla indiligenza manuale;poiche in atto non si può fare Operatione tanto diligente che non si possa anco in qualche parte migliorare, non si peruenendo mai alla esatta perfettione dell'Opera intellettuale astratta, che le Operationi manuali che deriuano,o si cauano dalle intellettuali insegnate dalli Problemi per seruirsene alle occasioni, si può dire essere esempij, o ritratti delle intellettuali astratte nelle quali (delle mani)quanto più diligentemente si operarà tanto più ci accostaremo alle intellettuali per certissime. Teorema poi è quella sorte di Propositione nella quale si propone solo di dimostrare la proprietà d'alcuna cosa,o ella essere tale come si propone;che per esempio proponendosi di dimostrare, in ogni figura quadrilatera rettilinea la somma delli suoi quattro angoli essere eguale a quattro retti,questo è Teorema,che si può chiamare Speculatione,poiche qui non si insegna d'operare cosa alcuna, ma solo si và speculando, & mostrando che li Quadrangoli rettilinei hanno li suoi quattro angoli necessariamente eguali a quattro retti,nè possono hauerli d'altra grandezza; come anco il proponere a dimostrare,che li tre angoli di ciascun Triangolo sono eguali a dui retti è similmente Teorema,o Speculatione.

TAVOLA D'ALCVNE COSE PARTICOLARI di Prattica,che oltre alle Operationi delli Problemi si mostrano.

Nel primo Libro.

Come

DE GL'ELEMENTI D'EVCLIDE

LIBRO PRIMO.

N questo primo libro l'Autore doppo le Diffinitioni appartenenti ad esso primo libro, & li Primi principij, ò Petitioni, & Comuni concessioni, che sono necessarie alli quattro primi libri doue si tratta della Teorica, della Geometria, viene à insegnare come si formi il Triangolo Equilatero sopra ad vna linea retta data, & come vn Quadrato; E di diuidere vna data retta linea, & vn dato angolo rettilineo in due parti eguali; Come si titi vna perpendicolare ad vna data retta linea; Come si formi vn Triangolo, che habbi i lati eguali à tre linee date; E advna data linea retta se ne accompagni vn'altra che con essa facci vn'angolo eguale ad vn'angolo dato; Mostra molte qualità che trouandosi ne i Triangoli si conclude che essi sono eguali fra loro, Et alcune proprietà de gl'angoli che sono nelli Triangoli Equicrurij, cioè di dui lati eguali,& de gl'angoli intrinsici, & estrinseci,ò vogliamo dire interiori,& esteriori de'Triangoli, & che i tre angoli interiori del Triangolo sono eguali à dui retti; Mostra anco molte proprietà delle linee equidistanti fra loro, E come si tiri da vn punto proposto vna retta equidistante ad vna retta linea data, E che i Triangoli, & anco i Paralello grammi, cioè Quadrilateri di lati equidistanti che sono constituiti,ò formati sopra ad vna istessa, ò eguali basi, & fra medesme linee equidistanti sono eguali fra loro, & che i Quadrangoli tali sono doppij alli Triangoli, Ancora come si formi vn Paralellogrammo eguale ad vn dato Triangolo, & anco eguale ad vn dato rettilineo, E finalmente si dimostra essere proprietà del Triangolo rettangolo che la grandezza del Quadrato formato sopra al lato più lungo, cioè à quello che sottotende, ò è opposto all'angolo retto è eguale alla somma delli dui quadrati che si facessero sopra alli dui lati che contengono l'angolo retto.

DIFFINITIONI.

I. PVnto è quello, ò chiamiamo, ò nome di punto diamo à quello, che non hà parte alcuna, cioè che non hà grandezza alcuna, & è indiuisibile.

Si hà da sapere che ogni grandezza, che si suole chiamare quantità continua à differenza del numero, ò moltitudine che si chiama quantità discreta, e diuisibile in infinito, & consequentemente non se ne può assegnare la minima parte, che per esempio vna quantità grande quanto si vogli si può diuidere in due parti, & ciascuna d'esse parti, in due altre, & ciascuna di queste in due altre, & cosi si può andar seguendo nella diuisione in infinito che non si peruerrà mai à parte tanto piccola che con l'intelletto non si possa anco sotto diuidere in due altre parti, (potendosi d'vna grandezza pigliare l'$\frac{1}{2}$. l'$\frac{1}{4}$. l'$\frac{1}{10}$. l'$\frac{1}{100}$. & cosi sminuendo in infinito) all'opposito della quantità discreta, ò moltitudine che non si può andare scemando se non fino alla vnità, che d'vna quantità d'huomini, il minor numero d'essi che si possa dire è vno, & il meno d'vno saria niente: Questa quantità, ò grandezza hà tre specie, ò vogliamo dire si considera essere di tre sorti, perche alcune quantità si considerano come solo lunghezza, quando per esempio si considera la distanza che è da vn luogo ad vn'altro, ò la lunghezza d'alcuna Stanza, ò Cassa; alcune si considerano come lunghe, & larghe quando per esempio consideriamo il panimento ò piano d'alcuna Stanza, ò Cassa, & alcune si considerano come lunghe, larghe, & alte, ò profonde, ò grosse come quando si considera la quantità corporea d'vna Stanza, ò Cassa, che consiste nella sua lunghezza, larghezza, & altezza, per sapere quanto formento, farina, ò altro vi può capire, che se bene non si può trouare grandezza alcuna doue non siano inserte queste tre dimensioni noi nondimeno con l'intelletto le potiamo andare considerando separatamente, cioè considerare solo la lunghezza in essa quantità, ò considerare la lunghezza, & la larghezza, se bene la lunghezza da se, ne la lunghezza,& larghezza da se; non è reperibile, poiche sono attualmente comprese nel Corpo non potendo susistere per se sole; Et perche ciascuna quantità finita, è terminata, quando in alcuna quantità si considera la lunghezza questa lunghezza di necessità è termi-

terminata, & dal principio, & dal fine, ò vogliamo dire, da vna parte, & dall'altra, & queſti dui termini non ſono parti altrimenti d'eſſa lunghezza, & perciò non ſono diuiſibili in parti, non hauendo lunghezza alcuna, cioè ſono indiuiſibili, & ſolo conſiderabili con l'intelletto, ciaſcuno d'eſſi dui termini ſi chiama punto, qual punto non hauendo grandezza è indiuiſibile, & ſolo ſi può conſiderare con l'intelletto come termine d'alcuna quantità continua, o grandezza.

II. La linea è quella quantità che hà ſolamente grandezza, ò vogliamo dire, linea chiamiamo, ò diciamo eſſere, ò per linea intenderſi quella quantità che hà ſolamente lunghezza, & perciò il proprio della linea è l'eſſere lunga, ò corta.

III. I termini della linea ſono punti.

Quando la linea è terminata, cioè conſiderata finita da vna parte, & dall'altra, ella è terminata da dui punti. La circolare nondimeno, cioè il giro, ò circonferenza del Cerchio, eſſendo chiuſa in ſe ſteſſa non è terminata da alcun punto, & ſe la conſideraſsimo principiare in alcuna ſua parte, ella nella iſteſſa finiria, cioè il principio, & il fine d'eſſa circonferenza, ò giro ſaria vn'iſteſſo, & perciò ſi potria dire che ella principiaſſe, & finiſſe in vn medeſmo punto, eſſendo che il termine del principio ſi diria eſſere vn'imaginato punto, quale ſeruiria anco per termine del fine.

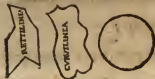
IV. La linea retta è la breuiſsima eſtenſione da vn punto à vn'altro, che riceue per termini nelle due ſue eſtremità eſſi dui punti.

Da vn punto à vn'altro ſi poſſono tirare quante linee ſi vogliono di diuerſe lunghezze, ma quella che è breuiſſima, di quante ſi poſſano imaginare eſſerui tirate ſi chiama retta, ò diritta, & l'altre tutte più lunghe di queſta ſi chiamano curue, ò ſtorte.

linea retta, ò diritta —— linee curue, ò ſtorte

V. La ſuperficie è quella che hà ſolamente lunghezza, & larghezza, ò vogliamo dire ſuperficie ſi chiama quella quantità che hà ſolamente lunghezza, & larghezza, & il ſuo proprio è eſſere grande, ò piccola.

VI. I termini della ſuperficie ſono linee.

La ſuperficie, ò ſpatio che hà determinata lunghezza, & larghezza è chiuſa, ò ſerrata da linee, quali ſono, ò rette, ò curue che perciò le ſuperficie terminate da linee rette ſi chiamano rettilinee, ſiano eſſi termini, ò linee rette quante ſi vogliono, E quelle che le linee quali le terminano non ſono tutte rette, ſe bene fuſſero parte rette, & parte curue ſi chiamano ſuperficie curuilinee

VII. La ſuperficie piana è quella che ſtà per il diritto cioè egualmente frà le ſue linee, cioè non s'alza, ò abbaſſa in parte alcuna.

Noi potremo dire ſuperficie piana eſſere quella che è ſituata, ò conſiderata in piano, che l'altre non piane ſi potranno chiamare globoſe, ò montuoſe, ò conueſſe, ò concaue ſecondo che ſi alzaranno, ò abbaſſaranno riſpetto al piano.

VIII. Angolo piano ſi dice eſſere, ò nominiamo la inclinatione di due linee che in vn piano ſi tocchino.

Due linee, quando ſtanno l'vna per il diritto dell'altra di modo cioè, che allungata l'vna ella vada adoſſo all'altra, ò ſi vniſca con l'altra douetando vna ſola linea elle non fanno angolo, come le B A, & C A, che douentano vna ſola linea, ma quando toccandoſi vna è inclinata all'altra, ſi che allungandoſi l'vna, ella non vada adoſſo all'altra, come auuiene alle D N, G N, che ſi toccano in N, eſſendo inclinata l'vna all'altra, onde allungando poniamo la D N, il ſuo allungamento N S, non vada adoſſo alla N G, all'hora dette due linee D N, G N, formano angolo, & è lo ſpacio che ſi forma in N, nel toccarſi eſſe due linee, & perciò ſi chiama l'angolo N, quale è più largo, ò più ſtretto, ſecondo che le linee che lo formano, ò contengono ſi diſcoſtano, ò accoſtano, ò vogliamo dire ſi allargano, ò ſtringono fra loro, che perciò l'angolo N, primo (che ſi chiama anco D N G, ouero G N D, con nominare le due linee che lo formano cominciando dal termine particolare dell'vna, & paſſando per il termine à loro comune angolare N, & ſeguendo al termine particolare dell'altra) è maggiore, ò più ſpacioſo, ò largo del ſecondo, che le due linee nel primo s'allargano più che nel ſecondo, & perciò il proprio dell'angolo è l'eſſere largo, ò

ſtretto

ſtretto, auuertendo che l'angolo non ſi muoue per allungare, ò aſcortare l'vna, o ambedue le linee che lo conſtituiſcono, ma ſolo con lo ſtringerſi, o allargarſi di eſſe.

I X. Quando le due linee, che formano, o contengono l'angolo ſono rette egli ſi chiama angolo rettilineo.

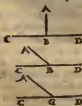
Le due linee che contengono lo ſpacio angolare poſſono eſſere rette, o curue, o l'vna retta, & l'altra curua, onde quando ambedue ſono rette l'angolo ſi chiama rettilineo, cioè contenuto da linee rette, che quando elle non ſono ambedue rette, ſi chiama curuilineo.

X. Quando vna linea retta ſtarà, o caderà ſopra ad vn'altra linea retta di modo che facendo dui angoli con le due parti della retta detta eſſi dui angoli, o ſpacij ſiano eguali fra loro all'hora ciaſcuno d'eſſi ſi chiama angolo retto, E la linea retta che ſtà ſopra all'altra ſi chiama, o ſi dice eſſere perpendicolare ad eſſa, o ſtarui perpendicolarmente.

Vna linea poniamo A B, ſtando ſopra ad vn'altra, & ſia B D, può con eſſa altra contenere vn'angolo, o dui, ue conteuerà ſolo vno quando caderà, o toccara la B D, in vno de'ſuoi termini, cioè in B, o in D, ma ne conterrà dui, quando ella cada sù la C D, in altro luogo, o punto d'eſſa C D, poniamo in B, formando i duoi angoli A B C, & A B D, quali dui angoli quando ſiano eguali l'vno all'altro, cioè che il cadimento della A B, ſopra alla C D, ſia tale che (non pendendo ne verſo C, ne verſo D, cioè venendo sù la C D, per il diritto) ſi formino dui angoli fra loro eguali, all'hora ciaſcuno di loro ſi chiama angolo retto, & la A B, ſi chiama, o ſi dice eſſere perpendicolare alla C D, ſopra alla quale ella ſtà.

X I. Angolo ottuſo è, o nominiamo quello che è maggiore del retto.

X I I. Angolo acuto è, o chiamiamo quello, che è minore del retto.

Delli angoli piani rettilinei delli quali ſi tratta in queſte Diffinitioni, ſi trouano di tre ſorti, che ſono uominati, o ſi chiamano retto, ottuſo (o amplo) & acuto (o anguſto, o ſtretto) & occorrono, o ſi manifeſtano così; Cadendo vna linea retta ſopra ad vn'altra retta facendoſi dui angoli, eſſi ſaranno eguali inſieme, quando la cadente cada per il diritto sù l'altra, cioè non penda ne da vna banda, ne dall'altra, & al'hora la cadente ſi dice eſſere perpendicolare all'altra, & queſta perpendicolarità non può eſſere ſe non vna iſteſſa, cioè non ſi può dire che vna linea retta ſia più, ò manco perpendicolare d'vn'altra, poiche la perpendicolarità non hà ſe non vna ſola poſitura, che ſe per eſempio dal punto A, alla C D, ſia perpendicolare la A B, formando li dui angoli eguali A B C, A B D, ogn'altra linea che dall'A, deue eſſere perpendicolare alla C D, cioè fare angoli retti con eſſa C D, conuerrà che arriui alla C D, nell'iſteſſo punto B, & deuenti vna iſteſſa cō la già tirata perpendicolare A B, ma ſe dall'A, alla C D, ſi tira altra linea retta che non arriui alla C D, nel punto B, detto, ma poniamo in G, & ſia la AG, queſta penderà sù la C D, da vna banda, & ſe li allargarà dall'altra, & perciò non li cadendo ſopra perpendicolarmente formarà con eſſa dui angoli ineguali, che l'vno d'eſſi ſara maggiore d'vn'angolo retto, & l'altro minore; che imaginata la G, perpendicolare alla C D, in G, ciaſcuno del'i dui angoli egnali fra loro n G C, n G D, è retto, & dell'vno n G D, è maggiore l'A G D, quale per ciò ſi chiama l'ottuſo, & dell'altro retto n G C; è minore l'angolo A G C, quale per ciò ſi chiama acuto; E per che vna retta può pendere più, o manco, cioè diuerſamente ſopra ad vn'altra, & conſequentemente formare con eſſa angoli diuerſamente ineguali, & quanto più ſara la pendenza tanto più piccolo, o ſtretto deuentarà l'acuto, reſtando tanto più grāde, o amplo, o ſpatioſo l'ottuſo; dal che ſi vede li angoli acuti eſſere diuerſamente acuti, cioè vno più piccolo, o più grande, o vogliamo dire più acuto, o manco acuto dell'altro, & coſi li ottuſi eſſere diuerſamente ottuſi, cioè ſimilmente vno più grā de, o più piccolo, o vogliamo dire più ottuſo, o manco ottuſo dell'altro, ma li retti ſono tutti retti ad vn modo, perche ſono formati da vna linea retta che cade ſopra ad vn'altra retta, ſempre ad vn modo, cioè ſempre perpendicolarmente, & perciò non ſi può dire vn'angolo retto, eſſere più, o manco retto, cioè maggiore, o minore d'vn'altro retto, coſi come vna retta non può cadere più, o manco perpendicolarmente ſopra ad vn'altra.

X I I I. Termine ſi chiama quello, che è fine d'alcuna coſa.

La linea (poniamo retta) ſi dice eſſere terminata da dui punti, che da vna banda finiſce in vn punto, & dall'altra banda finiſce in vn'altro punto, ma le ſuperficie per le quali in particolare ſi

vsa questo vocabulo termine sono terminate, o chiuse da linee, & finiscono nelli loro termini, cioè nō passano oltre le linee che le chiudono, come per essempio della superficie A B C D, le quat tro linee A B, B C, C D, & D A, che la serrano, o contengono si dicono essere termini d'essa, perche in esse linee ella finisce, non passando di sopra oltre alla linea A B, & di sotto oltre alla C D, &c. Ancora nelli Corpi, che sono chiusi, o serrati da superficie, quelle superficie, che gli chiudono, o contengono si chiamano termini d'essi Corpi.

X I V. Figura si chiama quella che è contenuta, o chiusa da vno, o più termini.

Questo nome figura è quella, che con altro vocabulo si suole anco chiamare forma, & conuiene alle superficie, & alli Corpi dicendosi la tale superficie è di forma quadrata, o triangolare, o circolare, &c. che adoprando il vocabulo figura diremo la tale superficie è di figura quadrata, o triangolare, o circolare, &c. & l'istesso si dice delli Corpi, cioè il tal Corpo è di figura, o forma Sferica, che è terminato da vna sola superficie curua, o di figura, o forma Columnare rotonda, che è terminato da tre superficie, o Piramidale triangola che è terminato da quattro superficie triangolari, &c.

X V. Il Cerchio, o Circolo è vna figura piana cōtenuta da vna sola linea curua, che si chiama circonferenza, alla quale circonferenza da vn punto posto in essa figura tirate quante linee si vogliono elle sono eguali fra loro. E questo punto si chiama centro del Cerchio.

Le figure, o superficie di che si hà da trattare s'intendono essere piane tutte, cioè considerate in piano, & perche possono essere terminate da linee rette, ò da linee curue, & perciò si chiamarsi rettilinee, o curuilinee, hora diffenisce vna superficie curuilinea, che si chiama cerchio, & è cōtenuta, terminata, o serrata da vna sola linea, che di necessità è curua, & si chiama circonferenza, dentro, cioè in mezo della qual figura, ò cerchio è vn punto, ò si imagina essere segnato vn punto dal quale tirando, o imaginato tirarsi quante linee rette si vogliono, che arriuino fino alle circonferenza elle sono tutte eguali fra loro, cioè hanno vn'istessa lunghezza, & questa è la particolare qualità del Cerchio, perche in qual si vogli altra figura curuilinea terminata, o serrata da vna sola linea curua, come saria la Ouata, o altra, nō si può trouare alcun punto egualmente lontano alla sua circonferenza, o giro, che perciò solo nel Cerchio propriamente si può con il nome di circonferenza nominare la linea curua, che lo termina, che nell'altre figure si potrà chiamare giro. Onde nel Cerchio si considerano il Cerchio, che è la superficie istessa, la circonferenza, che è la linea curua che lo serra, o termina, & il centro, che è il punto imaginato nel mezo d'esso Cerchio, dal quale tutte le linee rette che si tirassero sino alla sua circonferenza fariano eguali fra loro.

X V I. Diametro del Cerchio è, o si chiama qual si voglia linea retta, che passando per il cētro arriui alla circonferenza da ciascuna parte, qual diametro sega il Cerchio in due parti eguali.

Nella circonferenza del Cerchio preso vn punto doue si vogli, & da esso tirato al centro vna linea retta, & allungata fino che arriui alla circonferenza dall'altra banda, questa linea totale si chiama diametro come è la n r, ò la d m, ò la s t, & altre tali che nel cerchio si tirassero, & diuide il Cerchio in due parti eguali, che tanto è la parte del Cerchio, che resta sopra al diametro s c, verso g, quanto è la parte, che resta di sotto verso p, (come si può conoscere imaginandosi che la parte di sopra si pieghi, & riuolti sul diametro all'ingiù, che ella coprirà precise la parte inferiore, & la parte superiore f g c, della circonferenza si vnirà precise cōn la parte inferiore s p c, che il medesmo diametro s c, diuide non solo il Cerchio, ma anco la circonferenza in due parti eguali.

X V I I. Il semicircolo, o mezo cerchio è vna figura contenuta, o terminata dal diametro del Cerchio, & dalla mità della circonferenza segata da esso diametro.

Nel Cerchio si possono tirare, o imaginare quanti diametri si vogliono, & ciascuno d'essi diuiderà il Cerchio, & anco la circonferenza in due parti eguali, ciascenna mò di queste due parti del Cerchio, o sia la superiore A, o la inferiore B, contenuta ciascuna d'esse dal diametro c n, & dalla mità della circonferenza del Cerchio si chiama semicerchio, o mezo cerchio. E perche tutte le linee, che vanno dal centro del cerchio fino alla sua circonferenza sono eguali fra loro, & ogni diametro contiene

due di queste linee essi diametri tutti sono eguali fra loro, & ciascuna di quelle due linee eguali, condotte dal centro alla circonferenza, che contengono il diametro, per ciò si chiama semidiametro, o mezo diametro.

XVIII. Portione di cerchio si chiama la figura, che è contenuta da vna linea retta che non passi per il centro, & da vna parte, ò dall'altra della circonferenza da essa segata, che è, o maggiore, o minore della mità della circonferenza.

Nel cerchio il diametro passa per il centro, & lo diuide in due parti eguali, che propriamente, e particolarmente si chiamano semicircoli, o mezi cerchij, ma ogn'altra linea retta, che non passi per il centro è più corta del diametro, & tanto più corta quanto più s'allontana dal centro, & diuide il cerchio, & anco la sua circonferenza in due parti ineguali ciascuna delle quali particolarmente si chiama Portione di Cerchio, & quella doue rimane il centro che hà per termine la maggior parte della circonferenza si chiama portione maggiore; L'altra poi si chiama Portione minore; cioè Portione maggiore di Cerchio è quella che è cõtenuta da parte maggiore della mità della circonferenza, & dalla linea retta, che segando il Cerchio gli sottotende, & Portione minore è quella che è contenuta da parte minore della meza circonferenza, & dalla linea retta che segando il Cerchio gli sottotende, come si vede nel Cerchio segato dalla retta a r, che la parte maggiore M, d'esso si chiama Portione maggiore, & la parte minore N, si chiama Portione minore.

Di quelle due linee curue, & retta che terminano la Portione, o sia ella Portione maggiore, o minore, la retta si suole chiamare Corda, & la curua, o parte di circonferenza si chiama arco.

XIX. Le figure che sono contenute, o terminate da linee rette si chiamano rettilinee.

XX. Quelle che sono cõtenute da tre linee rette si chiamano Trilatere

XXI. Le contenute da quattro lati si chiamano quadrilatere, o vogliamo dire figure Trilatere si chiamano le figure contenute da tre linee rette. Et Quadrilatere quelle che sono contenute da quattro linee rette.

XXII. Ma le figure contenute da più di quattro linee rette si chiamano moltilatere.

Con vna linea retta, ne con due rette non si può chiudere spacio, o superficie alcuna, ma per chiudere spacio rettilineo bisognano almeno tre linee rette, & ciascuna delle linee rette, che terminano, circõdano, o serrano vna superficie si suole chiamare lato d'essa superficie, & perciò quelle che sono serrate da tre linee rette si chiamano trilatere, & se da quattro rette quadrilatere, & così se da cinque rette si potranno chiamare cinquelatere, o di cinquelati, se da sei rette, di sei lati, & così seguendo, che si può adoprare qual numero si vogli di linee per formare vna superficie, cioè vna superficie può essere terminata da 7. o da 8. o da 10. o da 20. o da 50. o da 1000. ò da quale altro numero di lati si vogli, ma queste l'Autore le chiama moltilatere, essendo elle contenute da numero di molte linee.

XXIII. Delle figure, o superficie Trilatere, quella che hà li tre lati eguali si chiama Triangolo Equilatero.

XXIV. Quella che hà dui lati eguali si chiama Triangolo Isoscele, ouero Equicrure.

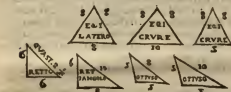
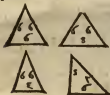
XXV. Et quella che hà li tre lati ineguali si chiama Triangolo Scaleno, o Diuersilatero.

XXVI. Ancora delle figure Trilatere, si chiama Triangolo Ortogonio, o Rettangolo quello che hà vn angolo retto.

XXVII. Et Triangolo Ambligonio, o Ottusangolo, quello che hà vn'angolo Ottuso.

XXVIII. Et Triangolo Oxigonio, o Acutangolo, quello che hà tutti tre li angoli acuti.

Si può notare, che ciascuna figura, ò superficie rettilinea, hà tanti angoli, quanto lati, cioè il numero delli angoli in essa contenuti, e quanto il numero delle linee, o lati che la serrano, & si può denominare, o dal numero de' lati, o dal numero de gl'angoli, se bene comunemente si suole denominare dal numero de gl'angoli, che la superficie di tre linee, ò lati si può chiamare Trilatero, & perche ella hà ancora tre angoli (*ò tre Cantoni*) si può chiamare Triangolo; la superficie di 4. linee, o lati si chiamarà Quadrilatera, o Quadrangolo; Di 5. linee, ò lati Cinquelatera, o Cinquangolo, se bene con vsitata parola greca si suol chiamare Pentagono. Et di sei lati, Seilatero, o Seiangolo, ouero con vocabolo vsitato greco Esagono. Di 7. lati, Settilatero, o Settangolo, o al modo greco Eptagono. Et di 8. lati, Ottagono. Di 9. lati, Nonagono. Di 10. lati, Decagono, poi Vndecagono, Duodecagono, Tredecagono, Quatordecagono, Quindecagono, Sedecagono, cioè di 16. lati, & così seguendo, nominandola dal numero de gl'angoli come è l'vso, non essendo solito nominarle dal numero de i lati, che non si suol dire Trilatero, Quadrilatero, Pentilatero, ò Cinquelatero, Seilatero, &c. onde di 20. lati si chiamarà Vintagono

(*che non si dice Vint'angolo*) di 30. lati Trent'agono. Di 100. lati Cent'agono. Di 1000. lati Mill'agono, &c. E perche nelle figure, o superficie si può hauere cõsideratione, o alla qualità de' lati, o alla qualità de gl'angoli, di qui è, che nella figura di tre linee, o di tre lati, chiamisi ella, ò Trilatero, ò Triangolo, ma diremo Triãgolo, come è il comune vso, cõsiderando i suoi tre lati, perche essi possono essere tutti tre eguali fra loro in lũghezza, il Triãgolo si chiama Equilatero. Ma quando dui soli d'essi lati fussero eguali, & l'altro, o più lũgo, o più corto di qual si vogli de' dui, all'hora il Triangolo si chiama Equicrure, o al modo greco Isoscele. Et quando tutti tre essi lati fussero di diuerse lunghezze, all'hora il Triãgolo si chiama Diuersilatero, o al modo greco Scaleno Considerando mò la qualità de gl'angoli, ciascun Triangolo, perche hà tre lati, hà ancora tre angoli, de i quali dui di loro sono sempre in ogni Triangolo acuti, l'altro angolo poi che rimane nel Triangolo può essere retto, & da questo il Triangolo piglia nome, o si chiama Rettangolo, o al modo greco Ortogonio; Ouero può essere ottuso, & di qui il Triangolo si chiama Ottus'angolo (*ò Ambligonio*) O può essere acuto, & perciò tutti tre li angoli del Triangolo essere acuti, & all'hora il Triangolo si chiama Acut'angolo (*ouero Oxigonio*) E perche nel Triangolo rettangolo il lato che si oppone, o sottotende, ò vogliamo dire è all'incontro al suo angolo retto è più lungo di ciascuno de gl'altri dui lati, che contengono l'angolo retto, quali dui possono essere poi, ò eguali, ò ineguali fra loro, di qui auuiene che il Triangolo rettangolo non può essere Equilatero, ma è, ò di dui lati eguali, cioè Equicrure, ò di tre lati diuersi, cioè Diuersilatero. Il medesmo auuiene al Triangolo Ottus'angolo il lato opposto all'angolo ottuso del quale è più lungo di ciascuno delli dui lati, che contengono esso angolo ottuso, o siano poi essi dui lati eguali, o ineguali fra loro, che detto Triangolo Ottus'angolo non può essere Equilatero, ma solo Equicrure, o Diuersilatero. Il Triangolo Acutangolo mò può hauere i suoi tre lati eguali fra loro, ò dui d'essi solo, o tutti tre diuersi, & perciò può essere Equilatero, o Equicrure, o Diuersilatero. Onde cõuersamente il Triangolo Equilatero non può essere se non Acutangolo. Ma l'Equicrure, & anco il Diuersilatero può essere Rettangolo. Ottus'angolo, & Acutangolo.

Si può anco notare che delle tre linee che terminano il Triangolo vna d'esse quale ci piaccia, o ci venga comodo si suol chiamare base, quasi che si cõsideri, o si suppõga il Triãgolo posare sopra ad essa linea, & ciascuna dell'altre 2. linee d'esso Triãgolo si chiamano, o si dicono essere i suoi dui lati, onde del Triãgolo ABC, supponẽdo p base BC, i dui lati sarãno, o si dirãno essere AB, & AC, ma pigliãdo AB, & p base, i lati sarãno AC, & BC, pigliãdo per base AC, i lati si dirãno essere AB, & CB.

Triangoli, Acut'angoli.

A

B C

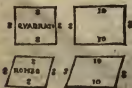
XXIX. Delle figure Quadrilatere, Quadrato si chiama quello, che hà li quattro lati eguali, & li quattro angoli retti.

XXX. Quadrangolo più lungo da vna parte quello, che hà li quattro angoli retti, ma non è Equilatera.

XXXI. Rombo quello, che è Equilatero, ma non hà alcun'angolo retto.

XXXII. Et Romboi de' quello, che hauendo i lati, & gl'angoli oppositi eguali non è Equilatera, nè rettangola.

XXXIII. Oltre di queste le altre figure quadrilatere si chiamano Trapezie.

Si può auertire, che alcune figure ritengono in se qualche regola, o conditione particolare, & alcun'altre non hanno regola, o conditione alcuna, & perciò si chiamano irregolari. Delle figure di quattro lati, o quadrilatere, l'Autore ne diffinisce di quattro sorti, ciascuna delle quali hà la sua particolare conditione, o qualità, che sono il Quadrato, la qualità del quale è essere equilatero, & anco equiangolo, cioè oltre alli quattro lati eguali hauere anco i quattro angoli retti à differenza poi del Rombo, che se bene è Equilatero come il Quadrato non è poi equiangolo, ne hà alcuno angolo retto, ma dui acuti, & dui ottusi, & perciò si può dire deriuare dal Quadrato stirato, o allungato da dui Capi, o punte opposite, che l'altre due poi

si

si vengano ad auicinare insieme. Il Quadrangolo più lungo da vna parte, che dall'altra, o vogliamo dire più lungo che largo, che comunemente si chiama Quadrangolo rettangolo è figura Equiangola, cioè che hà quattro angoli retti, ma non è equilatera, perche essendo più lunga, che larga, hà solamente i lati contrapositi eguali fra loro, cioè la lunghezza superiore alla lunghezza inferiore, & la larghezza sinistra alla destra, differente dal Romboide nella qualità de gl'angoli, che nel Quadrangolo rettangolo essi tutti sono retti, cioè eguali, ma nel Romboide, non ve n'è alcuno retto, onde il Romboide, ò Quadrangolo non rettangolo, ma bene hà li angoli oppositi eguali fra loro che sono dui acuti, & dui ottusi. L'altre figure Quadrilatere poi, che non hanno alcuna di queste qualità nel modo detto, l'Autore le chiama Trapezie, che noi potremo dire irregolari.

XXXIV. Delle linee rette, Paralelle, ouero Equidistanti chiamiamo quelle, che essendo in vn medesimo piano, & allungandosi quanto si vogli da qual si vogli parte ancorche in infinito non potranno mai concorrere insieme.

Le linee rette poste in vn medesimo piano, o sono inclinate l'vna verso l'altra, come la A B, che inclina verso la C D, & perciò allungandole dalla parte di B, & D, doue elle inclinano concorreranno insieme facendo angolo, & dall'altra parte di A, & C, quanto più elle si andaranno allungando, tanto più si allontanaranno l'vna dall'altra. Ma le due rette P A, R S, essendo tali che allungandole, & dall'vna parte, & dall'altra benche in infinito, non concorrano mai insieme, elle si chiamano Equidistanti, & queste ritengono sempre in tutti i luoghi, o parti loro vna medesima distanza fra loro. Et la distanza da vna linea ad vn'altra poniamo dalla P A, alla R S, s'intende essere quella retta che partendosi da vn punto proposto della P A, & sia dal c, arriui perpendicolarmente, cioè ad angoli retti alla R S, & sia la c t, che essendo esse P A, R S, equidistanti tutte le rette, che partendosi da qual si vogli punto segnato, o imaginato nella P A, & arriuino ad angoli retti alla R S, tutte saranno eguali alla c t, & fra loro, O vogliamo dire conuersamente tutte le rette che partendosi da qual si vogli punto inteso nella R S, arriuino perpendicolarmente, cioè ad angoli retti alla P A, saranno eguali alla c t, & fra loro.

PETITIONI, ouero DOMANDE da essere concesse.

I. Si domanda essere concesso, che da vn punto qual si vogli ad vn'altro si possa tirare vna linea retta.

II. Che vna linea retta proposta si possa allungare da qual si vogli delle sue due bande, o termini quanto si vogli.

III. Che da qual si vogli centro, & con qual si vogli interuallo, ò semidiametro si possa formare il Cerchio.

Queste domande sono talmente da concedere, & è talmente euidente al senso queste operationi poter si essequire, che non è da pensare che vi sia per occorrere alcun dubio però sequendo, si domanda ancora.

IV. Che ci sia concesso tutti gl'angoli retti essere fra loro eguali.

Questo è molto noto à ciascuno, che conosca che cosa è angolo retto poiche occorrendo egli, ò formandosi quando vna linea retta è perpenuicolare ad vn'altra, ne potendo questa perpendicolarità auuenire se non ad vn modo, cioè quando la linea, che è perpendicolare all'altra non pende sopra ad essa ne da vna parte, ne dall'altra, & perciò non si può dire vna retta essere più, o meno perpendicolare d'vn'altra, è chiarissimo che tutti gl'angoli retti sono eguali fra loro, & quest'angolo retto si suole chiamare à squadra, & tutte le squadre, o siano con i suoi dui bracci, o vogliamo dire parti, che le formano lunghi, o corti, o siano come le adoprano li Muratori, o altri Artefici, come si vogli, fanno perciò vn medesimo effetto, che è di fare conoscere se vn proposto angolo è retto, o nò; Che ancora quãdo si segano due rette come si dice in croce perfetta, che è perpendicolarmente, ciascuno conosce li quattro angoli, che si formano che sono tutti retti, essere eguali fra loro; Questa Petitione nondimeno per che si crede essere dimostrabile, & però essere Propositione (*& si vede dimostrata nella mia Operetta delle rette Equidistanti, & non equidistanti*) si potrà leuare dal numero delle Petitioni, perche elle deuono essere indimonstrabili, oltre l'essere notissime, o conosciute sensatamente perueritissime, nondimeno per non variare l'ordine dell'Autore la adopraremo come Petitione concessa anch'ella al modo dell'altre.

V. Si domanda che quando vna linea retta cadendo sopra à due rette segandole occorra che la

somma

somma delli dui angoli formati da vna medesma parte sia minore di dui angoli retti, ei sia concesso che le due rette dette allungate in infinito da quella istessa parte di necessità concorreranno insieme.

Sia che la retta d c, nel cadere segando sopra alle due rette m n, g d, che si formano otto angoli dui di sopra d a m, d a n, all'infuori, che chiamaremo esteriori (*ò estrinsici*) & dui di sotto g r c, d r c, all'infuori, che similmente si chiamano esteriori, & li quattro m a r; n a r, d r a; g r a, che chiamaremo interiori (*ò intrinsici*) per essere dentro fra le linee, delle quali, li dui m a r, g r a, sono da vna medesma parte, o banda sinistra, & li altri dui n a r, d r a, (*che breuemente con il nominare le sole lettere angolari, chiamaremo a & r,*) sono da vna medesma parte destra; hora occorra, che questi dui da vna medesima parte a & r, intesi gionti insieme, cioè la somma loro, sia, o si dimostrasse essere minore di dui retti (*ò vogliamo dire della somma di dui retti, ò del doppio d'vn'angolo retto*) si domanda esserne concesso, che le due linee rette segate m n, g d, allungate in infinito da detta parte destra sia necessario che concorrano insieme. Questa domanda non pare che sia così chiara, o nota al senso come si ricerca alle Petitioni, che subito da ciascuno si conosce essere da concedersi, per conoscersi anco alle essere verissime, ò intieramente note; poiche se bene, quando l'angolo, a, è retto, & perciò la m n, non pende all'in sù, ne all'in giù rispetto alla d c; essendo poi l'angolo r, acuto, cioè minore d'vn retto (*che così la somma di a & r, è manco di dui retti come si propone*) si vede che la retta r d, pende all'in sù verso la a n, onde per tal pendenza ci accorgiamo, che si possono andare allungando tanto le due linee a n, r d, da essa parte destra che finalmente concorreriano insieme, & passando auanti si segariano (*che mentre ciascuno delli dui angoli a & r, fusse retto, ne la m n, ne la g d, penderiano rispetto alla d c, ne all'in sù, ne all'in giù, & però esse due rette a n, r d, ò vogliamo dire m n, g d:*) se bene si intendessero allungate in infinito non solo non concorreriano, o si segariano mai insieme, ma ne anco mai si accostariano di più insieme, cioe elle restariano sempre equidistanti come anco auuerria, se la somma delli dui angoli A, & R, fusse eguale alla somma di dui retti, benche l'A, fusse ottuso, & l'R, acuto, che all'hora pendendo la A n, all'in sù rispetto alla d c, ancora la R d, penderia precise nel medesmo modo all'in sù rispetto ad essa d c, & così le A n, & R d, non penderiano punto l'vna verso l'altra, ma haueriano fra loro sempre vna istessa equidistanza, onde allungate da qual si voglia parte ne mai concorreriano insieme, ne mai si accostariano, ò discostariano di più da banda alcuna di quello, che hora sono. Ancora quando essendo l'angolo A, acuto, che perciò si vede la A n, pendere all'in giù, & l'angolo R, anch'egli acuto, che perciò si vede la R d, pendere all'in sù (*rispetto s'intende alla d c,*) & perciò la R d, non ritenere vna medesma distanza per tutto con la A n, ma elle andarsi auicinando l'vna all'altra di mano in mano che si venissero allungando; pure si vede, che di necessità doueriano concorrere insieme, & segarsi, se si seguisse ad allungarle. Et quando l'angolo a s, (*che così lo nominaremo per comodità*) fusse ottuso (pendendo perciò la retta a s, n, all'in sù) & l'angolo a r, acuto (pendendo pure perciò la retta a r, d, all'in sù) ma di modo, che la somma di detti dui angoli non arriuasse, o vogliamo dire fusse minore di dui retti, pure anco le due linee a r, d, & a s, n, allungate da detta parte destra in infinito di necessità doueriano concorrere insieme, perche all'hora l'angolo a r, acuto saria più acuto diremmo, che non è ottuso, l'angolo a s, ottuso (*cioè l'acutezza dell'a r, saria maggiore, che la ottusità dell'a s, ò vogliamo dire più saria lo spacio in che l'a r, è minore d'vn'angolo retto, di quello spacio in che l'a s, supera vn'altro angolo retto, che se per essempio l'acuto fusse $\frac{2}{3}$. diretto, mancandogli $\frac{1}{3}$. al retto, l'a s, poi non saria quanto vn retto, & questo $\frac{1}{3}$. di più, cioè non saria $\frac{1}{3}$. ma saria manco d'$\frac{1}{3}$. pontamo che fussi $\frac{1}{6}$. si che fra esso $\frac{1}{6}$. & $\frac{2}{3}$. nō arriuariano à dui inntieri, che sono, ò importano i dui retti*) onde più saria la pendenza all'in sù della linea a r, d, che la pendenza pure all'in sù della a s, n; & perciò la a r, d, non saria equidistante alla a s, n; ma penderia verso essa a s, n. Tutto questo se bene con vn poco di consideratione si conosce essere realmente vero, nondimeno perche egli à prima vista non apparisce tale, alcuni famosi Geometri, come Proclo fra gl'antichi, & il Reuer. Padre Clauio fra li moderni de' nostri tempi hanno tentato di ridurlo à Propositione, & dimostrarlo come si vede nell'Euclide d'esso Reuer. Padre Clauio, copiosissimo, & diligentissimo, quale nondimeno l'hà adoprato come Petitione concessa, & così (*per non mutare l'ordine d'Euclide*) si farà

rà ancora qui, benche nella mia Operetta delle linee rette equidistanti, & non equidistanti egli sia à pieno dimostrato come Propositione; Onde, & per questo, che egli è dimostrabile, & anco per non apparire cosi subito euidente, egli si leuaria dal numero delle Petioni, se hauessimo tempo, & comodo di formare Trattato de gl'Elementi Matematici secondo il nostro pensiero.

VI. Ancora si domanda esserci concesso, che due linee rette non possino chiudere alcuna superficie.

Questo è chiarissimo essendo euidente, che tre linee rette almeno bisognano à chiudere superficie rettilinea. & però il Triangolo, o Figura Trilatera è la prima fra tutte le figure rettilinee, seguendo poi la Quadrilatera, o Quadrangola, & l'altre per ordine.

COMVNI CONCESSIONI O COMVNI NOTITIE.

I. QVelle cose, che sono eguali à vna medesima cosa, sono eguali fra loro, & tutte insieme.

II. Se à cose eguali si giungono cose eguali i composti, o somme sono eguali fra loro.

III. Se da cose eguali si leuano cose eguali, i rimanenti sono eguali fra loro.

IV. Se à cose ineguali si giungono cose eguali, i composti, ò somme sono ineguali fra loro, & maggior somma è quella, che deriua dalla cosa maggiore.

V. Se da cose ineguali si cauano cose eguali, li rimanenti sono ineguali fra loro, & maggior rimanente è quello, che deriua dalla cosa maggiore.

VI. Quelle cose che sono doppie à vna medesima cosa sono eguali fra loro.

Non solo è chiaro, che le cose che sono doppie ad vna istessa cosa sono eguali fra loro, che anco si conosce che quelle cose che contengono vna medesima cosa quante volte si voglino, cioè tre volte, ò quattro volte, o vogliamo dire che gli sono triplici, o quadruple, o la contengono cinque, o sei volte, &c. sono eguali fra loro, ma l'Autore si è contentato della concessione del solo doppio (*cioè che quando si dimostrarà che alcune cose siano doppie ad vna medesima cosa si possa mediante questa Cõcessione, o Comune notitia concludere che esse cose siano eguali fra loro*) perche à lui non occorre seruirsi d'altro, che di questa moltiplicità dupla, Anzi concesso nella dupla si può poi dimostrare l'istesso nella tripla, quadrupla, &c. mediante la seconda Comune concessione, Ma di più anco nella dupla si può fare la dimostratione mediante detta seconda Comune concessione, & però si potria leuare questa Sesta Comune concessione di qui, come cosa probabile, & ridurla à Propositione da dimostrarsi.

VII. Quelle cose che sono la mità d'vna medesima cosa sono eguali fra loro.

Qui ancora, non solo le quantità che sono la mità d'vna istessa sono eguali fra loro, ma anco quelle cose, che sono l'vn terzo, o qual si vogli altra parte medesima d'vna istessa quantità sono eguali fra loro, il che si vede chiarissimo dal conoscere, che quando vna quantità proposta si diuide in due parti eguali ciascuna d'esse due parti si chiama, ò vogliamo dire è la mità della proposta, Et s'ella si diuide in tre parti eguali, ciascuna di quelle tre parti è l'vn terzo, ò la terza parte d'essa. Onde acciò che vna quantità data sia la terza parte d'vna proposta, conuiene che la proposta si possa diuidere in tre parti eguali alla data, & però esse tre parti ciascuna delle quali deue essere l'vn terzo della proposta conuiene, che siano eguali fra loro, & cosi le quarte parti, &c. Ma all'Autore basta potersi seruire della mità, che di già sia stata concessa come notissima à ciascuno in ciascuna occasione, ò Scienza.

VIII. Quelle cose che poste l'vna sopra all'altra conuengono insieme di modo che l'vna non ecceda, ne sia ecceduta dall'altra sono eguali fra loro.

Se posta, ò imaginato ponersi poniamo la retta a b, sopra alla retta A B, si dimostri, ò auenga che vnendosi il punto à con l'A, ancora il b, si vnisca con il B, & così la retta a b, si vnisca con la retta A B, non si eccedendo l'vna l'altra si domanda esserci concesso, che si possa concludere queste due linee essere equali fra loro, il che essendo chiarissimo si piglia, ò adopra come comune cõcessione in ogni Scienza. Et l'esempio, che si è dato nelle due linee a b, A B, si intenda anco ne gl'angoli, & superficie, che quanto all'angolo a, quando posto il punto A, nell'a, di modo, che la retta A B, vada sopra alla a n, auenga che anco la A B, vada sopra alla a g, si che lo spatio hora ottuso alla A, si vnisca precise con lo spatio all'a, (*che saria anch'egli ottuso nel medesmo modo, che è l'A, cioè la n a, piegaria in fuori rispetto alla a g, nel medesmo modo precise, che la R A, piega in fuori rispetto alla A B,*) se bene il punto R, non si vnirà con l'n, ma passarà

di sopra all'n, per essere A R, più lunga di a n, ò restarà nella a n, quando A R, fusse più corta, & che anco il punto D, non si vnisca cō il g, ma passi auanti, o resti indietro sù la a g, secondo che la A D, sia più longa, o più corta della a g, perche non variandosi la quantità dell'angolo, ò spacio per l'allungarsi, o scortarsi delle sue due linee, basta che lo spacio dell'vno si vnisca precise, & perciò douenti vn'istesso con lo spacio dell'altro, all'hora per questa Comune concessione si potrà concludere l'vno angolo A, essere guale all'altro algolo a; Similmente quando la superficie A M N R B, imaginata ponersi sopra alla a m n r b, si dimostri che l'vna si vnirà precise con l'altra senza eccedersi l'vna l'altra, & però douentando si può dire vna istessa, all'hora mediante questa Comune notitia, o Concessione si potrà cōcludere l'vna superficie essere eguale all'altra.

IX. Il tutto è maggiore di qual si vogli sua parte, essendo precise eguale al composto, o somma di tutte le sue parti gionte insieme.

Quando vna quantità si diuide in due parti eguali, o ineguali, che il tutto, cioè la quantità totale sia maggiore di qual si voglia d'esse sue parti è notissimo à ciascuno; Et se anco la quantità si diuidesse in quante parti si voglino, & eguali, o ineguali diuersamente, o parte eguali fra loro, & parte ineguali, è pur chiaro che la quantità totale sarebbe maggiore di qual numero, o composto d'esse parti si pigliasse, mancandoue ne però qualch'vna, o alcune, cioè quando non si pigliassero tutte, che essendo elle poniamo 10. parti se ne pigliassimo solo 9. o manco, la quātità totale saria maggiore del composto d'esse 9. essendo egli eguale alla somma de tutte esse 10. sue parti nelle quali sia diuisa.

Hora sopra queste Concessioni, Petitioni cioè, & Comuni notitie, come sopra à stabili fondamenti si fabrica la Dottrina, & solo di questi si serue per concludere le sue Propositioni, ò Dimostrationi, quali si conosce douere essere verissime, & certissime, come anco certissime, & notissime sono dette Concessioni, Onde ogni honorato intelletto doueria attendere à queste mirabili scienze *(che se gli renderanno anco facili con l'ordinato studio)* mediante le quali si vengono à conoscere, & operare gran numero di cose proficue, & gioconde.

Propositione prima Problema primo.

SI può sopra ad vna terminata linea retta data construere, o formare vn Triangolo Equilatero. Sia data la retta a b. Per fermarui sopra vn Triangolo Equilatero, ponasi vn piede del Compasso in vna delle due estremità della retta data, & sia in a, & si allarghi il compasso si che l'altro piede arriui all'altra estremità b, & con essa apertura, ò interuallo, o vogliamo dire semidiametro della data a b, & con il detto centro a, si segui la circonferenza b r t, del cerchio b r t, *(per la terza Petitione che ci concesse potere formare il Cerchio sopra, ò da qual si vogli centro, & con qual si vogli semidiametro)* Ancora fatto centro l'altra estremità b, della retta data, & semidiametro la istessa data si segni la circonferenza a r t, queste due circonferenze si segano insieme in dui punti r, & t, dall'vno de' quali, & sia l'r, alli dui termini a, & b, della data si tirino le due rette r a, r b; *(per la prima Petitione intesa due volte, che ci concede da vn punto ad vn'altro tirare vna linea retta)* che esse r a, r b, insieme con la a b, formaranno la superficie b a r, contenuta da tre linee rette, che per ciò per la diffinitione 20. e Triangolo, & è Equilatero, perche la retta a r, è eguale alla data a b, per la diffinitione 15. del Cerchio, andādo elle da vn'istesso centro a, alla circonferenza del suo istesso Cerchio r b t: Ancora la retta b r, è eguale alla medesima data a b, andando elle da vn'istesso centro b, alla circonferenza del suo istesso cerchio r a t; perche essendo ciascuna delle due rette a r, b r eguali ad vna istessa a b, data, ne segue *(per la prima Comune notitia, ò Concessione) che ambedue siano anco eguali fra loro, onde la superficie a r b, è contenuta da tre linee rette eguali, & però (per la diffinitione 23.)* è Triangolo Equilatero, & è construtto, o formato sopra la data retta a b, che è quello, che si voleua fare.

Nella Construttione di questo Problema, ouero Propositione operatiua si conosce, che il tutto consiste nel segnare il punto r, & questo si fà mediate la intersegatione delle due circonferen-

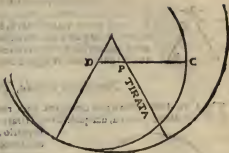
ze

ze dette, però senza formare esse circonferenze intieramente, basta fare vna particella d'esse dalla parte superiore finchè si seghino, & nell'interfettione segnato il punto r, da esso alli a, & b, tirare le due rette r a, r b, che sarà formato il Triangolo Equilatero; Bene è vero, che per prouare, o dimostrare essa Equilaterità, conuerria intendere, ò imaginare le circonferenze intiere delli dui Cerchi, & seguire come s'è detto di sopra.

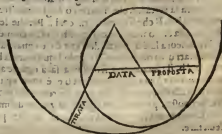
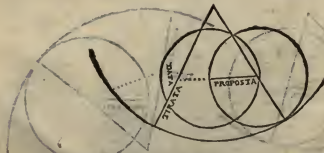
Propositione seconda, Problema secondo.

DA vn dato punto si può tirare vna linea retta, eguale ad vna linea retta proposta. Sia dato il punto a, dal quale si vogli tirare vna linea retta eguale alla proposta b c; Per farlo, Preso per centro vna delle due estremità della proposta linea, & sia la b, & interuallo, ò semidiametro essa proposta b c, si descriua vn Cerchio, & dal suo centro d, al punto dato a, si tiri la retta b a, sopra alla quale si formi il Triangolo Equilatero a b d, (*per la antecedente prima Propositione*) del quale si allunghi il lato opposito al punto dato, che è il d b, dalla banda del centro b, cioè verso il b, fino alla circonferenza del Cerchio, & segnisi e, nel punto doue vi arriua, & sia d e la retta così comporta; Ancora fatto centro il punto d, angolare nella cima del Triangolo, & interuallo, o semidiametro essa retta d e, si formi il cerchio e f, & fino alla sua circonferenza si allunghi verso il punto dato il lato d a, del Triangolo doue è il centro di questo cerchio, & il punto a, dato, & si segni f, doue questo allungamento arriuarà alla circonferenza, che all'hora la retta a f, che si parte, o vogliamo dire, è tirata dal punto a, dato, sarà eguale alla proposta b c; Il che si dimostrarà così; Perche le due rette d f, d e, sono tirate da vn'istesso centro d, alla circonferenza del suo istesso Cerchio, elle sono eguali fra loro, cioè la d f, è eguale alla d e, Ancora la d a, parte dell'vna d f, è eguale alla d b, parte dell'altra d e, perche esse d a, d b, sono lati d'vn medesimo Triangolo Equilatero a b d; onde dalla d f, leuata la d a, & dalla b e, leuata la d b, il rimanente a f, dell'vna sarà eguale al rimanente b e, dell'altra (*per la seconda Commune notitia*) ma alla medesima b e, è anco eguale la proposta retta b c, perche ambedue vanno dall'istesso centro b, alla circonferenza del suo istesso cerchio, perilche le due a f, tirata, & b e, proposta, perche sono eguali ad vna medesima b e, saranno anco eguali fra loro (*per la prima Commune notitia*) cioè la a f, tirata dal dato punto a, è eguale alla proposta b c, come si voleua fare.

Si è congiunto il punto dato con la estremità più lontana dalla linea proposta.

Qui il Triangolo si è fatto dalla banda inferiore.

Qui essendosi fatto il Triangolo dalla parte inferiore auuiene, che allungato il lato del Triangolo opposto al punto dato dalla banda del centro del Cerchio, che hà per semidiametro la linea proposta fino alla circonferenza d'esso cerchio, questo allungamento, che si chiama allungamento p, è la linea istessa proposta parte della linea chiamata media, che è cõposta da essa allungamento primo, & dal lato detto allungato, onde trouata la linea, che si chiama tirata, per che ella si proua essere eguale al rimanente prima detto senza seguire ad altro si vede ch'è perciò è eguale alla proposta, che è l'istessa con il rimanente primo.

Qui il punto dato p, è nella linea proposta b e, & si è immaginato congiungersi con la estremità b, quale conuien poi, che sia centro del cerchio da farsi con la linea proposta per semidiametro, & la linea b p, della congiuntione è la base del Triangolo, che se fingessimo il punto dato congiungersi con la estremità e, la p e, doueria essere base del Triangolo, & il punto e, centro del Cerchio.

Sia il punto dato per il diritto della linea proposta.

Ouero.

In queste due figure si vede il punto dato essere in linea rettta, ò per il diritto della linea proposta, & nella prima si è congiunto al punto dato con la estremità più vicina della proposta, che nella seconda figura si è congiunto con l'estremità più lontana, che nell'vna, & nell'altra la tirata è la istessa, cioè hà la istessa policura rispetto alla retta proposta.

E da notare, che molte Operationi, o Problemi si possono esequire in dui modi, cioè Geometricamente, & naturalmente, & alle volte il modo naturale è più breue del Geometrico, come occorre in questo secondo Problema, doue il naturale, o puro Pratico, che non hà particolare dottrina, ma opera come gli vien mostrato dal naturale instinto, per tirare dal punto a, vna retta eguale alla b c, pigliarebbe con il compasso (ò sesto) la misura, o lunghezza di detta b c, & postone vn piede nel punto a, & l'altro piede doue egli volesse vi trasportarebbe essa lunghezza; Il qual modo breuissimo si può vsare in pratica doue non occorra à farne dimostratione Geometrica, bastando in ciò la diligenza del Compasso, quale nondimeno non si accetta per dimostratione sufficiente, o certissima dal Geometra, oerche il Compasso non è Testimonio sempre veridico, togliendo egli à fare, o pensando di poter fare molte volte quello, che l'intelletto conosce essere impossibile, che egli faccia, che per esempio nel Quadrato a c n e, tirati i dui diametri a n, c e, che si segano per mezo in r, posto il lato a c, 6. numero noto intiero, il Geometra sà che il diametro a n, è vna linea inesplicabile per numero noto, non intiero, ne misto d'intiero, e rotto (che si chiama rad. 72) & similmente la sua mità a r, è inesplicabile per numero, ne intiero, ne misto d'intiero, & rotto (che si chiama rad. 18. & così la terza parte, ò quarta, ò quinta d'esso diametro, ouero il suo doppio, triplo, quadruplo, &c. sono linee, come esso diametro inesplecabili, nondimeno se segnate le due linee a c, & a n, distinte, elle si diano al Pratico, che si serue solo del Compasso materiale per misurarle, egli pigliarà à misurarle, & pensarà di potere nominare ciascuno di loro per numero, che se fatto vna scala, come dicono i Pratici, diuisa in minute, o piccole particelle eguali vedrà la a c, essere 12. di quelle particelle, & con esse misurãdo la a n, dirà ch'ella è 17. misure, ne conoscerà quella insensibile quantità, che fà, che ella nõ arriua precise à 17. essendo ella solo rad. 288. che ne manco arriua à 16 $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$. Onde nõ è da fidarsi del Cõpasso, doue si cerca la precisione delle quantità, poiche egli non conosce la incõmensurabilità delle linee, o quantità, & nõ arriua ad essa precisione come fà l'intelletto, che distingue le quantità incomensurabili, & le qualità loro, il che non può fare il Compasso materiale; Quel Compasso mò, ò Sesto, che adopra l'intelletto nelle sue Operationi intellettuali astratte, è anc' egli vn Compasso imaginario astratto libero dalla materia, & però diligentissimo, & sempre veridico; Onde il Geometra lassando il modo Pratico, che manca di dimostratione intellettuale, conuiene che nella solutione de' Problemi troui modo atto à poterli dimostrare intieramente; quale Operatione intellettuale si può poi anco adoprare in Pratica, applicandosi alla materia diligentemente; & farà molto comodo, quando massime il modo insegnato, o adoprato dal Geometra è più breue, & facile, che non è il puro naturale, come auueria nell'esequire l'antecedente primo Problema, cioè nel fare vn Triangolo Equilatero sopra ad vna data linea retta a b, il che cõsistendo nel trouare il pũto r, dal quale alli a & b, tirando le linee rette r a, r b, occorre la ciascuna d'esse sia eguale alla data a b; il Geometra troua subito esso punto r, notandolo doue intersettione delli dui cerchi imaginati fatti cõ li cẽtri, a & b, & interuallo a b; Ma il puro naturale conoscendo anc'egli, che bisogna trouare vn punto r, egualmente distante dalli a & b; presa con il Compasso la distanza a b, & fermato vn piede d'esso Compasso in vno delli dui termini della data poniamo in a, voltarebbe l'altro all'in sù, & fermatolo doue gli paresse à proposito leuato quello, che era fermo nell'a, vedria se arriuasse precise nel b, & non vi arriuando, o passandolo andarebbe di nuouo esperimentãdo se vn'altro punto cercato di sopra come è detto fusse a proposito, & trouatolo, ò parendogli all'occhio d'hauerlo trouato da esso tirarebbe le rette alli a & b; & direbbe d'hauer formato il Triangolo Equilatero; qual modo non è così breue, & sicuro come il Geometrico, douendosi cercare à Tastoni (come si suol dire) il punto r, oltre che l'occhio ci può anco far parere per punto r, vn'altro punto in sensibilmente diuerso dal veramente reale; Tutto questo si è detto per auertirne in particolare quelli, che hanno da insegnare questa Dottrina, quali deuono procedere con molto giudicio, nõ si fermãdo molto nelle cose difficili, o laboriose accioche lo Studẽte non si annoi, ma passarle breuemente, che poi vn'altra volta quando lo Studente sarà esperto à bastanza si possono con diligenza intieramente apprendere. Et è anco ben fatto, aggiungere alle volte qualche Operatione gioconda fuori delle Ordinarie, accioche lo Studente riceuendone diletto si stabilisca nel desiderio di studiarla, & seguiti con attentione, & diligenza, come per esempio nella Propositione, o Problema prima, potrà mostrargli come anco con vna proposta apertura di Compasso minore, o maggiore della linea retta data sopra ad essa data si formi medesimamente il Triangolo Equilatero, del che per breuità si è posto in figura solo il modo, essendo la retta data

A———B A———B

D la

la a b, & la apertura del Compasso la m n, minore, & la s o, maggiore. Et che in vece di Compasso può anco seruire vno Spago, Corda, Asta, o simili quando occorra. Et se lo Studente fusse esperto nelli numeri (*il che saria cosa ottima, & di qui si doueria cominciare à insegnare le Matematiche, che se ne ritrarria poi di continuo diletto, & profitto mirabile, & vnendo la Pratica come si dice alla Teorica, ò Speculatiua, si acquistaria con facilità, & prestezza compita Dottrina*) se le potrà andare giungendo anco vno, o più modi di trouare la grandezza del Triangolo non solo Equilatero ma d'ogni sorte, & mostrarli in Prattica, che cosa significa il misurare vna superficie, che è il vedere, o trouare quanti Quadretti d'vna data misura per lato importi essa superficie, & questo andarlo facendo di mano in mano nelle Propositioni seguenti, compensando la difficultà, & astrattione loro, cō il piacere che si venisse riceuendo dalle cose di Pratica, che possono essere di molto vso, & profitto. Possono anco notare li intelligenti, che questo secondo Problema può hauere molti Casi, secondo che in molti luoghi si può ponere il punto dato diuersi fra loro rispetto alla linea proposta, cioè, o nella linea proposta, o in vna delle sue due estremità, ouero fuori della linea proposta, che nella operatione già fatta per esso Problema si è posto il punto dato fuori della proposta linea, circa che essendosi detto. Sia il punto dato a, dal quale si vogli tirare vna linea retta eguale alla proposta retta b c, per farlo Preso per centro, &c. questo viene ad essere vn'esempio, che si dà per esequire il Problema in tali Casi doue il punto è fuori della retta proposta. Et perche può anco essere dentro, & perciò parere il Caso molto diuerso conuerria darne vn'esempio (*massime al principiante, che non ha ancora acquistato basteuole giuditio per oprare nella diuersità de' Casi da se stesso*) ma li esempij sono quelli, che si danno per dichiaratione delle Regole, quando elle sono tali, che senza esempio fussero difficili da intendere, onde l'esempio suppone la Regola douendo la Regola antecedere all'esempio, o esempij d'essa, & nelli Problemi, che possono hauere molti Casi, molti esempij anco bisognariano, ma deuono dependere tutti da vna istessa Regola, perche ella deue essere vniuersalissima, & abbracciare tutte le differenze, ò Casi che possono occorrere, & d'essi, quelli, che sono facili, o tutti quando fussero tutti facili da intendere non hanno bisogno d'esempio, dal che conosciamo, che a procedere intieramente bene conuerria nelle Propositioni dare le Regole in astratto, & poi seguire alli esempij doue fusse bisogno. Questo modo in vero saria più lungo dell'vsitato, & forsi da non adoprare nell'insegnare alli Principianti, alli quali quella intiera astrattione sarebbe difficile da apprendare, & per loro è più commodo da gl'esempij, andarsi poi figurando la Regola; l'accorto Precettore mò potrà secondo la qualità de gl intelletti andare adoprando il suo ingegno a introdurli nella scienza con quelli modi, che conoscerà essere più proficui. Se vorremo in questo Problema dare la Regola, & di lì poi venire alli esempij per dichiaratione d'essa, ella potrà essere la seguente.

Da vn punto dato per tirare vna linea retta eguale ad vna retta proposta.

Faccisi centro la prima estremità della proposta (che prima sarà quale delle due ci piaccia) & con l'interuallo, o semidiametro d'essa proposta si facci vn cerchio, cioè si segni la sua circonferenza, & dal centro detto al punto dato si tiri vna retta sopra alla quale si formi vn Triangolo Equilatero, poi si allunghi il lato d'esso Triangolo, che è opposto al punto dato dalla banda del Centro del Cerchio fino alla sua circonferenza, & tutta la linea così composta chiamaremo media, & il suo allungamento chiamaremo allungamento primo; Ancora fatto centro la estremità di questa media, che è angolare del Triangolo, con l'interuallo, o semidiametro d'essa media si descriua vn Cerchio, poi si allunghi la retta doue è il centro di questo Cerchio, & il punto dato dalla banda del dato fino alla circonferenza d'esso Cerchio, & la linea così composta chiamaremo linea vltima, l'allungamento della quale, & lo chiamaremo linea tirata si partirà dal punto dato, & sarà eguale alla retta proposta Dimostratione. La linea vltima è eguale alla media, perche vanno da vn'istesso centro alla circonferenza del suo istesso Cerchio, ancora il lato del Triangolo, che è parte dell'vna vltima è eguale al lato del Triangolo, che è parte dell'altra media, essendo egli Equilatero (per la sua construttione, cioè perche è fatta Equilatero) (che perciò

bastar

bastaria, che egli fusse Equicrure, cioè di dui lati eguali non occorrendo, che la sua base intesa hora per la retta tirata dal punto dato al centro del Cerchio sia eguale alli dui lati) onde il rimanente dell'vna, che è la retta tirata sara eguale al rimanente dell'altra, che si è chiamato allungamento primo, ma a questo allongamento primo, è ancora eguale la retta proposta, perche ambedue vanno dal centro d'vn'istesso cerchio alla sua circonferenza, onde *(per la prima Commune concessione)* la tirata sarà eguale alla proposta come si voleua fare. Auuertendo, che quando il punto dato fusse vna delle due estremità della linea proposta, & chiamiamola prima; all'hora breuemente fatto essa estremità centro si descriua vn Cerchio secondo la lunghezza di detta linea *(cioè con il suo interuallo, ò semidiametro)* & poi si tiri dal punto dato centro d'esso Cerchio fino alla circonferenza verso doue si vogli vna linea retta che ella, *(ò quale altra vi si tirasse)* sarà eguale alla proposta, perche elle andaranno da vn'istesso Cerchio alla circonferenza del suo istesso Cerchio.

Et per fare vn Triangolo di dui lati eguali sopra ad vna assegnata retta, o base. Fatto centro l'vna, & poi l'altra delle sue due estremità, & interuallo, o semidiametro qual si vogli apertura di Compasso, si descriuano dui Cerchi, o parti d'archi d'essi che si interseghino dalla banda doue si vuole formare il Triangolo *(che perciò bisogna auuertire che essa apertura di Cõpasso sia maggiore della mità della base, ò retta assegnata, che altramente le due circonferenze non si potriano intersegare fra loro)* & dal punto di tale intersettione à ciascuno delli dui punti della retta assegnata si tiri vna linea retta, che elle con la assegnata formaranno vn Triangolo, che hauerà i dui lati eguali, per esserli essi lati fatti tali.

La Regola della sopradetta seconda Propositione, o Problema, si potria ancora scriuere cosi.

Congiungasi il punto dato con vna delle due estremità della retta proposta, cioè ad essa estremità (& chiamasi prima) si tiri dal punto dato vna linea retta, sopra alla quale da qual banda si vuole si formi vn Triangolo Equilatero (ò di dui lati eguali) Ancora fatto centro detta estremità prima della retta proposta con la quale si è congiunto il punto dato, & interuallo, o semidiametro detta retta proposta si descriua vn Cerchio, poi si allunghi il lato del Triangolo opposto al punto, dalla banda del centro di questo Cerchio fino alla sua circonferenza, & tutta la linea cosi composta chiamaremo media, &c. seguendo poi come nella Regola superiore.

Hora il Precettore per dichiarare questa Regola à quelli principianti, che n'hauessero bisogno, ouero il principiante da se stesso per farsi pratico in questa Operatione, o Problema potrà, propostasi vna linea retta, fingesi il punto dato in quanti diuersi luoghi gli piaccia, & seruendosi della Regola *(che è vniuersale, & perciò contiene tutti i Casi che possino occorrere)* da essi diuersi punti tirare diuerse linee tutte eguali alla proposta, & cosi ne hauerà la compita in-[illegible]

Propositione terza Problema terzo.

Date due linee rette ineguali si può dalla maggiore, o più lunga segare vna parte eguale alla minore, o più corta.

Date le due rette a b, minore, & c d, maggiore per segare da questa c d, maggiore vna parte eguale alla a b, minore. Dal punto della c d, doue hà da cominciare il segamento; & sia dal c, si tiri vna retta eguale alla minore a b, per la antecedente seconda propositione, & sia la c g, & con l'interuallo di questa c g. fatto centro il pũto c, comune a questa, & alla c d, si facci vn circolo che segarà la c d, per che ella è più lunga del semidiametro, & sia in f. che la c f, segata dalla c d, sara eguale alla linea minore a b; Perche la a b, è eguale alla c g, (dalla Construttione) & alla medesima c g, è eguale la c f, (perche vanno da vn'istesso centro c, alla circonferenza del suo istesso Cerchio) ne segue che queste due cose a b, & c f, che sono eguali ad vna medesima cosa c g, siano eguali fra loro (per la prima Commune concessione) ma di queste due la a b, è la data minore, & la c f, la segata dalla maggiore, però dalla maggiore si è segato vna parte c g, eguale alla minore come si voleuá fare. Auuertendo, che quando le due linee date hauessero vna estremità commune, come auuiene nelle due a b, a d, che hanno la estremità a commune, se da essa estremità a commune si volesse segare dalla maggiore vna parte eguale alla minore *(perche all'hora douendosi da essa estremità à tirare vna retta eguale alla a b, minore, essa minore seruiria per tal linea à lei eguale da tirarsi)* bastaria fatto centro il punto angolare commune, & semidiametro la linea minore formare vn Cerchio, ò vna parte d'arco, o circonferenza che segasse la maggiore, & essa parte segata verso

il centro, o punto comune saria la eguale alla minore, perche ambedue sariano semidiametri d'vn medesimo Cerchio, o vogliamo dire andariano da vn'istesso Cerchio alla circonferenza del suo istesso Cerchio.

Questo terzo Problema si può ancegli molto facilmente esequire naturalmente; perche preso con il Compasso, o Sesto la lunghezza della minore da portare sù la maggiore comineiando da quale delle due sue estremità, o altro punto segnato in essa si volesse, posto vn piede del Compasso in tal punto, o estremità, & l'altro fermato sù la linea maggiore, tutta quella parte d'essa linea intrapresa fra i dui piedi del Compasso saria eguale alla linea minore. Per il che in Pratica ei potremo seruire di questo modo insegnatoci dal giudicio naturale.

Si può notare, che nelle due Propositioni anteccedenti seconda, & terza, il modo naturale si potria anco riceuere dal Geometra come Geometrico, perche se per formare vn Triangolo Equilatero sopra alla linea a b, fermato vn piede del Compasso intellettuale in vno estremo a, & preso l'interuallo a b, (lunghezza della a b,) per apertura di Compasso si gira l'altro piede accioche la circonferenza, che si fa sia sempre lontana dall'a, centro, quanto è la lunghezza d'essa a b; se senza variare la apertura del Compasso, leuaremo il piede che era in a, & lo poneremo in quale altro punto si vogli poniamo in c, & anco l'altro piede posaremo nel piano istesso verso doue ei piaccia, & iui segnaremo questo interuallo, & sia e d, tirando la retta e d, perche questa c d, è eguale alla istessa apertura inuariata del Compasso, che mostraua la lunghezza della retta a b, & però ad essa apertura di Compasso è eguale la a b, come anco è la e d; è chiaro all'intelletto (*per la prima Comune notitia*) che essa c d, è eguale alla a b; ne ha bisogno d'altra dimostratione; & cosi haueremo dal dato punto c, tirata la retta a b, come si propone nel secondo Problema. Et se anco posto vn piede d'esso Compasso de' inuariata apertura nel punto m, fermaremo l'altro sù la linea (o dirittura) m d, & iui segnaremo o, questa m o, sara similmente eguale alla a b, poiche ciascuna d'esse a b, & m o, è eguale all'istesso interuallo, o inuariata apertura dell'intellettuale Compasso, il che è chiarissimo all'intelletto, & se dimostra mediante la prima Comone notitia; & cosi dalla retta m d, ne haueremo segato vna parte m o, eguale alla a b, come si propone nel terzo Problema. Onde in essi dui Problemi si potria dire il modo naturale, & il Matematico essere vn'istesso, adoprando però il naturale il suo Compasso materiale, & il Matematico il suo Compasso intellettuale. Et perche non è alcuno, che naturalmente non sappia subito da vn punto dato tirare vna linea eguale ad vna linea proposta, & anco di due linee ineguali dalla maggiore segare, o in essa segnarne vna parte eguale alla minore, si potria lassare di scriuere questi dui Problemi come operationi delle quali non occorra farne particolare mentione, o darne particolare Regola.

Propositione quarta Theorema, ò Speculatione prima.

QVando di dui Triangoli i dui lati dell'vno siano eguali alli dui lati dell'altro ciascuno al suo relatiuo, o corrispondente, cioè il primo lato dell'vno al primo lato dell'altro, & il secondo, al secondo, & di più che l'angolo cõtenuto dalli dui lati dell'vno, sia eguale all'angolo a lui corrispondente contenuto dalli dui lati dell'altro, all'hora di necessità la base dell'vno sara eguale alla base dell'altro, & li restanti dui angoli dell'vno alli restanti dui angoli dell'altro, ciascuno al suo corrispondente, & ancora l'vn Triangolo sarà eguale all'altro.

Siano i dui Triangoli a b d, A B D, come si propone, cioè che il lato a b, sia eguale all'A B, l'a d, all'A D, & l'angolo a, contenuto dalli lati detti a b, a d, eguale all'angolo A, contenuto dalli lati A B, A D, si dice, che la base b d, sara eguale alla base B D, l'angolo b, al B, & il d, al D Et anco il Triangolo a b d, sara eguale al Triangolo A B D, il che si dimostrarà come segue.

Ponasi mentalmente, o fingasi, o vogliamo dire imaginiamoci, che il Triangolo a b d, si pona sopra al Triangolo A B D, di modo, che il pũto angolare a, si vnisca con il punto angolare A, & che la linea, o lato a b, vada sopra al lato, A B, che di necessità il punto b, si vnirà con il punto B, (*che ne fuori della linea A B, di sotto dal punto B, ne sù la A B, di sopra al punto B, può peruenire essendo posta la linea a b, eguali alla A B, perche la parte nõ può essere eguale al suo tutto, che all'hora la A B, saria parte della a b, se si dicesse il punto b, passare di sotto al punto B, ouero la a b, saria parte della A B, se si dicesse il punto b, restare sù la linea*

nea A B, di sopra dal punto B, cioè in altro luogo, che in B,) Ancora la retta a d, andarà sù la retta A D, cioè l'angolo a, si vnirà precise con l'angolo A, essendo essi posti eguali (*che la a d, non può intrare dentro al Triangolo fra A D, & A B, che all'hora l'angolo a, saria parte dell'A, à lui eguale il che è impossibile, nè meno può essa a d, vscire fuori del Triangolo oltre la AD, perche all'hora l'angolo A, saria parte dell'a, à lui eguale, che pure è impossibile, sapendosi per l'vltima Comune notitia, ò concessione, che la parte è sempre minore del suo tutto*) & il punto d, si vnirà con il D, essendosi posto la retta a d, eguale alla retta A D. Onde ancora la retta, ò base b d, si vnirà con la retta, o base B D, douentando vna istessa hauendo elle per termini gl'istessi punti B, d D (*che dentro al Triangolo A B D, non può entrare la b d, cioè passare di sopra alla B D, perche all'hora saria spatio fra esse a d, A D, serrato da loro, & perciò due linee rette verriano a chiudere superficie il che è impossibile, nè meno può essa retta b d, vscir fuori del Triangolo A B D, passando di sotto dalla B D, non potendo come s'è detto due linee rette, che sono esse b d, & B D, chiudere fra loro superficie, ò spatio alcuno*) onde l'vna stando precise sù l'altra ne si eccedendo elle l'vna l'altra da alcuna banda, hauendo vn medesmo principio, & vn medesmo fine ne segue, che l'vna sia eguale all'altra (per la ottaua Comune concessione) & perche elle sono le due basi de' Triangoli a b d, A B D, & si è mostrato essere eguali è chiara questa parte della Propositione, cioè che la base dell'vn Triangolo è eguale alla base dell'altro, Ancora perche l'angolo b, si vnirà precise con l'angolo, o spatio B, (*essendosi vnite le rette a b, b d, continenti il b, con le rette A B, B D, continenti il B,)* senza eccedersi l'vn l'altro, anzi douentando vn'istesso, ne segue che essi angoli b, & B, siano eguali fra loro, & così anco li dui angoli d, & D, douentando vn'istesso pure è chiaro, che sono eguali fra loro, finalmente perche il Triangolo a b d, douenterà vn'istesso con il Triangolo A B D, senza essere differenza alcuna fra loro, si conosce che essi dui Triangoli sono eguali l'vno all'altro perilche è manifesto tutto quello, che si voleua prouare.

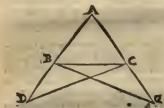
Quando mò hauendo dui Triangoli si sappia, ò si dimostri, che li dui lati dell'vno con l'angolo do loro contenuto sia eguale alli dui lati dell'altro (cioe il primo lato al primo, & il secondo al secondo) con l'angolo da loro contenuto; all'hora mediante questa quarta Propositione si potrà concludere, che anco la base dell'vno sia di necessità eguale alla basa dell'altro, o che l'angolo contenuto dal primo lato, & base dell'vno sia eguale all'angolo contenuto dal primo lato, & base dell'altro, o che l'angolo contenuto dal secondo lato, & base dell'vno sia eguale all'angolo contenuto dal secondo lato, & base dell'altro. O che l'vn Triangolo sia eguale all'altro, secondo che ci occorrerà, o che tutte le cose dette dell'vno siano eguali a tutte le cose dette dell'altro, se tutte ci accaderanno, cioè ci potremo seruire di vna, o più parti delle cose dimostrate, o di tutte secondo, che il bisogno che ne hauer[emo] ricercarà.

Propositione quinta, Theorema, ò Speculatione seconda.

QVando i dui lati, che accompagnano la base nel Triangolo (contenendo l'angolo d'essi lati all'incontro, ò opposto alla base) siano eguali fra loro, all'hora i dui angoli, che sono all'incontro d'essi lati (ò vogliamo dire che sono sopra alla base, contenuti l'vno da vn lato, & base, & l'altro dall'altro lato, & base) necessariamente saranno eguali fra loro (cioè l'vno all'altro) Et di più allungando essi dui lati eguali dalla banda della base, ancora li dui angoli, che si formaranno sotto alla base (contenuti l'vno dall'vno allungamento, & base, & l'altro dall'altro allungamento, & base) saranno eguali fra loro.

Sia nel Triangolo a b c, proposto, la b c, intesa base, & li dui lati a b, a c, siano eguali l'vno all'altro, & si allunghino sotto alla base à beneplacito, poniamo in d, & g, formando li dui allungamenti sotto alla base, & con essa li dui angoli d b c, & g c b, ò vogliamo dire c b d, & b c g, si dice che essi dui angoli b, & c, sotto alla base sono eguali l'vno all'altro, & che li dui angoli b, & c, sopra alla base (ò dicansi a b c, a c b,) opposti l'vno b, al lato a c, & l'altro c, al lato a b, sono eguali fra loro, cioè il b, al c, ò vogliamo dire il c, al b.

Per dimostrarlo, fatto centro il punto a, angolare de' lati nella somità del Triangolo con interuallo, ò apertura di compasso maggiore di qualsiuogli di detti dui lati si segni vn'arco, o parte di circonferenza che seghi le due rette a d, a g; segnando nelli punti de' segamenti il d, & g, acciohche le due rette a d, a g. siano eguali fra loro, che così essendo ancora il lato a b, parte dell'vna eguale al lato a c, (dal supposito) parte dell'altra, si sappia che (per la seconda comune notitia) l'altra restante parte b d, della a d, di necessità sara eguale all'altra restante parte c g, della a g. hora dal punto d, all'opposito estremo c, della base si tiri la retta d c, & si consideri come base del Triangolo a d c, che si formarà hauendo per lati la retta a d, che chiamaremo

primo lato, & la a c, che chiamaremo secondo lato, & l'angolo da essi dui lati contenuto sarà l'angolo a, istesso che è anco contenuto dalli dui lati eguali del Triangolo a b c, proposto, Ancora dal punto g, all'altro estremo b, della base oppostoli si tiri la retta g b, & si consideri come base del Triangolo a g b, che si formarà hauendo per lati la retta a g, che chiamaremo primo lato, & la a b, che chiamaremo secondo lato, & l'angolo da essi contenuto sarà l'angolo a, istesso, che è contenuto dalli dui lati eguali del Triãgolo a b c, proposto, & anco dalli dui lati d a, a c, dell'altro Triangolo formato, che ha per base la retta d c; onde esso angolo a, sarà comune alli tre Triangoli detti, & così potremo dire l'angolo a, contenuto dalli dui lati d'vno d essi tre Triangoli essere eguale all'angolo a, contenuto dalli dui lati di qual si vogli de gl'altri dui Triangoli detti, & nominando esso angolo a, con li lati che lo formano nelli tre Triangoli sapremo, o potremo dire, l'angolo b a c, ò c a b, è eguale all'angolo d a c; ò c a d, (*che la diuersa lunghezza delle due linee d a, b a, non fa variatione nella quantità d'esso angolo a,*) Ouero è eguale all'angolo g a b, (ò b a g,) Et similmente l'angolo d a c, (ò c a d,) è eguale all'angolo g a b, ò (b a g,) Questo inteso, considerati i dui Triangoli d a c, g a b, perche i dui lati d a, a c, dell'vno, con l'angolo a, da loro contenuto sono eguali alli dui lati g a, a b, dell'altro (*il primo lato, cioè d a, al primo g a, & il secondo a c, al secondo*) con l'angolo a, da loro contenuto, ne segue (*per la antecedente quarta propositione*) che ancora la base d c, dell'vn Triangolo sia eguale alla base g b, dell'altro Triangolo, & gl'altri dui angoli dell'vno, à gl altri dui angoli dell'altro ciascuno al suo corispondente, cioè l'angolo d, opposto al secondo lato a c, dell'vno, all'angolo g, opposto al similmente secondo lato a b, dell'altro, & l'angolo a c d, opposto al primo lato d a, dell'vno, all'angolo a b g, opposto similmente al primo lato g a, dell'altro. Ancora considerati i dui Triangoli b d c, c g d, preso per base comune la retta b c, (che è anco base del proposto Triangolo a b c,) sappiamo per quello che si è dimostrato, che le due rette d b, & d c, prese hora per i dui lati dell'vno continenti l'angolo d, sono eguali alle due rette g c, & g b, che si pigliano per i dui lati dell'altro continenti l'angolo g, (*cioè il primo lato d b, al primo lato g c, à lui corispondente, & il secondo lato d c, al secondo lato g b,*) & di più sappiamo l'angolo d, detto, contenuto dalli dui lati b d, d c, dell'vno, essere eguale all'angolo g, contenuto dalli dui lati c g, g b, dell'altro, perilche (*per la antecedente quarta propositione*) ne segue che anco li dui restanti angoli dell'vn Triangolo siano eguali alli dui restanti angoli dell'altro Triangolo, ciascuno al suo corispondente, cioè l'angolo d c b, opposto al più corto lato b d, nel primo sarà eguale all'angolo g b c, opposto al più corto lato c g, dell'altro Triangolo, & l'angolo d b c, opposto al più lungo lato d c, nel primo sarà eguale all'angolo g c b, opposto al più lungo lato g b, dell'altro, Ma questi dui angoli d b c, & g c b, ò vogliamo dire c b d, & b c g, sono i dui angoli sotto alla base b c, del Triangolo proposto a b c, & sono eguali fra loro però è noto, o dimostrata questa parte della propositione. Ancora l'angolo a c d, è diuiso dalla c b, base del Triangolo proposto in due parti, che sono a c b, superiore, & b c d, inferiore, Et similmente l'angolo a b g, (eguale all'a c d,) è diuiso dalla medesima b c, base del Triangolo proposto in due parti, che sono a b c, superiore, & c b g, inferiore, & di già si è prouato che l'angolo b c d, parte inferiore dell'a c b, è eguale all'angolo c b g, parte inferiore dell'a b g, onde leuate queste parti inferiori eguali dalli angoli detti totali pure eguali fra loro, ne segue (per la seconda Comune notitia) che il restante dell'vno, quale è la sua parte superiore a c b, sia eguale al restante dell'altro, che è la sua parte similmente superiore a b c, ma questi dui angoli a c b, & a b c, sono i dui angoli c, & b, sopra alla base b c, del proposto Triangolo a b c, & sono eguali, perilche è anco noto l'altra parte della Propositione. Si è dunque dimostrato che nelli Triangoli, quali hanno dui lati eguali, li dui angoli sopra alla base sono eguali, & anco allungati essi lati sotto alla base, li dui angoli sotto alla base sono anc'essi eguali fra loro, che è quanto occorreua dimostrare.

Io hò vsato molta diligenza nella superiore dimostratione non mi curando di parer lungo alli viuaci intelletti, acciochè i deboli principianti possano con maggior facilità intenderla essendo ella tenuta molto difficile. Et l'accorto Precettore nel dimostrarla potrà andare separando di mano in mano li Triangoli occorrenti, perche la esperienza ci hà mostrato, che questa separa-

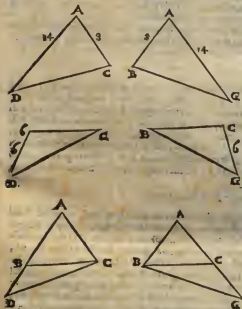
tione

tione aiuta molto all'a intiera, & salda cognitione d'essa dimostratione.

Questa Propositione si potrà anco dimostrare nel modo seguete.

Imaginiamo piegato il lato a c, verso l'a b, di modo che l'a c, vada sù l'a b, che cosi il pũto c, si vnirà co il punto b, (*per essere dal supposito la retta a c, eguale alla ab,*) & ancō l'allungamēto cg, andarà sù l'allūgamēto bd, & la piega sia la ar, che la retta, ò parte di base c r, si vnirà precise cō

la retta, ò parte di base b r, (*poiche fra loro nō può essere spacio alcuno, che 2. rette nō possono chiudere superficie alcuna*) & cosi l'angolo acr, douētarà vn'istesso cō l'angolo abr, & pò sara à lui eguale, & similmente l'angolo r c g, si vnirà precise con l'angolo r b d, non si eccedendo l'vn l'altro, ò vogliamo dire l'vno non eccedendo, ne essendo ecceduto dall'altro, & però saranno eguali, onde è noto li angoli b, & c, sopra alla base essere eguali l'vno all'altro, & similmente le dui b & c, sotto alla base essere eguali l'vno all'altro come si voleua prouare.

Potiamo anco dimostrare essa Propositione in altro modo cosi, Imaginato l'angolo a, diuiso per mezo dalla retta a r, che arriui alla base (*ne importa se bene non si habbi anco il modo di diuiderlo, che à noi basta supponere che diuidendosi egli per mezo con alcuna linea retta, ella sia, o si chiami la a r,*) che ella diuiderà ancora il Triangolo a b c, in dui Triangoli a b r, a c r, nelli quali prese per basi b r, dell'vno, & c r, dell'altro, sapremo, che il primo lato a b, dell'vno è eguale al primo lato a c, dell'altro dal supposito & il secondo lato a r, dell'vno è eguale al secondo lato a r, dell'altro (perche è vna istessa linea) & di più l'angolo b a r, contenuto dalli dui lati detti del primo è eguale all'angolo c a r, contenuto dalli dui lati del secodo perche ciascuno d'essi è la mità del totale angolo b a c, onde (per la antecedente quarta propositione) ne segue, che ancora li altri angoli dell'vn Triāgolo siano eguali all'altri angoli dell'altro Triangolo ciascuno al suo corispōdente, perilche l'angolo a b r, opposto al lato a r, dell'vno sara eguale al l'angolo a c r, opposto al lato a r, à lui corispondente dell'altro, ma questi sono li dui angoli b, & c, sopra alla base del proposto Triangolo a b c, & sono eguali però è chiaro questa parte della propositione. Ancora la somma delli dui angoli a b c, c b d, fatti dalla retta c b, cadente sopra alla retta a d, è eguale a dui retti (*che quando vna linea retta cade sopra ad vn'altra facendo dui angoli la somma loro è eguale à dui angoli retti per la 13. propositione, quale si può ponere, & dimostrare auanti à questa quinta, ò auanti à qualsiuogli altra delle antecedente nō hauendo ella bisogno d'alcuna propositione per dimostrarla*) & similmēte p la medesma causa la somma delli dui angoli a c b, b c g, è eguale à dui angoli retti anc'ella, & però la somma delli a b c, c b d, è eguale alla somma delli a c b, b c g, onde dalla prima somma inteso leuata la parte superiore a b c, & dalla secōda sōma la parte superiore a c b, eguale alla leuata dalla prima somma ne segue (per la terza commune noticia) che il rimanente angolo c b d, dalla prima somma sia eguale al rimanente angolo b c g, dalla seconda, ma questi dui angoli c b d, & b c g, sono li angoli sotto alla base del proposto Triangolo, & sono eguali, però è anco dimostrata la seconda parte della Propositione.

Questa seconda parte della propositione si può anco senza l'aiuto della 13. propositione dimostrare cosi.

Fatte

Fatte le rette a g, & a d, eguali, & tirate le rette d r, g r, intese basi delli dui Triangoli a d r, a g r, perche in essi Triangoli i dui lati d a, a r, dell'vno sono eguali alli dui lati g a, a r, dell'altro, ciascuno al suo corispondente, & di più l'angolo d a r, contenuto dalli dui lati detti dell'vno è eguale all'angolo g a r, contenuto dalli dui lati detti dell'altro (*essendo ciascuno di questi dui angoli la mità dell'angolo b a c, totale*) ne segue (per la quarta propositione) che la base d r, dell'vno sia eguale alla base g r, dell'altro, & l'angolo d, dell'vno eguale all'angolo g, suo corispondente dell'altro (*che la egualità del restante angolo a r d, dell'vno al restante angolo a r g, dell'altro, & dell'vn Triangolo a d r, all'altro Triagolo a g r, hora non è à nostro proposito ne occorre à valersene, onde si possono tacere*) Hora intesi i dui Triangoli parciali d b r, g c r, le base de quali siano b r, c r, diremo, li dui lati b d, d r, dell'vo Triangolo con l'angolo d, da essi lati contenuto, sono eguali alli dui lati c g, g r, dell'altro Triangolo, con l'angolo g, da essi lati contenuto, però (per la quarta propositione) l'angolo d b r, dell'vn Triangolo sarà eguale all'angolo g c r, à lui corispondente dell'altro Triangolo, ma questi dui angoli sono li dui b, & c, sotto alla base b c, del Triangolo proposto a b c, & sono eguali, però è prouata ancora la seconda parte della propositione, che è quanto occorreua.

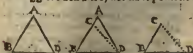
L'accorto Precettore si potrà mò seruire di qualsiuogli di queste dimostrationi, ò di tutte insieme con quale ordine più venga à proposito secondo la qualità dell'intelletto delli adiscenti.

Corollario, ò Deriuatione.

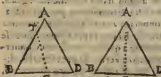
Dalle cose dette si manifesta, che i Triangoli Equilateri sono di necessità equiangoli, cioè che li tre angoli d'essi sono eguali fra loro, perche essendo il lato a b, eguale all'a d, sappiamo per la superiore dimostratione, che l'angolo d, opposto al lato a b, è di necessità eguale all'angolo b, opposto al lato a d; & essendo di più il lato b d, eguale al d a, ancora l'angolo a, opposto al lato b d, sarà eguale all'angolo b, opposto al lato a d, onde perche ciascuno delli dui angoli a & d, è eguale all'angolo istesso b, essi dui a, & d, & però tutti tre a, b, & d, saranno eguali fra loro, & il Triangolo a b d, continente essi tre suoi angoli eguali fra loro sarà equiangolo.

Propositione Sesta Theorema terzo.

Quando alcun Triangolo habbia dui angoli eguali l'vno all'altro, ancora di necessità li dui lati, che sono opposti, ò risguardano essi dui angoli eguali saranno eguali l'vno all'altro.

Sia nel Triangolo proposto a b d, l'angolo b, eguale all'angolo d, si dice che il lato a, opposito all'angolo b, è di necessità eguale al lato a b, opposto all'angolo d; Perche essi dui lati a b, a d, ineguali non possono essere, che se potessero essere ineguali per l'Aduersario, l'vno d'essi saria maggiore dell'altro; hor sia se possibile fusse l'a b, maggiore, & d esso a b, cominciando dal b, si segni la b c, dall'Aduersario eguali alla d a, & dal punto c, al d, si tiri la retta c d, & si consideri il Triangolo nuouo c b d, & paragonato al proposto a b d sariano li dui lati a d, d b, del proposto, con l'angolo d, da loro contenuto, eguali alli dui lati

c b b d, del nuouo con l'angolo b, da loro contenuto, cioè il primo lato a d, del proposto al primo lato c b, del nuouo, per il supposito dell'Aduersario (dicendo egli a b, essere maggiore di a d,) & il secondo lato b d, del proposto, al secondo lato b d, nuouo (che è vna istessa linea) & l'angolo a d b, contenuto dalli dui lati a d, b d, detti del Triangolo proposto all'angolo c b d, contenuto dalli dui lati c b, b d, detti dal Triangolo nuouo dal supposito (che quest'angolo c b d, del Triangolo nuouo è l'istesso che l'angolo b, ò vogliamo dire a b d, del Triangolo proposto, supposto essere eguale, (ò che è eguale) all'altro angolo a d b, del medesimo Triangolo proposto) onde per la quarta propositione l'vn Triangolo saria eguale all'altro; cioè il proposto a b d, saria eguale al nuouo c b d, ma questo nuouo è parte del proposto (essendo l'altra restante parte il Triangolo a c d) perilche la parte saria eguale al suo tutto, il che è impossibile (per l'vltima comune notitia cioè, perche è notissimo il tutto essere sempre maggiore, & non mai eguale ad alcuna sua parte) onde impossibile è anco quello da che questa impossibilità deriuaria, cioè che li lati a b, & a d,

& a d, possino essere fra loro ineguali, non potendo dunque essere ineguali, resta che essi siano eguali l'vno all'altro come si voleua mostrare.

In altro modo ancora si può dimostrare questa Propositione (cioè che il lato a b, del Triangolo a b d, sia eguale al loro a d, quando l'angolo d, sia eguale all'angolo b) così; Imaginiamo diuisa la base b d, in due parti eguali, con vna linea retta, erettali perpendicolarmente cioè ad angoli eguali, ò vogliamo dire retti, nel Triangolo; allungata fino che arriui alla sommità di esso Triangolo, che ella vi arriuarà nel punto angolare a, *(ne importa che non si sia anco mostrato il modo di diuidere vna linea retta per mezo ad angoli retti, ò perpendicolarmente, poiche a noi basta imaginarci, che vi sia tirata)* che se alcuno, ò vogliamo dire se l'Aduersario negarà, che ella vi peruenga nel punto a, ma dica che vi peruerrà altroue, sia per lui che vi peruenga in t, sul lato a b, & all'hora si tiri dal t, all'oppostoli angolo d, la retta t d, & si considerino i dui Triangoli rettangoli b c t, d c t, nelli quali i dui lati b c, c t, dell'vno fariano eguali alli dui lati d c, c t, dell'altro (cioè b c, à d c, per essere inteso ciascun d'essi essere la mità della base b d, & il c t esse re lato commune) & l'angolo b c t, côtenuto dalli dui lati detti dell'vno faria eguale all'âgolo dct, contenuto dalli dui lati detti dell'altro; perilche (per la quarta propositione) ancora gl'altri angoli dell'vn Triâgolo fariano eguali à gl'altri angoli dell'altro Triâgolo, ciascuno al suo corispôdente, cioè l'angolo t d c, opposto al lato commune t c, faria eguale all'angolo t b c, opposto al medesimo lato commune c t, ma ancora all'istesso angolo t b c, ò vogliamo dire a b c, è eguale l'angolo a d b, dal supposito onde (per la prima commune notitia) l'angolo t d c, faria eguale all'adc, (che ciascun d'essi si è prouato, che faria eguale ad vn'istesso angolo b,) ma il t d c, è parte della a d c, perilche la parte faria eguale al tutto, ma questo è impossibile, però è anco impossibile quello da che questa impossibilità deriua, cioè è impossibile, che la retta diuidente per mezo ad angoli retti, ò perpendicolarmente la base b d, peruenga alli termini del giro del Triangolo in altro luogo, che nella sommità angolare a, d'esso; Questo dimostrato, Consideraremo li dui Triangoli rettangoli a c b, a c d, de' quali li dui lati b c a, dell'vno cô l'angolo retto contenuto da loro, sono eguali alli dui lati d c, c a, dell'altro, con l'angolo retto contenuto da loro, però (per la quarta propositione) ancora la base a b, dell'vno farà eguale alla base a d, dell'altro, ma queste due rette a b, a d, sono i dui lati del Triangolo a b d, proposto, opposti alli dui angoli d, & b, eguali, però è chiaro quello che si voleua dimostrare.

Corollario.

Dalle cose dette si manifesta che li Triangoli Equiangoli sono di necessità Equilateri, Che posto il Triangolo Equiangolo a b d, perche l'angolo a, è eguale al b, & anco al d, similmente il lato b d, che è rincontro al, l'angolo a, farà eguale al lato a d, (che è rincontro all'angolo b,) & anco all'a b, (che è rincontro all'angolo d,) onde li dui lati a d, & a b, (eguali ciascun d'essi al medesimo b d,) faranno anco eguali fra loro, & però essendo tutti tre i lati di egual lunghezza il Triangolo è Equilatero.

Si può hora auuertire, che il Mathematico si serue di dui sorti di Dimostrationi l'vna è dimostrare per proprij mezi (che si suol chiamare ostensiua, ò affirmatiua) & l'altra Riducere l'Aduersario all'impossibile, cioè mostrando che la cosa non può essere in modo diuerso da quello, che si propone di mostrare. E per essempio Douêdo prouare che le due rette a b, a d, siano eguali fra loro; mentre elle siano semidiametri d'vn medesmo Cerchio, ò lati d'vn medesmo Triangolo Equilatero, dicendo la retta a b, è eguale alla retta a d (per la diffinitione, ò proprietà del Cerchio) perche ambedue vanno da vn medesmo cêtro a, alla circonferenza del suo istesso Cerchio, Ouero, la retta a b, è eguale alla retta a d, perche ambedue sono lati d'vn'istesso Triangolo Equilatero a b d; Il concludere in questo modo per proprij mezi, mediante le cose già concesse, ò dimostrate che la retta a b, sia eguale alla a d, si dice Dimostratione fatta per i proprij mezi; Ma quando non adoprando Dimostratione per proprij mezi, si mostrasse che le due rette a b, a d, sono di necessità eguali perche non possono essere ineguali (cioè perche l'vna non può essere maggiore, ne minore dell'altra che se si dicesse dall'opponente, ò Aduersario (cioè da chi negasse tale egualità) elle essere ineguali, & che da questa supposta per l'Aduersario inegualità si venisse à dimostrare, ò dedurne, che perciò di necessità la parte saria eguale al tutto cosa estrana, al vero già concesso per commune notitia, ò se ne deducesse altra cosa contraria ad altra concessa,

ò già dimostrata, & però impossibile, & conseguentemente si dicesse, perche è impossibile che la parte sia eguale al tutto (ò altra simile deduttione) è anco impossibile la inegualità delle rette a b, a d, dalla quale si dedurria, ò conuerria, che seguisse tale inegualità; Onde non potendo elle essere inequali, saranno di necessità eguali; Questa sorte di Dimostratione si chiama Ridurre l'Aduersario all'impossibile; quale perche si è adoprata nel concludere la verità della superiore sesta Propositione, essa Propositione si dirà essere dimostrata mediante il ridutre l'Aduersario, (ò riducendo l'Aduersario) à l'impossibile; Questa Riduttione all'impossibile, perche ella non suole apparere così facile, & breue come l'altra si adopra ordinariamente quando non si hà pròta quella che si chiama per proprij mezi.

Ancora si può auertire che ciascuna Propositione speculatiua, ò Theorema, hà due parti, l'vna è quella che si suppone, ò piglia per vera, l'altra è quella che si vuol concludere, ò prouare essere vera deducendo la sua verità da quello che si è supposto, che dicendosi; Quando vn Triangolo hà dui lati eguali è necessario che ancora li dui angoli sincòtro ad essi dui lati siano eguali (l'vno all'altro s'intende sempre) qui il supposito, ò cosa che si piglia per vera è la egualità delli dui lati, & quello che di qui si vuole dedurre, ò prouare è la egualità delli dui angoli oppostili; Onde l'vna parte si può chiamare supposta, & l'altra Dimostranda. Quando mò di due Propositioni l'vna si serue per supposito di quello che si è dimostrato nell'altra, & piglia à dimostrare quello che si era preso per supposito nell'altra, questa si chiara Propositione Conuersa all'altra, che per esempio, la quinta Propositione dimostra, Che Quando vn Triangolo hà dui lati eguali è necessario che ancora li dui angoli in esso opposti à tali dui lati siano eguali, Onde qui il supposito è la egualità delli dui lati, Et la parte Dimonstranda è la egualità delli dui angoli; Quando mò Conuersamente dal supponere che nel Triangolo siano dui angoli eguali, & di li si pigli à dimostrare che di necessità ancora li dui lati opposti ad essi dui angoli siano similmente eguali; come propone con esso supposito la sesta Propositione, questa sesta Propositione per ciò si chiama Conuersa alla detta quinta; Di queste Propositioni Conuerse l'vna all'altra se ne trouano molte nella Scienza Geometrica, che il Geometra dimostrato che hà vna Propositione suole (se fà à proposito per le cose seguenti) dimostrare anco la Propositione à quella dimostrata Conuersa, quando esso Conuerso però è vero, che non sempre tal conuerso è vero, Et per esempio, dicendo vna Propositione Quando proposti dui Triangoli, i dui lati, & angolo da loro contenuto, nell'vn Triangolo, siano eguali alli dui lati, & angolo da loro contenuto nell'altro Triangolo (intendendo sempre in tutti i Casi ciascun lato dell'vno eguale al suo corispondente lato dell'altro Triãgolo, cioè il primo lato al primo lato, & il secòdo al secòdo) all'hora di necessità essi dui Triãgoli sono eguali, Il Conuerso di questa Propositione saria il dire, Quando dui Triangoli siano eguali, all'hora in essi dui lati, & angolo da loro còtenuto nell'vno, conuiene di necessità che siano eguali à dui lati, & angolo da loro contenuto nell'altro, Qual conuerso, perche non è verò (poiche possono essere dui, & più Triangoli eguali fra loro senza trouarsi fra loro alcuna sorte di egualità ne fra i loro lati, ne fra gl'angoli) si dirà che la sopradetta prima Propositione non è conuertibile cioè che non è necessario che il suo Conuerso sia vero.

Propositione 7. Theorema, ò Speculatione 4.

SE dalli dui termini d'vna linea retta data siano tirate due linee rette che si congiunghino insieme formando angolo in alcun punto; Se dalli medesimi dui termini della retta data siano tirate verso la medesima banda delle prime, due altre linee che siano eguali, l'vna, ò finistra alla sinistra, & l'altra, ò destra alla destra, quali deuano concorrere insieme formando angolo, elle di necessità concorreranno nell'istesso punto doue sono concorse le due prime linee già tirate.

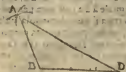
Sia che dalli dui termini b, & d, della retta b d, siano tirate le due rette b a, & d a, che concorrono insieme in a, (cioè formano l'angolo a,) si dice che se dalla medesima parte superiore dal punto b, si tirarà vna linea retta eguale alla già tirata b a, & dal punto d, vn'altra eguale alla già tirata d a, quali due rette, & le chiamaremo nuoue, ò seconde, deuano concorre re anc'elle insieme è necessario, che elle concorrano nel medesimo punto a, doue sono concorse le prime, cioè non potranno concorrere altroue che nel medesmo punto a, doue è il concorso delle prime b a, d a; Perche se fusse possibile che le linee seconde potessero concorrere altroue che nel punto à, conuerria che elle concorressero, ò fuori del Triangolo a b d, ò dentro ad esso Triangolo, ò sù vno delli suoi lati b a, ouero d a. Ma sù vno de'lati poniamo per l'Aduersario sul lato a d, nel pùto c, non possono concorrere, perche all'hora douendo la retta d c, essere eguale dal supposito alla d a, prima già tirata dal medesmo ponto d, ne seguiria che questa d c, saria parte della d a,

& à lei eguale, cioè la parte d c, saria guale al tutto d a, il che è impossibile, onde impossibile è anco che le due linee seconde possano concorrere sù le prime in alcun luogo, che non sia il punto a, Et se l'Aduersario dirà che possino concorrere fuori del Triangolo a b d, ò segariano vno de' lati del Triangolo, ò non ne segariano alcuno, hor sia che si dicesse che seghino il lato a d, concorrendo in s, dicendo b s, dal supposito essere eguale à b a, & d s, eguale à d a; all'hora per mostrare questo essere impossibile, dalli dui concorsi a, & s, si tiri la retta a s, considerandola base di dui Triangoli a s b; & a s d, che sariano Equicrurij dal supposito, onde (per la quinta propositione) ciascuno d'essi haueria li dui angoli sopra alla base eguali, cioè nel Triangolo a s b, l'angolo a s b, saria eguale all'angolo b a s, & nel Triangolo a s d, l'angolo a s d, saria eguale all'angolo s a d, ma l'angolo a s d, contiene in se l'angolo a s b, (essendo diuiso dalla retta s b, nelli dui angoli partiali a s b, b s d,) & però è maggiore d'esso a s b, (che la parte è maggiore del tutto per l'vltima comune notitia) però esso angolo a s d, sarà ancor maggior dell'angolo s a b, (à detto a s b, eguale) ma se l'angolo a s d, è maggiore dell' s a b, ancora ogn'angolo eguale all'a s d, & però l' s a d, sarà maggiore del medesimo angolo s a b; ma l's a d, è parte dell's a b, però la parte saria maggiore del tutto, ma questo è impossibile, però anco è impossibile quello da che questa impossibilità deriuaria, cioè che alcuna delle seconde linee seghi alcuna delle prime, cõcorrendo fuori del Triangolo a b d; Et se l'Aduersario dirà, che le seconde linee possino concorrere di fuori del Triangolo a b d, senza segare alcuna delle prime, poniamo per lui nel punto t, noi da questo al punto a, concorso delle prime linee, tiraremo la retta t a, considerandola base di dui Triangoli t a d, t a b, che sariano Equicrurij dal supposito, & però ciascun d'essi haueria i dui angoli sopra alla base eguali, & anco allungando i lati di qual si vogli di loro sotto alla base, i dui angoli che si formino sotto alla base pure saranno eguali fra loro (per la quinta propositione) onde imaginati allungati sotto alla base a t, i dui lati d a, in n, & d t, in r, quanto si vogli l'angolo r t a, saria eguale all'angolo n a t, ma l'r t a, è maggiore dell'angolo b t a, sopra alla base del Triangolo b t a, cõtenendolo in se, però saria anco maggiore dell'altro angolo t a b, sopra alla base del medesmo Triangolo detto b t a, onde se l'angolo r t a, è maggiore del t a b, ancora l'altro angolo n a t, eguale all'r t a, saria maggiore del medesmo t a b, ma l'n a t, è parte del t a b, in esso contenuta, però la parte n a t, saria maggiore del tutto t a b, il che è impossibile, però impossibile è anco che le due linee seconde possino concorrere fuori del Triangolo abd, ne anco non segando alcuno de suoi dui lati. Ma ne anco possono concorrere di dentro del Triangolo come si mostraria con questo medesimo modo, supponendo all'hora (*con il seruirci per comodità della medesima vltima figura*) che le prime linee siano le b t, d t, esterne, & le seconde per l'Aduersario le due b a, d a, interne; però non potendo le seconde linee concorrere in alcun luogo, ne fuori, ne dentro, ne sù i lati del Triangolo resta che elle di necessità concorrano insieme nel punto a, angolare d'esso Triangolo doue sono concorse le prime, che è quello che si voleua mostrare.

Questa dimostratione fatta non per proprij mezi, ò affirmatiua, ma riducendo l'Aduersario all'impossibile appare à molti principianti lunga, & difficile talmente, che tralassano il passare auanti, & perciò ella hà preso nome, ò vogliamo dire è chiamata FVGA MISERORVM, perche pare che facci fuggire questa Dottrina à gl'intelletti deboli, Onde andoui speculando intorno (*nel tempo d'vna fastidiosa infirmità, che mi teneua molte hore del giorno in letto, molti anni sono*) illustrandosi l'intelletto da Diuino fauoreuole lume, mi imaginai la seguente Dimostratione, quale è facilissima, breuissima, & fatta per i proprij mezi, ò vogliamo dire affirmatiuamente, onde per gratia particolare di N S. Dio, essendo leuata la difficultà di questa Propo-

sitione

fitione alli Principianti essi lietamente potranno seguire auanti in questa mirabile, & vtilissima Dott. che li sarà facile, & gioconda, riducendola di mano in mano alla Pratica come si mostrarà.

Dalli termini b, & d, della retta b d, siano tirate le due rette b a, d a, che concorrano insieme in a, si dice che se dal b, tiraremo verso la medesima parte superiore vn'altra retta eguale alla già di li tirata b a, & dal d, vn'altra retta eguale alla già di li tirata d a, quali due line nuoue, ò seconde habbino da concorrere insieme anch'elle, sarà necessario che il loro concorso sia nell'istesso punto a, doue sono concorse le prime b a, d a, cioè non potranno concorrere insieme altroue, ò vogliamo dire in altro punto. Dimostratione.

Facciasi centro la estremità b, & con l'interuallo, ò semidiametro della b a, di li tirata si descriua vna circonferenza di cerchio, che all'hora tutte le linee rette che partendosi dal punto, ò centro b, deuano essere eguali alla b a, conuerrà che arriuino precise ad essa circonferenza in alcun punto che sia in essa; che dentro del Cerchio non possono restare, ò terminare non arriuando alla circonferēza, perche sariano più corte della b a, ne meno possono passare fuori del Cerchio segando la circonferenza perche sariano più lunghe della a b, (che nell'vn modo elle sariano parte del semidiametro, & però della a b, & nell'altro il semidiametro, & però la a b, saria parte di quelle, & la parte è sempre (per comune noticia) maggiore del tutto) Ancora facciasi centro l'altra estremità d, & con l'interuallo, ò semidiametro della detta d a, da essa estremità d, tirata si descriua pure vna circonferenza del Cerchio, che all'hora tutte le linee rette, che partendosi dal punto, ò centro d, deuano essere eguali alla d a, conuerrà di necessità che arriuino precise alla circonferenza di quest'altro cerchio in alcun punto che sia in essa, & perche si vuole che la retta che si partirà dal b, eguale alla b a, concorra con la retta che si partirà dal d, eguale alla d a, douendo per quello, che si è detto la prima dall'a, arriuare alla circonferenza del primo Cerchio, & la seconda dal b, douendo arriuare alla circonferenza del secondo Cerchio, concorrendo insieme conuerrà che vi arriuino in vn punto, che sia comune à dette due Circonferenze, ma elle non hanno altro punto comune, che l'a, doue si intersegano, però conuerrà che dette nuoue linee concorrendo insieme vi concorrino in esso comune punto a; ma questo a, è il punto del concorso delle prime linee sopradette b a, & d a, però è chiaro quello che si propone, cioè che tutte l'altre linee, quali partendosi dalli punti b, & d, siano eguali alle sue conterminali, & habbino da concorrere insieme dalla medesima parte superiore della b d, necessariamente hauerando il loro concorso nell'istesso punto a, che è anco il concorso delle prime tirate b a, d a.

Propositione ottaua, Theorema, ò Speculatione quinta.

QVando di dui Triangoli dati il primo lato dell'vno sia eguale al primo lato dell'altro, il secondo lato al secondo lato, & la base alla base, all'hora li angoli dell'vn Triangolo saranno eguali alli angoli dell'altro, ciascuno al suo corispondente, cioè quello che è opposto al primo lato dell'vno sarà eguale all'angolo che è opposto al primo lato dell'altro; l'opposto al secondo lato sarà eguale all'opposto al secondo lato, & l'opposto alla base dell'vn Triangolo sarà eguale all'opposto alla base dell'altro Triangolo, & l'vn Triangolo sarà eguale all'altro.

Siano li dui Triangoli a b d, A B D, come si propone, cioè che il lato a b, dell'vno sia eguale al lato A B, dell'altro, il lato a d, al lato A D, & la base b d, alla base B D, si dice, che l'angolo A, dell'vno opposto alla base sarà eguale all'angolo a, dell'altro similmente opposto alla base, l'angolo B, all'angolo b, & il d, al D. Per dimostrarlo. Ponasi mentalmente, ò imaginiamoci, che la base b d, sia posta sù la B D, di modo che il punto b, si vnisca con il punto B, che ancora il punto d, si vnirà con il D, per la egualità dal supposito d'esse rette b d, B D, & si poni (ò volta) il Triangolo a b d, sopra al Triangolo A B D, che essendo la retta b a, che si partirà dal punto B, eguale alla B A, già inteso tirataui & la d a, che si partirà dal punto D, eguale alla D A, già tirataui, & concorrendo insieme queste intese nuoue, ò seconde linee elle (per la antecedente 7. propositione) haueranno il loro concorso nel medesmo luogo, ò punto precise doue sono concorse le prime intese B A, D A, cioè il punto a, concorso angolare delle seconde b a, d a, sarà l'istesso che il punto A, concorso delle B A, D A, & così il lato b a, si vnirà precise con il B A, & il lato d a, con il lato D A, onde lo spatio a, ò vogliamo dire l'angolo b a d, sarà precise vnito con lo spatio A, ò angolo B A D, (*che l'vno starà sopra all'altro senza eccedersi l'vn l'altro*) per la ottaua comune notitia, essi dui angoli a, & A, saranno eguali fra loro, Similmente l'angolo b, starà precise sopra all'angolo B, senza eccedersi l'vn l'altro, & così il d, sopra al D, per il che

(per

(per la istessa ottaua Comune concessione, ò notitia) il b, sara eguale al B, & il d, al D, Et perche anco il Triangolo, ò superficie a b d, stara precise sopra all'A B D, senza cioè eccederlo, ne esse-re ecceduto da quello ne segue (per la istessa Comune notitia) che l'vn Triangolo sia eguale al-l'altro ; Che è quanto si voleua dimostrare.

Scriue il molto Reuerendo Padre Clauio, che i familiari di Philone dimostrauano questa Propositione nel modo che segue, bello veramente, & ingegnoso, & si serue solo della 4. & 5. Propositione.

Essendo li dui Triangoli dati a b d, A B D, come si propone, cioè tali, che la base dell'vno sia eguale alla base del-l'altro, il primo lato al primo lato,& il secondo al secondo, per dimostrare che gl'angoli dell'vno per ordine siano eguali a gl'angoli dell'altro, cioè l'a, all'A, il b, al B, & il d, al D, Ponasi, ò si imagini ponersi la base b d, sopra alla a lei egua le base B D, vnendo il punto b, con il B, che anco il d, si vnira con il D, & voltinsi questi dui Tri-angoli l'vno al contrario dell'altro, cioè la cima a, dell'vno per vn verso, ò di sopra, & la cima A, dell'altro per vn'altro verso, ò di sotto, Et dall'vna all'altra cima, ò somita cioè dall'a, all'A, si imagini tirata vna retta a, A, quale passara, ò per vna delle estremita della base, ò dentro alli Triangoli segando la base, ò di fuori lontano dalla base.

Hor sia prima che i Triangoli siano di tale figura che la retta a A, passi per vna delle estremi-ta della base, & sia per la b B, (il che auuerra quando ciascuno delli dui angoli b B, sia retto) & all'hora considerato il totale Triangolo a A D, (composto dalli dui dati) la base del quale si intenda essere la a A, & li dui lati d a, d A, perche essi lati dal supposito sono eguali, ancora i dui angoli a, & A, sopra alla base oppositi alli dui lati detti saranno eguali fra loro; Dipoi intesi i dui Triangoli partiali dati a b d, A B D, perche i dui lati b a, a d, dell'vno sono eguali alli dui la-ti B A, A D, dell'altro (ciascuno al suo corispondente) & l'angolo a, contenuto da detti dui lati dell'vno è eguale all'angolo A, contenuto da detti dui lati nell'altro, ne segue (per la 4. propo-sitione) che gl'altri angoli dell'vn Triangolo siano eguali, a gl'altri angoli a loro corispondenti dell'altro Triangolo, cioè il b, al B, & il d, al D, & l'vn Triangolo all'altro, che è quello che si propone. Ma se la retta a A, segara la base b d, (ò vogliamo dire (che è l'istesso) la B D, (il che auuerra quando ciascuno delli angoli b, & d, ò B, & D, siano acuti) all'hora considerati li dui Triangoli a b A, sinistro, & a d A, destro, & per base comune loro la retta a A; Perche nel fini-stro li suoi dui lati a b, A B, dal supposito sono eguali, ne segue (per la quinta propositione) che li dui suoi angoli o, o, sopra alla base siano egua li fra loro. Et similmente nel Triangolo destro a d A, perche li suoi dui lati a d, d A, dal suppo-sito sono eguali fra loro ne segue (per la quinta propositione) che li dui suoi angoli c, c, rincon-tro ad essi lati siano eguali fra loro, per il che il composto delli dui angoli o c, di sopra, cioè il to-tale angolo b a d, sara eguale al cõposto delli dui anguli o c, di sotto, cioè al totale angolo b A d; hora considerati i dui Triangoli dati a b d, A B D, perche i dui lati b a, a d, dell'vno, con il loro angolo a, sono eguali alli dui lati B A, A D, dell'altro con il loro angolo B A D, ne segue (per la quarta propositione) che li altri angoli dell'vno siano eguali alli altri angoli a loro corispondẽti dell'altro, cioè l'a b d, all'A B D, & l'a d b, all'A D B, & l'vn Triangolo all'altro, come si pro-pone. Et se la retta a A, restara fuori de i dui Triangoli dati non segando cioè la base (il che auuerra quando l'angolo b, ò B, sia ottuso) all'hora considerati i dui Triangoli a d A, totale, & a b A, sua parte, ò partiale, & inteso pure la retta a A, come base a loro comune, perche nel grande, ò totale li suoi dui lati a d, A d, dal supposito sono eguali fra loro ne segue (per la quin-ta propositione) che i dui angoli d a A, & d A a, ad essi lati contrapositi siano eguali l'vno all'al-tro. Et nel Triangolo piccolo, ò partiale a b A; perche similmente i suoi dui lati a b, A b, sono eguali l'vno all'altro dal supposito, ne segue (per la quinta propositione sopradetta) che ancora li dui angoli a A b, & A a b, sopra alla base siano eguali fra loro; onde dall'angolo A a d, leuato la sua parte A a b, & dell'angolo a A d, (eguale all'A a d, detto) leuato la sua parte a A b, eguale alla parte A a b, leuata dall'altro, ne segue (per la terza Comune Concessione) che il rimanen-te angolo d a b, nell'vno sia eguale al rimanente angolo D A B, nell'altro, Et hora considerati i

dui Triangoli dati a b d, A B D, perche li dui lati a b, a d, dell'vno con il loro angolo a. sono eguali alli dui lati B A, A D, dell'altro, con il loro angolo A, (ò vogliamo dire B A D, ò D A B) ne segue (per la quarta propositione) che gl'altri angoli dell'vno siano eguali alli altri angoli à loro corispondenti dell'altro, cioè il d b a, al D B A, & il b d a, al B D A, Et l'vn Triangolo al'altro, che è quanto si voleua dimostrare.

Propositione 9. Problema, ouero Operatione. 4.

Dato vn angolo rettilineo, egli si può segare per mezo.

Sia data l'angolo rettilineo a, da segare per mezo, ò vogliamo dire in due parti eguali, Per farlo Posto vn piede del Compasso nel punto angolare a. si segni vna circonferenza di Cerchio con tale interuallo, ò apertura, ò semidiametro che seghi le due linee che contengono l'angolo a, & vi notaremo b & d, nelli punti del segamento, acciò a b, sia eguale ad a d, & tirata, ò imaginata la retta b d, sopra ad essa dalla parte opposita al punto a, si formi il Triangolo Equilatero b c d, & dalla somità d'esso al punto a, si tiri la retta c a, che ella diuiderà l'angolo a, dato per mezo nelli dui angoli b a c, d a c, eguali fra loro, perche cõsiderati li dui Triãgoli b a c, d a c, essendo in essi il primo lato b a, dell'vno eguale al primo lato d a, dell'altro dal supposito, & il secondo lato b c, al secondo lato d c, (che sono lati d'vn medesimo Triangolo Equilatero, & il restante lato, ò base a c, dell'vno al restante lato, ò base a c, dell'altro (che è vna istessa linea) ne segue (per la ottaua antecedente propositione) che gl'angoli dell'vno siano eguali à gl'angoli dell'altro ciascuno al suo corispondente, & perciò (che à noi basta) l'angolo c a b, ò vogliamo dire b a c, dell'vno contenuto dal primo lato, & base, ò vogliamo dire opposto al secondo lato b c, dell'vno sarà eguale all'angolo c a d, ò vogliamo dire d a c, dell'altro, contenuto similmente dal primo lato, & base, ò vogliamo dire opposto al secondo lato d c, mà questi dui angoli b a c, d a c, sono le due parti nelle quali si è diuiso l'angolo b a d, dato, & sono eguali, però è chiaro esso angolo b a d, essere diuiso in due parti eguali, che è quanto si voleua mostrare.

Si conosce dalla Dimostratione che basta che il Triangolo che si fa sù la retta b d, imaginata base essere Equicrure, cioè hauere i dui lati b c, d c, eguali, & però con la apertura istessa adoprata à segnare i dui punti b, & d, egualmente lontani dal punto a, angolare si può segnare i dui pezzi d'arco, la intersegatione de quali mostra il punto c, sommità angolare del Triangolo da imaginarsi.

Et quando non ci potessimo seruire della Carta inferiore, ò vogliamo dire opposita al punto angolare a, dato, potressimo fare il Triangolo dalla banda medesima del punto a, ma con apertura di compasso maggiore, o minore della adoprata nel segnare li punti b, & d, & la dimostratione saria la seguente.

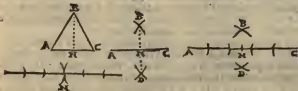
Imaginata, o presa la c a, per base comune delli dui Triangoli b c a, d c a, perche ancora il primo lato b c, dell'vno è eguale al primo lato d c, dell'altro, & il secondo b a, al secondo d a, ne segue per la ottaua propositione che l'angolo b a c, dell'vno sia eguale allo à lui corispondente angolo d a c, dall'altro, ancora nella figura doue il punto c, è di sopra dall'a, la somma delli dui angoli b a c, b a n, fatti dalla b a, cadente sù la retta c n, sono eguali alla somma delli dui angoli d a c, d a n, fatti dalla retta d a, cadente sù la c n, perche così l'vna somma come l'altra è eguale à dui retti (per la 13. propositione, che si potria ponere auanti a questa perche se bene ella si vale della 11. nel tirare vna perpendicolare a suo proposito, ciò non è necessario alla sua dimostratione, potendosi supponere, o imaginarsi che essa perpendicolare vi sia tirata) ondè dall'vna somma leuata la parte, o angolo b a c, & dall'altra somma la parte, ò angolo d a c, (quali parti sono eguali fra loro come s'è mostrato) ne segue che il restante dell'vna che è l'angolo b a n, sia eguale al restante dell'altra, che è l'angolo d a n, ma questi dui angoli b a n, d a n, sono le due parti nelle quali è diuiso l'angolo dato a, ò b a d, però egli è diuiso in due parti eguali, come si propone.

Nella altra operatione quando il punto c, è di sotto dall'a, la dimostratione espedientemente si potrà fare così. Intesi i dui Triangoli b c a, d c a; di comune base c a, perche anco il primo lato b a, è eguale al primo d a, & il secondo b c, al secondo d c, ne se segue (per la ottaua propositione) che l'angolo b a c, contenuto dal primo lato b a, & base a c, dall'vno sia eguale allo à lui corispondente angolo d a c, dell'altro Triangolo contenuto cioè anch'egli dal suo primo lato d a, & base a c, ma questi dui angoli b a c, & d a c, o vogliamo dire (che risulta l'istesso) b a n, & d a n, sono le due parti nelle quali è diuiso

diuiso il dato angolo b a d, però egli è diuiso in due parti eguali. Et cosi vediamo, che quando faremo il Triangolo di dentro dal b a d, cioè con le due intersettioni (aprendo il compasso manco che non è la a b, ouero a d,) trouaremo il punto c, di dentro, tirando poi la a c, diuidente l'angolo a, in due parti, elle espedientemente si dimostraranno essere eguali, senza aiuto d'altra propositione che della ottaua.

Propositione decima, Problema quinta.

SI può diuidere vna data linea retta terminata in due parti eguali.

Sia data la retta a c, da diuidere in due parti eguali. Per farlo, sopra ad essa a c, si formi vn Triangolo Equilatero a b c, & si diuida l'angolo a b c, della sua somità in due parti eguali (per la antecedente 9. Propositione) con la retta b n, che arriui alla data a c, in n; & cosi essa a c, sara diuisa in due parti eguali in n; Perche intesi i dui Triangoli a b n, c b n, nelli qua'i il primo lato a b, dell'vno è eguale al primo lato c b, dell'altro (che sono lati d'vn'istesso Triangolo Equilatero) & il secondo lato b n, dell'vno è eguale al secondo lato b n, dell'altro (perche è vna istessa retta) & di più l'angolo a b n, contenuto da detti dui lati dell'vno è eguale all'angolo c b n, contenuto dalli dui lati dell'altro,

ne segue (per la 4. propositione) che ancora la base a n, dell'vno sia eguale alla base c n, dell'altro, ma queste due a n, c n, sono le due parti nelle quali è diuisa la data a c, & sono (come s'è mostrato) eguali; però essa retta data a c, è diuisa in due parti eguali come si voleua fare.

Dalla dimostrastione si conosce che basta che il Triangolo a b c, fatto sù la base, ò retta data sia Equicrure, cioè di dui lati eguali, il che vien molto comodo quando la retta data è molto lunga, ò molto corta. Si conosce anco che con qual si vogli apertura di compasso (maggiore però della mità della retta data da diuerse) fatti dui Cerchi, essendo loro centri le due estremità della data, & dalle loro due intersegationi b, & d, tirata, o imaginata vna retta segnando il pũto n, doue ella seghi la data esso n, sarà il punto della diuisione, che imaginati i dui Triangoli a b d, c b d, ciascuna delle tre linee dell'vno sono eguali a ciascuna delle tre linee loro corispondenti dell'altro, & però gl'angoli dell'vno (per la ottaua propositione) sono eguali à gl'angoli à loro corispondenti dell'altro, onde l'angolo a b d, dell'vno è eguale all'angolo c b d, dell'altro Et considerati i dui Triangoli a b n, c b n, perche li dui lati a b, b n, con l'angolo da loro contenuto in l'vno sonó eguali à lli dui lati c b, b n, con l'angolo da loro contenuto nell'altro, sarà ancora (per la quarta propositione) la base a n, dell'vno, eguale alla base c n, dell'altro.

Et quando non si potessero fare le Circonferenze de Cerchi se non da vna banda, ò superiore, ò inferiore della data diuidenda a c, elle anco seruiriano facendone due intersegantesi in b, con vna apertura di compasso, & due altre con diuersa apertura intersegantesi in d, che la retta tirata dalla superiore b, alla inferiore d, & allungata fino alla retta a c, peruenendoui in n, mostrarà le due parti eguali d'essa a c, essere a n, & c n, considerati prima i dui Triangoli a b d, c b d, che haueranno l'angolo a b d, dell'vno eguale all'angolo c b d, dell'altro (per la ottaua propositione) & poi li dui Triangoli a b c, c b n, equicrurij (che per la quarta propositione) haueriano le due basi a n, c n, eguali fra loro, che sono le due parti della a c, diuisa.

Et quando la apertura del compasso (per essere la linea diuidenda molto lunga) non fusse tanto ampla che li dui Cerchi, ò pezzi di circonferenza fatti con essa (presi per centri i dui estremi della retta data) nõ si intersegassero fra loro, all'hora lassate le due parti della data, vna da vna bãda, & l'altra dall'altra (che sarãno eguali) si segua a diuidere la restante linea in due parti eguali mediante dui altri Cerchi, & quisti non bastando si segua a diuidere la retta che poi restarà in due parti eguali mediate dui altri Cerchi, & cosi si segua con Cerchi l'vno da vna banda, & l'altro dall'altra, finche si peruenga a dui Cerchi che si interseghino, ò che si tocchino insieme sù la retta diuidenda, che all'hora il punto del loro toccamento sara anco il punto della diuisione, ò segandosi insieme la retta tirata dall'vna intersegatione all'altra diuiderà la data in due parti eguali, il che tutto è chiaro mediante la seconda Commune Concessione.

Pro-

Propositione 11. Problema 6.

Data vna linea retta da vn punto segnato in essa se li può tirare vna perpendicolare, cioè vna retta che con essa facci angoli retti.

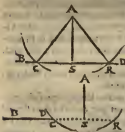
Sia la retta data b d, alla quale si habbi da erigere vna perpendicolare dal punto c. Per esequirlo faccisi centro il punto c, & segnisi vna parte di circonferenza segante da vna banda, & dall'altra della retta b d, due parti eguali, & siano c b, & c, s, (*& quando il punto c. fusse in vna delle estremità della data, all'hora, ella si allunghi dalla banda di tale estremità à beneplacito, si che da vna banda, & dall'altra del punto c, si possino segnare dui punti sù la retta egualmente lontani da esso punto c,*) poi sopra alla totale b s, si formi vn Triangolo Equilatero (ò Equiecurre che basta) & sia b r s, & dal punto angolare r, de i suoi dui lati, ò sommità d'esso Triangolo al punto c, si tiri la retta r c, che ella sarà la perpendicolare alla data.

Perche considerati i dui Triangoli b c r, s c r, i tre lati dell'vno sono eguali alli tre lati dell'altro, & però (per la ottaua propositione) gl'angoli dell'vno sono eguali à gl'angoli dell'altro, cioè l'angolo b c r, è eguale al suo corispondente angolo s c r, onde (per la 10. diffinitione) ciascuno d'essi è retto, & la c r, è perpendicolare in c, alla data b d, come si voleua fare.

Si può anco facilmente alla retta data, & sia c d, erigire vna perpendicolare da vna estremità, & sia c, senza allungare la data & anco seruendosi di qual si vogli apertura di compasso, così. Ponasi il piede del Compasso nel punto c, & l'altro si fermi come in centro doue si vogli verso la parte superiore alla data c d, & sia in s, & girando il piede che era c, si descriua vn Cerchio, ò parte di circonferenza, che passando per il punto c, seghi la data c d, (allungata dalla banda di d, se occorra) & sia in n, poi dall'n, al centro s, tirata, ò segnata vna retta ella si allunghi dalla banda del centro s, fino alla circonferenza, & sia che vi arriui in r, (che così n r, sarà diametro del Cerchio (dal quale r, al punto c, si tiri la retta r c, che ella sarà perpendicolare alla data c d, dal punto c, cioè l'angolo r c d, sarà retto, perche è fatto nel mezo cerchio, che hà tale proprietà di contenere gl'angoli retti, come (non si potendo hora) si conoscerà poi nella 31. propositione del Terzo libro.

Propositione 12. Problema 7.

Data vna linea retta di indefinita, ò indeterminata lunghezza, cioè che si possa allungare occorrendo da qual si vogli banda, si può da essa da vn punto assegnato fuori di qualla, (che non sia però à dirittura d'essa) tirare vna perpendicolare.

Dal punto assegnato a, sia da tirarsi vna perpendicolare alla data retta b d; Per farlo Preso per centro il punto a, si segni vna circonferenza di cerchio con apertura tanto ampla, che seghi la data, & si segnino i dui punti del segamento c, & r, che saranno egualmente lontani dall'a, (& quando la data non potesse essere segata (per essere molto corta) in dui punti da cerchio hauente per centro il punto a, ella si allunghi quanto bisogna (*che perciò si propone che ella sia di indeterminata lunghezza, acciochè non potendo la perpendicolare cadere sopra ad essa data ella cada sul suo allungamento*) dipoi si diuida la c r, in due parti eguali (per la la 10. propositione) & sia in s, dal qual punto s, all'a, si tiri la retta a s, che ella sarà la perpendicolare alla data b d; Perche intesi li dui Triangoli c a s, r a s, nelli quali il primo lato a c, dell'vno è eguale al primo lato a r, dell'altro, il secondo lato c s, dell'vno, al secondo lato r s, dell'altro) per essere ciascun d'essi la mità della retta c r,) & il terzo lato, ò base a s, dell'vno al terzo lato, ò base a s, dell'altro (perche è vna istessa linea) ne se segue (per la 8. propositione) che ancora gl'angoli dell'vno siano eguali à gl'angoli dell'altro, & però l'angolo a s c, eguale all'angolo a s r, à lui corispondente, onde (per la 10. diffinitione) ciascun d'essi è retto, & la a s, è perpendicolare alla data.

In Pratica si può dire, fatto centro il punto a, & segata la data in dui punti con vna circonferenza di che semidiametro, ò apertura basteuole si vogli, & siano c, & r, & presa la c r, per base si fermi

si fermi sopra ad essa vn Triãgolo Equicrure, ò dalla banda opposita al punto a, ò pure dalla medesima banda, ma con apertura diuersa, cioè ò minore facendosi la intersegatione n, de' Cerchi eguali, che è la cima, ò sommità del Triangolo Equicrure fra il punto a, & la retta data, ò apertura maggiore facendosi la intersegatione r, di sopra dal punto a, che dalla intersegatione sia qual si vogli tirata al punto a, vna retta, & allungata si che arriui alla data, & sia in s, la a s, sarà la perpẽdicolare ad essa data in questi dui casi, che nel primo essendo la intersegatione il punto m, dalla parte della data opposita al pũto a, all'hora dall'a, all'm, tirata la a m, che segarà la data in s, la parte a s, sarà la perpendicolare cercata, ilche tutto è chiaro, mediante prima la ottaua propositione, & poi mediante la quarta che non si replicano per breuità essendo facile la applicatione loro. Auuertendo, che quando nel fare il Cerchio con il centro a, punto assegnato, s'abbattesse la apertura del compasso essere tale che la circonferenza toccasse solo la data retta, ilche saria in vn punto s, all'hora da esso punto s, del toccamento, all'a, tirata vna retta, ella saria la perpendicolare ella data; perche il semidiametro del Cerchio, che saria la a s, fa sempre angoli retti con la linea retta toccante il Cerchio, nell'estremità d'esso semidiametro, come si dimostrarà nella 18. propositione del terzo libro.

Quando il punto a, fusse molto vicino nella parte superiore all'vno de' termini della data b d, & sia il d, quale da quella banda non si potesse allungare, all'hora da dui punti segnati doue si voglino nella b d, & siano c, & n, presi per centri, & semidiametri le due distanze, ò rette imaginate c a, n a, si descriuano due circonferenze, ò parti d'esse fino che si interseghino nel punto t, opposito all'a, disotto alla b d, & sia in t, dal quale all'a, tirata, ò segnata la retta t a, che segarà la b d, in s, la parte a s, sarà la perpendicolare cercata alla b d, dal punto a; Perche considerati i dui Triangoli a n c, t n c, il primo lato a n, dell'vno è eguale al primo lato t n, dell'altro, il secondo a c, al secondo t c, & il restante n c, al restante n c, onde (per la ottaua propositione) l'angolo a n c, dell'vno sarà eguale all'angolo t n c, dell'altro. Et hora considerati i dui Triangoli a n s, t n s, nelli quali il primo lato a n, dell'vno è eguale al primo lato t n, dell'altro, il secondo lato n s, al secondo lato n s, & l'angolo a n s, contenuto dalli dui lati dell'vno, all'angolo t n s, contenuto dalli dui lati detti dell'altro, ne segue (per la quarta propositione) che ancora gl'altri angoli dell'vno siano eguali à gl'altri angoli dell'altro; & però l'angolo a s n, dell'vno, allo à lui corispondente angolo t s n, dell'altro, perilche (per la 10. diffinitione) ciascun d'essi sarà retto, & però la a s, sarà perpendicolare alla b d, data, partendosi dal punto a, come si propone. Et se non solo non si potesse allungare la data b d, occorrendo, ma ne anco fare operatione alcuna sotto ad essa, cioè dalla parte opposita al punto a, assegnato, noi all'hore da esso punto a, alla b d, tiraremo vna retta à beneplacito, & sia la a t, quale presa per diametro, (& però diuisa per mezo in c, & fatto centro esso punto c, & semidiametro la c t, ouero c a, segnaremo doue la circonferenza di questo Cerchio seghi la data b d. & sia in s, dal qual punto s, all'a, tiraremo la retta s a, che ella sarà la perpendicolare cercata alla b d, Perche essendo l'angolo a s t, fatto nel mezo cerchio egli è retto, come si dimostrarà nella propositione 18. del terzo libro.

Propositione 13. Theorema, ò Speculatione 6.

QVando vna linea retta stando sopra ad vn'altra retta farà dui angoli, essi saranno retti, ò in somma saranno eguali à dui angoli retti.

Se vna linea retta starà sopra ad vn'altra in vna delle due estremità elle faranno solo vn'angolo come si vede della c b, che stà sopra alla a b, nella estremità b. Ma cadendo dentro della a b, pouiamo in s, elle faranno dui angoli c s a, c s b, quali, ò saranno retti, & però eguali fra loro, se la c s, cada, ò stia perpendicolarmente sù la a b, ma non saranno retti se caderà obliquamente facendo vn'angolo ottuso maggiore cioè d'vn retto, & vn'angolo acuto minore cioè con vn retto. Hor si dice questi dui angoli ottuso, & acuto giunti insieme far somma eguale à dui angoli

retti. Dimostratione. Dal punto s, si erga, ò imagini eretta vna perpendicolare alla b a, & sia la s n, quale diuiderà l'angolo ottuso c s a, in due parti, ò angoli che sono l'n s a, retto, & l'n s c, & però esso ottuso sarà eguale à dette due sue parti, onde cosi all'ottuso c s a, come alli dui c s n, n s a, giunto comunemente l'angolo acuto c s b, la somma delli dui detti ottuso c s a, & acuto c s b, sarà eguale alla somma delli tre angoli c s b, c s n, n sa, ma alla somma delli medesimi tre angoli sono anco eguali li dui retti n s b, n s a, perche il solo retto n s b, è eguale alli dui c s b, c s n, onde cosi à questi dui come al solo retto n s b, giunto l'altro retto n s a, la somma delli dui retti n s b, n s a, sarà eguale alli tre detti c s b, c s n, n s a; perilche (per la prima Comune Concessione) li dui ottuso c s a, & acuto c s b, sono eguali alli dui retti, ò vogliamo dire sono eguali à dui retti come si voleua mostrare.

Naturalmente ancora si potria dire l'angolo ottuso c s a, supera vn retto n s a, nell'angolo c s n, & l'acuto c s b, è superato da vn retto n s b, nel medesimo angolo c s n; onde tanto è quello che manca all'acuto c s b, à douentar retto, quanto è quello che si hà da cauare dall'ottuso c s a, per douentare anc'egli retto, & perciò la somma d'essi ottuso c s a, & acuto c s b, è quanto la somma di dui retti.

Propositione 14. Theorema 7.

SE da vn punto d'vna data linea retta siano tirate due linee rette l'vna da vna banda, & l'altra da vn'altra banda, talmente che li dui angoli fatti dalle due tirate con la data siano retti, ouero eguali à dui retti, all hora di necessità le due rette tirate saranno congiunte insieme per il diritto, & douentaranno, ò saranno vna sola linea.

Dal punto r, della retta a r, siano tirate le due rette r c, da vna banda, & r t, dall'altra, & occorra la somma delli dui angoli fatti a r c, a r t, essere eguali à dui retti si dice le due r c, r t, essere congiunte insieme per il diritto, & douentare vna sola linea retta t c. Perche, se per l'Aduersario non fussero vna sola linea ne seguiria, che l'vna poniamo la t r, allungate dalla banda di r, non andasse sù l'altra r c, vnendosi con quella, ma passaria di sopra alla r c, fra essa r c, & la a r, ouero di sotto la r c, poniamo fino in s. All'hora essendo per l'Aduersario la t r s, vna sola linea retta cadendoui sopra la a r, li dui angoli, che si fariano a r t, a r s, sariano (per la antecedente tredici propositione) eguali à dui retti, ma ancora li dui angoli a r t, a r c, dal supposito sono eguali à dui retti, però (per la prima Comune Concessione) li dui a r t, a r s, dell'Aduersario sariano eguali alli dui a r t, a r c, nostri; per il che leuato comunemente l'angolo a r t, ne seguiria (per la terza Comune Concessione) che il rimanente angolo a r s, dell'Aduersario fusse eguale al rimanente angolo a r c, delli nostri, ma questo a r c, è parte dell'a r s, onde la parte saria eguale al tutto, ilche è impossibile, perilche impossibile è anco quello da che questa impossibilità si deduria, cioè che la retta t r, allungata dalla bāda di r, possa passare di sotto dalla r c, ne meno passarà di sopra fra r c, & r a, che se per l'Aduersario allungata essa t r, ella peruenisse in u, essendo per lui la t r u, vna sola linea retta, all'hora, perche sopra ad essa caderebbe la retta a r, la somma delli dui angoli a r t, a r u, da loro fatti sarebbe (per la 13. propositione) eguale à dui retti, & però eguale alli dui nostri a r t, a r c; (che anc'essi sono eguali à dui retti per il supposito) onde i dui dell'Aduersario sarebbono eguali alli dui nostri, perilche leuato comunemente l'angolo a t r, il restante a r u, dell'Aduersario sarebbe eguale al restante a r c, de' nostri; ma l'a r u, è parte dell'a r c; onde la parte sarebbe eguale al tutto, ma questo non può essere, & però manco può essere che la t r, allungata dall'r, passi di sopra dalla r c, ne manco può passare di sotto come s'è dimostrato, però di necessità ella andarà sù la r c, vnendosi con essa, & douentando seco vna sola linea retta, come si voleua dimostrare.

Questa 14. propositione è il conuerso della antecedente 13. perche in quella dalla vnità, ò rettitudine della linea a c b, sopra alla quale cade la c s, si proua la egualità delli dui angoli a c s, s c b, à dui retti. Et in questa dalla egualità d'essi dui angoli a c s, s c b, à dui retti, si viene à prouare la vnità, ò rettitudine della a c b.

Propositione 15. Theorema 8.

Li angoli contrapositi di due linee rette che si seghino fra loro sono eguali

l'vno

l'vno all'altro. Seghinsi le due rette a r, s t, nel punto c, si dice, che delli 4. angoli, che si fanno il r c a, è eguale allo à lui opposito, ò contraposito s c r, & l'a c s, al suo opposito r c t; Perche inteso la retta a c, cadere sù la s t, facendo li dui angoli a c t, a c s, la somma loro è eguale à dui retti (per la 13 propositione) & anco inteso la c t, cadere sù la r a, facendo li dui angoli r c t, a c t, la somma loro (per la istessa 13. propositione) sarà similmente eguale à dui retti, onde la somma delli dui a c s, a c t, è (per la prima Comune Concessione) eguale a la somma delli dui r c t, a c t, perilche leuando comunemente da ciascuna d'esse due somme l'angolo a c t, ne segue (per la terza comune concessione) che il restante angolo a c s, dell'vna, sia eguale al restante angolo r c t, dell'altra, che è l'angolo ad esso a c s, contraposito. Nel medesmo modo si mostrarà che anco l'angolo a c t, è eguale al suo cõtraposito r c s, perche cadendo la a c, sù la s t, la somma delli dui angoli a c t, a c s, è eguale à dui retti, & cadendo la s c, sù la r a, ancora la somma delli dui r c s, & a c s, è similmente eguale à dui retti, perilche l'vna somma è eguale all'altra, onde cauando da ciascuna l'angolo comune a c s, il restante angolo a c t, dell'vna, sara eguale al restante angolo r c s, dell'altra, à lui contraposito. Si poteua anco dire, cadendo la a c, sù la s t, la somma delli dui angoli a c t, a c s, è eguale à dui retti. Et cadendo la r c, sù la s t, istessa ancora la somma delli dui angoli r c s, r c t, è eguale à dui retti, & perciò l'vna sõma è eguale all'altra (eguagliandosi ambedue à cose eguali, ò vogliamo dire ad vna medesima cosa, cioè à dui angoli retti, che sono eguali à quali altri dui retti si voglino, essendo tutti gl'angoli retti eguali fra loro) onde da l'vna leuato l'angolo a c s, & dal-tra l'angolo r c t, già prouati essere eguali fra loro, ne segue che anco il restãte angolo a c t, dell'vna sia eguale al restante angolo r c s, dell'altra, ad esso a c t, contraposito, che è quanto si voleua mostrare.

Corollario.

DAlle cose dette si conosce, che quando due linee rette si segano insieme, la somma delli 4. angoli che elle formano essere eguale a' quattro angoli retti. Perche se la n r, sarà perpendicolare alla a b, ciascuno delli quattro angoli all's, sara retto (& però la somma loro è quanto quattro retti; ma se la c d, non sia perpendicolare alla a b, all'hora la somma delli dui c s a, ottuso, & c s b, acuto superiori sara eguale à dui retti, & similmente la somma delli dui b s d, ottuso, & a s d, acuto inferiori è eguale à dui retti, onde la somma di tutti li quattro angoli detti, cioè dui ottusi, & dui acuti è eguale à quattro angoli retti.

Si conosce anco che se da vn'istesso punto, & sia il c, si tiraranno quante linee si vogliono in diuerse parti di sopra, & di sotto, che tutti li angoli particolari, che si faranno farãno in somma eguali à 4. angoli retti, che essendo dal punto c, tirate le rette c a, c e, c r, c n, c o, c t. la sõma di tutti questi angoli si conosce essere eguale a' 4. retti. Perche tirata vna retta come si vogli, che passi per il punto c, & sia la b d, la somma di tutti li angoli superiori b c a, a c e, c c r, r c d, eguale a n, retti, (*che imaginata vna retta perpendicolare alla b d, dal punto c, dalla parte superiore, li dui angoli retti che si faranno verranno ad essere diuisi dalle rette superiori, che si partono dal punto c, in parti, quali aguagliando con la somma loro il suo tutto, verranno à constituire i dui retti*) Et similmente li angoli inferiori cioè di sotto dalla b d, gionte insieme fanno quanto dui retti, onde la somma delli superiori, & inferiori insieme, viene ad essere eguale à dui, & dui, cioè a quattro retti. Et cosi conosciamo, che tutto lo spatio che è interno al punto c, & però a qual si vogli punto è sempre eguale a quattro angoli retti, ò vogliamo dire importa, ò contiene tanto quanto quattro angoli retti.

Propositione 16. Theorema 9.

ESsendo allungato vn lato, qual si vogli d'alcun Triangolo, l'angolo esteriore, ò estrinsico, che si formarà sara maggiore di qual si vogli delli dui angoli intrinsici, ò esteriori oppositi d'esso Triangolo.

Del Triangolo a b c, allungato il lato b c. & sia in r, si forma con esso allungamento, & lato a c, a lui angolare l'angolo a c r, quale perche è fuori del Triangolo si chiama esteriore, ò estrinseco, & ciascuno delli tre angoli del Triãgolo si chiamano interiori, ò intrinseci, delli quali l'angolo

golo b c a, è contiguo, ò vogliamo dire compagno, ò congiunto all'estrinseco a c r, ma ciascuno delli altri dui angoli c b a, & c a b, si chiama opposito all'estrinseco a c r, hora di ciascuno di que sti dui angoli a, & b, cioè di qualsivogli d'essi, si vuol dimostrare esser maggiore l'angolo estrinseco a c r; Et cominciando dall'angolo a, seghisi, ò diuidasi per mezo il lato ac, che serue all'angolo a, & anco all'estrinseco a c r, & sia in n; & dall'angolo b, opposto nel Triangolo à questo lato c a, segato al punto n, si tiri la retta b n, & si allunghi fuori del Triangolo fino in d; talmente che l'allungamento n d; sia eguale alla b n; & dal punto d, all'angolo c, detto, si tiri la retta d c, & inre si i dui Triangoli n b a, n d c, sapremo che il primo lato n b, dell'vno, sara eguale al primo lato n d, dell'altro, il secondo n c, al secondo n a, (dalla construttione) & l'angolo b n a, contenuto dalli dui lati dell'vno è eguale all'angolo d n c, contenuto dalli dui lati dell'altro (per la antecedente 15. propositione) essendo essi contrapositi nelle due linee b d, a c, che si segano fra loro in n; perilche (per la quarta propositione) ancora gl'altri angoli dell'vno saranno eguali à gl'altri angoli dell'altro; & però l'angolo b a n, sara eguale al suo corispondente angolo d c n; ma questo d c n, è parte dell'estrinseco a c r, onde l'estrinseco sara maggiore d'esso d c n, & consequentemente sarà anco maggiore del b a n, Et per dimostrare che esso estrinseco a c r, è anco maggiore dell'altro angolo à b c, à lui opposto. Diuidasi il lato b c, che è l'allungato in due parti eguali, & sia in r, & ad esso punto t, dal punto à dell'angolo opposto a detto lato si tiri la retta a t, allungandola fuori del Triangolo altre tanto, quanto è essa a t, & sia in m, dal quale punto m, al c, si tiri la retta m c, allungandola anco alquanto a beneplacito dalla banda del c, & sia fino in o, (che questo allungamento c o, segarà l'angolo estrinseco a c r, cioè passarà fra le due rette a c, c r, (che sù la c a, non può andare, per che conuerria che m c a, fusse vna istessa retta tirata da m. ad a, ma anco da m, ad a, è tirata la retta a t m, onde queste due rette a t m, a c m, chiuderiano, fra loro superficie, il che è impossibile (che non può inchiudersi spatio alcuno fra due linee rette) ne meno per la istessa causa può essa m c, allungata passarà dentro della c a, cioè fra la c a, & t a, perche peruenendo alla t a, in alcun punto r, così la r c m, come la r t m, saria retta, & chiuderiano fra loro superficie, il che come s'è detto è impossibile) hora considerati, ò intesi i dui Triangoli a b t, m c t, sapremo che il primo lato m t, dell'vno, è eguale al primo lato a t, dell'altro, il secondo lato t b, al secondo t c, & l'angolo a t b, contenuto da detti dui lati dell'vno è eguale all'angolo m t c, contenuto dalli dui lati detti dell'altro (perche sono contrapositi delle due linee rette b c, m a, che si segano fra loro in t) onde per la quarta proprositione) ancora gl'altri angoli dell'vno saranno eguali, à gl'altri angoli dell'altro, & però l'angolo a b t, sarà eguale al suo corispondente m c t, ma à questo m c t, e anco eguale l'angolo o c r, perche sono contrapositi nelle due rette b r, m o, che si segano fra loro nel punto c, perilche (per la prima Comune Concessione) l'angolo a b r, sara eguale all'o c r, ma l'angolo estrinseco a c r, è maggiore di detto o c r, che è sua parte però sara anco maggiore dell'a b t, ò a b c, come si vogli dire. Onde è chiaro l'angolo esteriore a c r, essere maggiore dell'angolo a, & anco maggiore dell'angolo b, che sono i dui interiori oppositi nel Triangolo.

Propositione 17. Theorema 10.

IN ogni Triangolo presi dui delli suoi angoli, quali si vogliano, la somma loro è minore di dui retti.

Sia il Triangolo a c r, si dice che la somma di quali si voglino dui suoi angoli poniamo delli dui c, & r, è minore di dui retti. Per dimostrarlo, Allunghisi il lato comune ad ambidui essi angoli che hora è il c r, da vna banda, ò dall'altra come si vogli & sia dall'r, fino in n, che all'hora l'angolo a r n, estrinseco del Triangolo sarà maggiore dell'angolo c, (per la antecedente 16. propositione) che è vno delli dui instrinsici oppositi; onde così all'estrinseco, come all'intrinseco c, giunto comunemente l'angolo a r c; la somma d'esso con l'estrinseco a r n, sara maggiore della somma delli dui c, & a r c, ma quella, cioè la somma delli a r n, a r c, è quanto dui retti, cioè eguale à dui retti (per la 13. propositione) onde la somma delli dui c, & a r c, che è minore di quella, (cioè delli a r n, a r c) sarà ancora minore di dui retti. Et così si potrà dimostrare, se pigliareme

mo li dui angoli a, & r, ouero li dui a, & c, del Triangolo, che ciascuna d'esse somme è minore di dui retti, che è quanto si voleua mostrare.

Di qui si può dimostrare che da vn punto dato ad vna linea proposta (allungata quanto bisogna) non si può tirare più d'vna perpendicolare, (Che dall'a, alla g d, essendo, tirata la perpendicolare a n, nissun'altra retta, oltre à questa a n, potrà dall'a, ad essa g d, essere perpendicolare che se per l'Aduersario vn'altra retta poniamo a r, gli fusse perpendicolare, all'hora considerato il Triangolo a n r, in esso ciascuno delli dui angoli a n r, a r n, saria retto, & perciò la somma d'essi dui angoli saria quanto dui retti, il che è impossibile (essendosi dimostrato essa somma douere essere minore di dui retti) però anco è impossibile, che del medesimo punto alla istessa retta g d, si possa tirare più d'vna perpendicolare.

Si conosce anco, che quando in alcun Triangolo vno delli suoi tre angoli, sia retto, ouero ottuso, & chiamiamolo primo all'hora di necessità ciascuno de gl'altri dui angoli secondo, & terzo sarà acuto, perche douendo essere la somma del primo, & secondo minore di dui retti, se il primo sarà retto, ouero ottuso il restante secondo non potrà arriuare ad vn retto, & però sarà acuto; Et così douendo la somma del primo, & terzo essere minore di dui retti, essendo il primo retto, ouero ottuso; di necessità sarà il terzo minore di retto, & però acuto; Et così si conosce in ciascun Triangolo di necessità douere essere dui angoli acuti, che l'altro restante poi potrà essere, retto, ò ottuso, ouero acuto anc'egli.

Si dimostrà ancora, che se sopra ad vna retta proposta cadendo vna data non perpendicolarmente, ò vogliamo dire non per il diritto, ma pendendoli adosso da vna banda, & sia dalla destra & però da essa banda destra, facendo con la proposta angolo acuto (che l'altro angolo dall'altra banda sinistra sarà ottuso) se da alcun punto segnato nella data si tirarà vna perpendicolare alla proposta essa perpédicolare di necessità caderà sù la proposta dalla bāda dell'angolo acuto, che hora chiamiamo destra. Che cadendo la data A B, sù la C D, obliquamente, ò pendentemente, & però facendo l'angolo A B D, acuto; tirandosi da alcun punto segnato nella A B, & sia da l'A, vna perpendicolare alla C D, essa perpendicolare cadera dalla banda dell'angolo acuto, cioè dal B, verso D, perche dall'altra banda dell'angolo ottuso verso C, non può cadere, che per l'Aduersario si dicesse ella potere essere la A C, all'hora considerato il Triangolo A C B, in eso l'angolo A B C, saria ottuso, & l'A C B, retto, & perciò la somma d'essi dui angoli saria più di dui retti, il che è impossibile, onde impossibile è anco, chè la perpendicolare alla C D, dall'A, cada dalla banda dell'angolo ottuso A B C, però resta che cada dalla banda dell'acuto A B D, come si voleua mostrare.

Di qui si può ancora dimostrare che da vn punto dato da vna retta proposta non si possono tirare più di due linee rette che siano eguali fra loro, che se dal punto A, alla B C, si potessero tirare, ò arriuare più di due linee rette eguali fra loro, sia che si dicesse che fussero eguali fra loro le tre A B, A C, A D, che così nel Triangolo Equicrure A B D, l'angolo A B D, saria eguale all'A D B, Et similmente nel Triangolo Equicrure A D C, l'angolo A D C, saria eguale all'A C D. Et ancora nel Triangolo Equicr. A B C, l'angolo A B C, saria eguale all'A C B, onde li dui angoli B, & C, & li dui al D, (A B D, A D C) sariano eguali fra loro, ma essendo li dui al D, eguali fra loro, ciascuno d'essi saria retto, & retto per ciò anco ciascuno delli dui B, & C, per il che ciascuno delli dui angoli alla base di ciascuno delli tre Triangoli A B D, A D C, A B C, saria retto, & la somma loro eguale à dui retti, il che è impossibile, douendo li dui angoli di qual si vogli Triangolo gionti insieme far sempre somma minore di dui retti.

Propositione 18. Theorema 11.

IN ogni Triangolo di lati ineguali l'angolo che li oppone à lato più lungo è maggiore dell'angolo, che si oppone à lato più corto.

Nel Triangolo a c i, sia il lato i c, più lungo del lato i a, si dice che l'angolo a, opposto al lato i c, sarà più grande dell'angolo c; opposto el lato i a; Per dimostrarlo. Dal lato i c, più lungo seghisene vna parte eguale all'i a, più corto, cominciando dal termine i, comune, & sia i r, eguale ad i a, & dall'a, all'r, si tiri la retta a r, intendendola base del Triangolo Equicrure r a i, che perciò i dui angoli sopra alla base, ò vogliamo dire opposti alli dui lati eguali i a, i r, cioè li dui

angoli i a r, i r a, saranno eguali fra loro, ma di questi l'vno i r a è estrinseco del Triangolo a c r, che hà il lato c r, allungato in i, & però è maggiore dell'angolo c, vno delli dui intrinsici oppostili d'esso Triangolo a c r, però anco l'altro angolo i a r, sara maggiore del medesimo angolo c; onde ancora l'angolo i a c, che contiene in se l'i a r, & però è maggiore d'esso i a r; sara tanto maggiormente maggiore del medesmo angolo c, che è quello che si voleua mostrare. Et essendo il lato i c, maggiore ancora del lato c a, si potrà mostrare pure nel medesimo modo che l'angolo i a c, opposto al lato i c, è anco maggiore dell'angolo i, opposto al lato c a; Che similmente dal lato c i, segata vna parte eguale al c a, cominciando dal punto c, à loro comune, & sia c s, eguale à c a, & tirata la retta a s, intendendola base del Triangolo Equicrure a c s, sapremo che l'angolo c a s, è eguale al c s a; (ambedui sopra alla base) ma il c s a, estrinseco del Triangolo a i s, del lato i s, allongato in c, è maggiore dell'angolo i; che è vno delli dui angoli intrinsici oppostoli d'esso Triangolo a i s, perilche ancora l'angolo c a s, & però poi tanto maggiormente l'angolo totale c a i, sarà maggiore del medesimo angolo i, come si voleua prouare.

Et se il lato i a, (che è minore dell'i c,) fusse maggiore, ò più lungo dell'a c, ancora l'angolo a c i, opposto al più lungo a i, saria maggiore dell'angolo i, opposto al corto a c; il che si potrà dimostrare come s'è detto, segando dall'a i, più lungo la parte a t, eguale all'a c, certo cominciando dal punto a, comune ad essi dui lati, & intesa tirata la retta c t, presa per base del Triangolo Equicrure a c t, sapremo in esso l'angolo a c t, essere eguale all'a t c, ma questo a t c, estrinseco del Triangolo c i t, del lato i t, allungato in a, è maggiore dell'angolo i, vno delli dui intrinsici oppostoli in esso Triangolo, però ancora l'altro angolo a c t, sara maggiore del medesimo i, onde tanto più l'angolo a c i, maggiore dell'a c t, sua parte, sara maggiore dell'istesso angolo i, che è il proposito.

Corollario.

DI qui si manifesta, che nel Triangolo diuersilatero i suoi tre angoli sono fra loro ineguali, & che d'essi maggiore è quello che è opposto, ò all'incontro del lato più lungo, minore è quello, che è opposto al lato più corto, & mezzano è quello che è opposto al lato mezzano.

Propositione 19. Theorema 12.

IN ogni Triangolo d'angoli ineguali il lato, che si oppone ad angolo più grande è più lungo del lato, che si oppone ad angolo più piccolo.

Sia nel Triangolo a c i, che l'angolo a, sia più grande del c, si dice che il lato c i, opposto all'a, sara anco più lungo del lato a i, opposto al c, Perche se per l'Aduersario il lato c i, non fusse più lũgo dell'a i, gli saria eguale, ò minore, eguale nõ gli può essere perche all'hora (per la 5. propositione) ancora l'angolo a, saria eguale al c, & non maggiore come si propone. Ne meno può esso lato c i, essere minore dell'a i, perche all'hora (per la antecedennte propositione) ancora l'angolo a, opposto al lato c i, conuerria che fusse minore dell'a i, opposto all'angolo c, il che è tanto maggiormente contro à quello che si propone, cioè che il lato i c, sia maggiore, & non eguale, ò minore al lato i a; onde non potendo il lato i a, essere ne eguale, ne minore all'a i, gli sara maggiore come si voleua prouare. Et se l'angolo a, sia maggiore ancora dell'angolo i, pure si prouarà nel medesmo modo il lato c i, opposto all'a, essere maggiore, ò più lungo del lato a c, opposto all'angolo i, Et se l'angolo c, sia maggiore dell'angolo i, pure nel medesmo modo si prouarà che il lato a i, opposto all'angolo c, sia maggiore, ò più lungo del lato a c, opposto all'angolo i.

Questa Propositione è il conuerso della antecedente 18. perche in questa 19. dalla grandezza de gl'angoli cognita, si viene à mostrare la lunghezza de' lati; Et nella 18. dalla lunghezza de' lati cognita si viene à mostrare la grandezza de gl'angoli.

Questa istessa 19. Prouositione è dimostrata da Proclo (come recita il Molto R. P. Clauio) con dimostratione affirmatiua, con il mezo nondimeno della seguente Propositione.

Se in vn Triangolo segando alcuno delli suoi angoli in due parti eguali, con vna linea retta, che arriui alla oppostali base, ella sia segata in due parti ineguali; è necessario che li dui lati continenti detto angolo diuiso siano ineguali, & più lungo sara quello, che è dalla banda della

parte

parte più lunga, della base, & minore quello, che è dalla banda della parte minore della base.

Nel Triangolo A B C, sia l'angolo A, diuiso in due parti eguali dalla retta A D, & sia che ella diuida la base B C, opposta ad esso angolo A, in due parti ineguali, & sia D C, la parte maggiore, & D B, la minore, si dice che ancora i dui lati A C, & A B, continenti detto angolo A, sono inegnali, & che l'A C, quale è dalla banda della parte C D, maggiore della base è più lungo dell'A B, Dimostratione. Allunghisi la segante A D, fino in E, talmente che D E, sia eguale ad essa D A, & dalla parte D C, più lunga della base cominciando dal D, si seghi la D F, eguale alla parte minore D B, & dall'E, & l'F, si tiri la retta E F, allungandola fino che seghi il lato A C, & sia in G, & intesi i dui Triangoli A D B, E D F, perche i dui lati A B, D B, dell'vno (dalla construttione) sono equali alli dui lati E D, D F, dell'altro, & l'angolo A D B, contenuto dalli dui lati dell'vno, è eguale all'angolo E D F, contenuto dalli dui lati dell'altro (per la 15. propositione) essendo essi contrapositi delle due rette A E, D F, che si segano fra loro in D, ne segue (per la quarta propositione) che anco all'angolo B A D, dell'vno sia eguale l'angolo F E D, dell'altro (ma al medesimo angolo B A D, è anco eguale l'angolo C A D, (dal supposito dell'esser diuiso l'angolo totale B A C, in due parti eguali dalla A D) però l'angolo C A D, sarà eguale all'angolo F E D,) & il restante lato, ò base A B, sarà eguale al restante lato, ò base E F, Et considerato il Triangolo A E G, & inteso base la A E, perche li dui angoli G A E, G E A; sopra ad essa base sono eguali frà loro (come s'è mostrato) ne segue (per la quinta propositione) che ancora i suoi dui lati G E, G A, ad essi angoli contrapositi siano eguali l'vno all'altro, ma la retta A C, è maggiore della A G, sua parte, però sara anco maggiore della G E, & consequentemente sara tanto più maggiore della F E, parte della G E, & però sarà anco essa A C, maggiore della A B, mostrata essere eguale à detta F E, cioè il lato A C, del Triangolo A B C, è maggiore del lato A B, come si voleua mostrare.

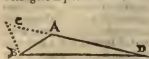
Questo concluso si dimostrarà la 19. propositione dicendo. Nel Triangolo a c i, sia l'angolo a, maggiore del c, si dice, che il lato c i, opposto all'a, è similmente maggiore del lato a i, opposto al c, Per dimostrarlo. Diuidasi la retta a c, sopra alla quale sono constituiti essi dui angoli (ò vogliamo dire che comunemente serue à questi dui angoli) per mezo in r, & questo r, dall'angolo oppostoli i, si tiri la retta i r, & si allunghi altretanto fuori del Triãgolo, & sia in n, dal quale n, all'a, (angolo maggiore delli dui a, & c, intesi nel Triangolo proposto) si tiri la retta n a, hora considerati i dui Triangoli a r n, c r i, perche i dui lati a r, r n, dell'vno con l'angolo r, da loro contenuto, sono eguali alli dui lati c r, r i, con l'angolo r, da loro contenuto ne segue (per la quarta propositione) che ancora la base a n, dell'vno sia eguale alla base c i, dell'altro, & l'angolo r a n, dell'vno, all'angolo à lui corrispondente r c i, dell'altro (che ciascun d'essi è contenuto dalla base, & lato più corto) & perche l'angolo c, si pone essere minore dall'angolo c a i, ancora l'angolo r a n, sarà minore del medesimo angolo c a i, per il che l'angolo n a i, viene ad essere diuiso dalla retta a r c, in due parti ineguali, onde diuidendosi in due parti eguali con la retta a t, ella passarà fra le due a r, a i, contenuti l'angolo r a i, che è maggiore della mità del totale angolo n a e; hora, perche la retta n t, è maggiore della sua parte n r, ella sarà anco maggiore della r i, (alla n r, eguale) & però tanto maggiormente essa n t, sarà maggiore della r i, parte della r i, Onde nel Triangolo n a i, nel quale l'angolo a, è diuiso per mezo dalla retta a t, ella sega la sua base in parti ineguali in t, essendo la n t, la parte maggiore, ne segue (per la disopra mostrata propositione) che anco i dui lati d'esso Triangolo siano ineguali, & che più lungo sia quello che è dalla banda, ò conterminale alla parte più lunga della base; è dunque il lato n a, maggiore dal lato a i, onde anco c i, (eguale alla n a,) sara similmente maggiore del medesimo a i, perilche è chiaro, che nel Triangolo a c i, essendo l'angolo c a i, maggiore dell'angolo c, ancora il lato c i, opposto all'angolo c a i, maggiore, è anc egli maggiore, ò più lungo del lato a i, che si oppone all'angolo c, minore.

Propositione 20. Theorema 13.

IN ogni Triangolo la somma, ò composto di quali dui suoi lati si voglino è più lunga, ò maggiore del restante lato d'esso Triangolo.

Nel Triangolo a b d, presi dui lati qual si voglino poniamo a b, a d, si dice che il composto, ò somma loro è maggiore del restante lato b d. Per dimostrarlo. Allunghisi vno de' dui lati detti

dalla

dalla banda del punto a, termine loro comune, fin che l'allungamento sia eguale all'altro lato, & sia che si allunghi d a, in c, facendo a e, eguale ad a b, che cosi tirata la e b, & inteso base del Triangolo Equicrure c a b, i dui angoli c, & a b c, (per la quinta propositione) saranno eguali fra loro, ma l'angolo c b d, è maggiore dell'vno c b a, sua par te, però sarà anco maggiore dell'altro c, onde inteso il Triangolo d c b, perche in esso l'angolo c b d, è maggiore del c, (ò vogliamo dire b c d) ancora (per la 19. propositione) il lato c d, che s'oppone all'angolo b, maggiore, è più lungo del lato b d, che s'oppone all'angolo c, minore; ma li dui lati b a, a d, del Triangolo b a d, gionti insieme sono eguali alla retta d c; (dalla construttione) però ancora la somma d'essi dui lati b a, a d, è maggiore del lato b d, restante in esso Triangolo a b d, che è quello, che si voleua mostrare.

Questa Propositione dice Proclo essere dimostrata dalli familiari di Herone nel modo segu.

Nel Triangolo a b d, presi dui lati quali si voglino poniamo a b, & a d, si dice la somma loro essere più lunga che il restante lato b d; Per dimostrarlo. Diuidasi l'angolo a, contenuto dalli dui lati detti, in due parti eguali, con la retta a c, che arriui alla base b d, & inteso il Triangolo a c d, & il suo lato d c, allungato in b, ne segue (per la 16. propositione) che l'angolo a c b, estrinseco sia maggiore dell'angolo c a d, vno de gl'intrinsici oppostili, per il che esso angolo a c b, sarà ancor maggiore dell'angolo c a b, (al c a d, eguale) onde nel Triangolo a b c, perche l'angolo b c a, è maggiore dell'angolo c a b, ancora (per la 19. propositione) il lato a b, opposto all'angolo maggiore, sarà più lungo del lato b c, opposto all'angolo minore. Ancora considerato il Triangolo a b c, del lato b c, allungato in d, ne segue che l'angolo a c d, esteriore sia maggiore del c a b, interiore oppostoli, mità dell'angolo b a d, totale, per il che l'istesso angolo a c d, sarà anco maggiore dell'angolo c a d, che è l'altra mità del totale angolo b a d, onde inteso il Triangolo c a d, perche in esso l'angolo a c d, è maggiore del c a d, ancora il lato a d, opposto all'angolo a c d, maggiore, sarà più lungo del lato c d, opposto all'angolo c a d, minore, perchè dunque delli dui lati a b, a d, l'a b, è maggiore della parte b c, à lui conterminale della base b d, & l'altro lato a d, è maggiore dell'altra parte d c, à lui conterminale della base b d, ne segua; che il composto di a b, & a d, sia maggiore del composto di b c, & c d, cioè che la somma delli dui lati a b, a d, del Triangolo a b d, sia più lunga, che il restante lato b d, come si voleua mostrare.

Questa Propositione alcuni dicono essere superfluo il dimostrarla, perche ogn'vno sà che à partirsi dal punto b, per andare al d, più corta è la via diritta b d, che l'andare da b, ad a, & da a, poi al d, essendo massime (per la sua Diffinitione) la linea retta la più breue che si possa tirare da vn punto à vn'altro; nondimeno si dice che non essendo questa notitia vniuersale dedutta da cognitione Scientifica, officio del Geometra è dimostrarne la causa ne cessaria come si è fatto di sopra, Come anco se bene ogn'vno sensibilmente conosce che il fuoco scalda, nondimeno (quando si potesse) appartenirìa alla Scienza mostrare in che modo, & perche scaldi.

Propositione 21. Theorema. 14.

SE dalli dui termini d'alcun lato del Triangolo si tirino due rette che si congiungano insieme, ò vogliamo dire faccino angolo dentro al Triangolo, la somma d'esse due linee sarà minore della somma delli dui restanti lati del Triangolo, ma l'angolo da esse contenuto sarà maggiore dell'angolo contenuto da detti dui restanti lati.

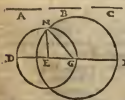
Dalli dui termini b, & d, del lato b d, del Triangolo a b d, siano tirate le due rette b c, d c, che si congiungano, ò concorrano insieme dentro al Triangolo facendo l'angolo b c d, si dice, che la somma d'esse due b c, c d, interiori è minore della somma delli dui restanti lati b a, a d, del Triangolo, & che l'angolo b c d, fatto da esse linee è maggiore dell'angolo a, delli dui lati del Triangolo. Per dimostrarlo. Allunghisi vna delle due linee b c, d c, poniamo la d c, per il punto loro angolare c, fino al lato oppostoli a b, del Triangolo, & sia in r, & considerato il Triangolo a r d, sapremo (per la antecedente 20. propositione) che la somma delli suoi dui lati d a, a r, è più lunga, ò maggiore del solo restante loro r d, onde cosi alli dui a d, a r, come al solo d r, gionto comunemente la retta r b, la prima sõma delle d a, a r, r b, cioè delli lati d a, a b, del Triangolo proposto, sara maggiore della seconda som-

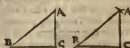
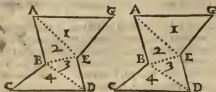
somma delle due d r, r b, che chiamaremo linee di mezo. Ancora considerato il Triangolo b r c, la somma de dui suoi lati b r, r c, è maggiore del solo restante lato b c; onde cosi alli dui b r, r c, come al solo b c, giunto comunemente la retta e d, la prima somma delle b r, r e, e d, che è il contenuto delle linee di mezo, sarà maggiore della seconda somma delle due b c, e d, che sono le linee interne; perche dunque, la somma delli dui lati detti b a, a d, del Triangolo proposto è maggiore delle due linee b r, r d, di mezo, & la somma di queste b r, r d, è maggiore della somma delle due linee interne b c, e d, si conosce che perciò tanto maggiormente la somma delli dui lati b a, a d, del Triangolo è maggiore della somma delle due linee rette interne b c, e d; Che mò l'angolo e, fatto da esse rette interne sia maggiore dell'angolo a, delli dui lati b a, a d, del Triangolo si dimostrarà cosi. Inteso il Triangolo b r c, che hà il lato r c, allungato in d, ne segue (per la 16. propositione) che l'angolo b e d, esteriore sia maggiore del b r c, che è vno delli dui interni oppostili, ma questo angolo b r, (per che è esteriore del Triangolo d a r, che hà il lato a r, allungato i b, viene ad essere maggiore dell'angolo a, che è vno delli dui interiori oppostoli, per il che tanto maggiormente l'angolo b e d, (che è maggiore del b r c,) sarà maggiore dell'angolo a, però è chiaro quello che si voleua dimostrare.

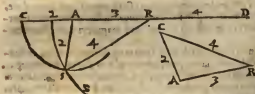
Di qui si conosce che essendo la retta b d, base del Triangolo b a d, la distanza di due forti muraglie, ò larghezza d'vn fiume, facendo vna volta dall'vna muraglia all'altra sostentata dalli Traui b a, a d, congiunti insieme in a, ò vn ponte simile fra le due ripe, non è possibile, che la cima angolare a, si abassi cadendo in terra, ò nel fiume (essendo però l'armamento delle b a, d a, tale che non si spezzi) cosi come non è possibile che le rette b a, d a, si ascortino come di necessità auuerria se la cima a, si dicesse peruenire più bassa poniamo in c, Onde perche vi è solo pericolo, ò dubio che la Terra, ò ripe quanto al fiume, ò le muraglie spingendo in dentro li estremi b, & d, fussero ascortare la distanza b d, & per ciò spingere anco in sù l'angolare cima a, ò aprirla con pericolo di ruina; perciò si aggraua di molto peso la cima della Volta, ò Ponte, acciò cosi si venga à fare resistenza al dubio che potria hauersi del ristringimento della distanza à b.

Propositione 22. Theorema 15.

SI può formare vn Triangolo i tre lati del quale ad vno ad vno, siano eguali à tre linee date, tali però che la somma di quali due di loro si vogliono sia maggiore della restante terza. Perche i dui lati quali si voglino di ciascun Triangolo sono di necessità maggiori del restante terzo lato.

Date le tre rette a b c, tali che due quali si voglino di loro siano maggiori della terza restante, per formare vn Triangolo i tre lati del quale siano eguali ad vno ad vno alle tre rette date, Noi tirata in margine vna linea retta, da essa segaremo la parte d e, eguale ad vna delle date, & sia eguale alla a, & poi seguendo ne segaremo, ò segnatemo la e g, eguale à vna dell'altre date, & sia eguale alla b, & poi la g i, eguale all'altra c, hora fatto centro il punto e, secondo l'interuallo della estrema e d, descriueremo la circonferenza d'vn Cerchio, & fatto centro il punto g, secondo l'interuallo della estrema g i, descriueremo la circonferenza d'vn'altro Cerchio, che segarà la prima circonferensia in n, & o, & di questi preso quale ci venga comodo, & sia l'n, da esso alli centri e, & g, tiraremo le due rette n e, n g, che elle insieme con la e g, formaranno il Triãgolo n e g, li tre lati del quale sarãno ad vno ad vno eguali alle tre linee a b c, date, perche il lato e n, è eguale alla e d, che vãno da vn medesmo centro e, alla circonferenza del suo istesso cerchio, & ad essa medesma e d, è anco eguale la a, (essendosi fatta la d e, eguale alla a) però alla a, è eguale la n e; la e g, è eguale alla b, che cosi si è fatta; & la g n, è eguale alla g i, che sono semidiametri d'vn'istesso cerchio) alla quale g i, è anco eguale la c, delle date, onde ad essa e, è eguale la g n, & cosi essendo il lato e n, eguale alla a, l'e g, alla b, & il g n, alla c, si è fatto il Triangolo n e g, i tre lati del quale ad vno ad vno sono eguali alle tre linee date come si voleua fare.

La Pratica, Presa vna delle tre linee date per base, & sia la b, fatto centro vna delle due estremità d'essa, con l'interuallo d'vna dell'altre, & sia la a, si descriua vn pezzo d'arco dalla banda doue si vuole, che sia la cima, ò sommità del Triangolo; pòi fatto centro l'altra estremità della presa per base, con l'interuallo della restante vltima delle tre date, si descriua vn'altro pezzo d'arco, & da doue egli si intersegarà con l'altro pezzo d'arco già fatto à ciascuna delle due estremità della base si tiri vna linea retta,

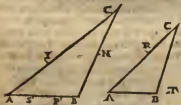
che elle insieme con la base detta formaranno vn Triangolo i 3. lati del quale ad vno ad vno saranno eguali alle tre rette date loro corrispondenti. Mediante questa Propositione, ò Problema, si può copiare vn Triangolo dato, Che essendo egli,

poniamo l'a b c, per copiarlo, posto in margine doue si vuole la retta B C, eguale ai'a b c, del dato, & fatto centro il punto B, & con l'interuallo ò apertura eguale alla b a, fatto vn pezzo d'arco basteuole dalla banda doue si vuole la sommità, ò cima del Triangolo, & anco fatto centro il punto C, & con interuallo eguale alla c a, segnato vn'altro pezzo d'arco che seghi il primo, ouero notato vn punto in esso primo, & sia l'A, & di li dui estremi B, & C, tirate le due rette A B, A C, elle con la B C, formaranno il Triangolo A B C, che sara la Copia del dato a b c. Si potrà anco nel medesmo modo copiare qual si vogli figura rettilinea data, diuidendola à beneplacito in Triangoli, & venirli copiando ad vno ad vno, l'vno dopò l'altro per il medesimo verso, ò vogliamo dire alla similitudine di quelli nelli quali si sara diuisa la figura data, che cosi ne formaremo la Copia totale, come per esempio si vide in margine doue la data figura a b c d e g, intesa diuisa in quattro Triangoli, essi copiati ad vno ad vno se ne forma la figura A B C D E G, che è la Copia della data.

Propositione 23. Problema 9.

DA vn punto proposto in vna linea retta data si può tirare vna linea retta, quale con la data facci vn'angolo eguale ad vn'angolo rettilineo assegnato.

Sia proposto il punto A, nella retta A D, dal quale si vogli tirare vna linea, che cō essa A D, facci angolo eguale all'angolo c a r, assegnato. Per farlo, Segnisi vn punto à beneplacito in ciascuna de le due rette, che formano l'angolo a, & siano c, & r, & intesa la retta c r, tirata dall'vn punto c, all'altro r, si intenda anco il Triangolo c a r, hora con tre rette eguali alle tre, a c, a r, r c, che formano questo Triangolo si facci vn Triangolo, che habbi l'angolo, che si formarà in A, dalla retta data, & dalla da tiraruisi, eguale all'angolo assegnato a; che sara ponendo da vna banda del punto A, vna retta eguale ad vna delle due che contengono l'angolo a; & sia la A C, eguale alla a c; & dall'altra banda del punto A, vn'altra retta eguale all'altra a r; che con la a c, contiene l'angolo a, & sia la A R; poi oltre al punto C, se vorremo far l'angolo dalla banda del C, ouero oltre all'R, se vorremo fare l'angolo dalla banda dell'R, hor poniamo dall'R, si segni la R D, eguale alla transuersale c r, opposta all'angolo a, poi preso per centro R, & distanza, ò interuallo, ò sia apertura di compasso, per semidiametro la retta R D, si descriua vn cerchio, ò vogliamo dire la circonferenza d'vn Cerchio, & anco preso per centro il punto A, con l'interuallo del la A C, si descriua vn'altro Cerchio, & si segni S, in vna delle due interségationi qual ci piaccia (ò verso doue vogliamo fare l'angolo) d'essi Cerchi, & ad esso S, dall'A, proposto si tiri la retta A S, che ella con la retta A D, formarà l'angolo S A R, che sarà eguale all'assegnato angolo a; Perche. Imaginato tirata dall'S, all'R, la retta S R, & intesi li dui Triangoli S A R, c a r; il primo lato A S, dell'vno, sarà eguale al primo lato a c, dell'altro, (che ciascun d'essi è eguale alla retta A C, Ancora il lato A R, dell'vno è eguale al lato a r, dell'altro (dalla Construttione) & il lato R S, dell'vno è eguale al lato r c, dell'altro, perche ciascun d'essi è eguale alla R D, onde essendo i tre lati dell'vn Triangolo eguali alli tre lati dell'altro ne segue (per la ottaua propositione (che gl'angoli dell'vno siano eguali à gl'angoli à loro corispondenti dell'altro, & però l'angolo R A S, formato sarà eguale all'angolo r a c, assegnato come si voleua fare.

In Pratica, Volendo dal punto A, della retta A D, tirare vna linea che con essa A D, facci

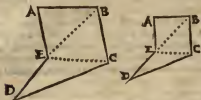
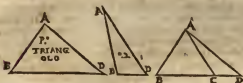
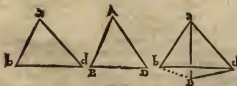
angolo eguale all'angolo a, assegnato, noi fatto centro il punto a. angolare assegnato, con qual si vogli apertura di compasso, segnaremo li dui punti c, & n, nelle due linee, che contengono l'angolo a, & con la istessa apertura fatto centro il punto A, proposto segnaremmo vna circonferenza di Cerchio, poi presa la distanza c n, opposta all'angolo a, assegnato, & posto vn piede del Compasso in C, segnaremo doue l'altro piede del Compasso arriui alla circonferenza del Cerchio fatto, ò sia dall'vna banda in O, ò dall'altra in N. & da vno di questi punti, poniamo dall'N, all'A, tiraremo la retta N A, che ella con la A C, formarà l'angolo N A C, che sarà eguale all'angolo a, assegnato, Perche, Considerati i dui Triangoli imaginati n c a, N C A, i dui lati, & base dell'vno, sono eguali alli dui lati, & base dell'altro, perilche (per la ottaua propositione) l'angolo A, opposto alla base C N, dell'vno, sarà eguale all'angolo a, opposto alla base dell'altro.

Di qui si manifesta il modo di fare vn Triangolo sopra ad vna base data, equiangolo ad vn Triangolo proposto, cioè che habbi i suoi tre angoli ad vno ad vno eguali alli tre angoli del proposto.

Sia proposto il Triangolo A B C, di base A B, & sopra alla data base a b, occorra formare vn Triangolo, che habbi i suoi tre angoli ad vno ad vno eguali alli à loro corispondenti tre angoli del Triangolo A B C, proposto, Per farlo Conuiene dal termine a, finistro della base data tirare vna linea retta che con essa base facci vn'angolo eguale all'angolo A, finistro che gli è corispondente nel Triangolo proposto, contenuto dalla base A B, & lato finistro A C, il che si fa ponendo vn piede del Compasso nel punto A, & con apertura à beneplacito segnare li dui punti i, & p, sul lato finistro A C, & base A B, & con la istessa apertura posto poi vn piede del compasso nel punto a, segnare vn pezzo d'arco (dalla banda superiore, ò inferiore alla a b, data, secondo che ò di sopra, ò disotto si vogli fare il Triangolo, hor sia di sopra) che seghi la a b, allungata, ò intesa allungata se bisogni come hora che il segamento sarà nell'allungamento in punto t, poi nel Triangolo proposto presa la distanza p i, fra li dui punti segnati nella base A B, & lato finistro A C, portarla dal punto t, verso la banda finistra sù l'arco fatto con il centro a, cioè posto vn piede del compasso in t, vedere doue l'altro piede arriui à segare l'arco fatto con il centro a, & apertura A p, (ò vogliamo dire a t,) & sia che lo seghi in r, al quale r, dell'a, si tiri la retta a r, che all'hora l'angolo r a b, sarà eguale all'A, (perche considerati i dui Triangoli i A p, & r a t, li tre lati dell'vno per ordine sono eguali alli tre lati dell'altro, & però (per la ottaua propositione) gl'angoli dell'vno per ordine sono eguali à gl'angoli dell'altro) Ancora dal termine b, destro della base a b, si tiri vna retta che con essa base b a, dalla detta parte superiore facci vn'angolo eguale all'angolo B, destro del Triaugolo proposto, & si farà nel modo istesso sopradetto, cioè posto vn piede del Gompasso nel punto B, con quale apertura si vogli si segnino nella base B A, & lato destro B C, li dui punti s, & n, egualmente dal B, & con la istessa apertura posto vn piede del Compasso nel punto b, destro termine della data a b, l'altro si giri formando vn pezzo d'arco dalla parte superiore che seghi anco la base b a, (ò suo allungamento occorrendo) & sia che la seghi nel punto a, cioè che arriui al punto a, il che auuerrà hauendo presa apertura di compasso eguale ad essa b a, poi presa la distanza s n, ella cominciando dall'a, detto, cioè posto vn piede del Compasso in n, si veda doue l'altro vada à segare l'arco fatto con il centro b, (*auuertendo di fare essi archi grandi à bastanza accioche possino essere segati doue occorre*) & sia in o, al quale o, dal b, si tiri la retta b o, che ella con la b a, farà l'angolo o b a, eguale all'angolo B, Hora questa b a, destra, & la a r, finistra si allunghino verso o, & r, finche si seghino, ò congiunghino insieme (*se già prima nell'hauere tirate le a r, & b o, elle non si siano segate insieme*) & sia in c, che all'hora il Triangolo c a b, farà equiangolo al C A B, proposto; perche l'angolo a, farà eguale all'A, il b, al B, dalla construttione, cioè per le operationi fatte, & perciò il restante c, al restante C, che essi c, & C, sono il restante di dui retti, alli quali dui retti, cosi li tre a b c, come li tre A B C, sono eguali, il che si dimostrarà Geometricamente nella 32. propositione.

Ancora potremo sopra ad vna data linea, ò base formare vna figura, ò superficie rettilinea equiangola ad vna superficie rettilinea proposta di base assegnata. Che diuisa la superficie propo-

proposta in Triangoli come si vogli, & ad essi ad vno ad vno cominciando dalle base data, & assegnata, fatti li Equiangoli nel modo mostrato, & come per esempio si vede in margine doue sù la data base a b, si è fatta la superficie a b e d e, formando in essa di mano in mano li Triangoli a b e, b e c; & e e d, equiangoli per ordine alli loro corispondenti A B E, B E C, & C E D, dall'hora questa superficie a b e d e, cosi formata sarà equiangola alla proposta A B C D E.

Propositione 24. Theorema 15

Di Dui TRIANgoli, essendo il primo lato dell'vno eguale al primo lato dell'altro, & il secondo al secondo, ma l'angolo contenuto dalli dui lati dell'vno maggiore dell'angolo contenuto dalli dui lati dell'altro; all'hora ancora la base dell'vno sarà maggiore della base dell'altro.

Siano li dui Triangoli a b d, primo, & ABD, secondo tali, che il primo lato a b, dell'vno sia eguale al primo lato A B, dell'altro, & il secondo lato a d, dell'vno al secondo lato A D, dell'altro, ma l'angolo a, contenuto dalli dui lati dell'vno sia maggiore dell'angolo A, contenuto dalli dui lati dell'altro, si dice che la base b d, dell'vno, sarà maggiore della base B D, dell'altro. Per dimostrarlo. Dall'angolo a, maggiore seghisene vna parte eguale all'A, minore, cominciando dal lato a b, ouero dall'a d, come si vogli, hor sia che si cominci dall'a d, cioè dal punto a, si tiri vna retta, che con la a d, facci vn'angolo eguale all'angolo A; questa retta passarà fra a d, & a b, douendo fare con la a d, angolo minore dell'a qual retta sia la a B, & si facci eguale alla A B, (ouero a b) come anco la A D, è eguale alla a d, & si tiri la retta B d, che sarà eguale alla B D, (per la quarta propositione) & cosi haueremo trasportato il Triangolo B A D, sul Triangolo b a d, che haueranno il lato a d, comune, & la a B, sarà frà li lati a d, a b, del Triangolo a b d, Hora, ò il lato a B, segarà la base b d, del Triangolo a b d, restando il punto B, fuori del Triangolo a b d, ò che esso lato A B, restarà tutto dentro del Triangolo a b d, & cosi anco perciò l'estremo B, sarà pure dentro al Triangolo a b d; Ouero che il lato A B, arriuarà precise su la base a d, & perciò il punto B, sarà nella base b d, il che occorrendo (essendo la forma delli Triangoli tale) perche in tal caso la base B d, ò B D, è parte della base b d, è chiaro, che (per essere ciascun tutto maggiore di qualsiuogli sua parte) la base b d, sarà maggiore della base B D, Ma se il lato A B, segarà la base b d, restando il punto B, & la base B D, tutta fuori del Triangolo a b d, all'hora, tirata, ò, imaginata la retta b B, & presa per base del Triangolo a b B, Equicrure, che il lato a b, dal supposito è eguale al lato A B) ancora (per la quinta propositione) l'angolo a b B, sarà eguale all'a B b, ma l'a b B, è maggiore del d b B, sua parte, però anco l'a B b, (parte del d B b,) sarà maggiore del medesimo d b B, onde tanto maggiormente il d B b, maggiore dell'a B b, sarà maggiore del d b B, per il che considerato il Triangolo b B d, nel quale si e dimostrato l'angolo d B b, esser maggiore del d b B, ne segue (per la 19 propositione) che il lato b d, opposto all'angolo d B b più amplo, sia anco più lungo del lato B d, opposto all'angolo d b B, più stretto, ò minore, cioè che la base b d, del primo nostro Triangolo sia più lunga della base B D, del secondo Triangolo, come si voleua mostrare. Et essendo li dui Triangoli proposti tali, che il lato A B, del secondo resti tutto dentro del primo a b d, & cosi anco perciò il punto, ò estremo B, & la base B D, sia pur dentro ad esso primo Triangolo a b d, all'hora tirata, ò imaginata la retta b B, & presa per base del Triangolo a b B, Equicrure, allungaremo sotto ad essa base li dui lati eguali a b, a B, fino doue si vogli,

& sia

& sia in r, & s, che cosi (per la quinta propositione) l'angolo B b r, sinistro sotto alla base, sarà eguale al b B s, che è l'altro destro sotto alla base, ma il B b r, è maggiore del B b d, sua parte, onde anco l'altro b B s, sarà maggiore del medesimo B b d, & però tanto maggiormente il d B b, che contiene in se il b B s, sarà maggiore del detto B b d; per il che cõsiderato il Triangolo b B d, che hà l'angolo b B d, maggiore del B b d, ne segue (per la 19. propositione) che ancora il lato b d, opposto all'angolo b B d, maggiore sia più lungo del lato B d, opposto all'angolo B b d, minore, cioè che la base b d, del primo Triangolo proposto sia maggiore della base B D. del secondo Triangolo, onde in tutti i Casi si è dimostrato quanto sì propone.

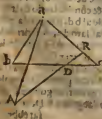
Il Precettore, che insegna, ò il Lettore per intendere esattamente può per comodità molte volte, senza nominare gl'angoli mediante le tre lettere delle due linee che gli contengono, può dico toccarli nelli spatij loro con vno stile, ò due secondo che gli verrà à proposito.

Propositione 25. Theorema 16.

SE di dui Triangoli il primo lato dell'vno sia eguale al primo lato dell'altro, & il secondo lato, al secondo, ma la base dell'vno sia maggiore della base dell'altro, ancora l'angolo contenuto dalli dui lati dell'vno sarà maggiore dell'angolo contenuto dalli dui lati dell'altro.

Delli dui Triangoli a b d, A B D, sia il primo lato a b, dell'vno eguale al primo lato A B, dell'altro, & il secondo lato a d, al secondo A D, ma la base b d, del primo Triangolo più lunga della base B D, del secondo, si dice, che ancora l'angolo a, del primo Triangolo sarà maggiore dell'angolo A, del secondo. Dimostratione. L'angolo a, del primo Triangolo non può essere eguale all'anngolo A, del secondo, perche all'hora (per la quarta propositione) la base b d, del primo Triangolo, saria di necessità eguale alla base B D, del secondo, & non maggiore d'essa B D, come si suppone, Ne meno può l'angolo a, dal primo essere minore dell'A, del secondo, per che all'hora (per la antecedente propositione) ancora di necessitità la base b d, del primo saria minore della base B D, del secondo, & non maggiore d'essa B D, come si propone, onde non potendo la base a b, del primo Triangolo essere ne eguale, ne minore della base B D, del secondo, ella sarà maggiore d'essa B D, come si voleua prouare.

Questa Propositione è il conuerso della antecedente 24. perche la 24. nelli dui Triangoli dati di lati corrispondenti eguali, supposto che l'angolo de i lati del primo sia maggiore dell'angolo de i lati del secondo, dimostra poi di lì, che di necessità la base del primo sia più lunga della base del secondo, Ma questa 24. nelli dui Triangoli medesimi supposto che la base del primo sia più lunga della base del secondo (che è quello che nella 24. si dimostraua) di lì dimostra poi che di necessità l'angolo contenuto dalli dui lati del primo è medesimamente maggiore dell'angolo contenuto dalli dui lati del secondo; che è quello che nella 24. si era preso per supposto, ò noto.

Menelao Alessandrino si dice, che dimostraua la medesma 25. propositione ostensiuamente, cosi Dalla base b d, maggiore del primo Triangolo si seghi la parte b D, eguale alla base B D, minore del secondo Triangolo, & si tiri la b A, eguale al primo lato A B, del secondo (ò primo lato a b, del primo Triangolo, che è l'istesso) talmente che con essa base b D, facci angolo eguale all'angolo A B D, contenuto dal primo lato del secondo Triangolo, poi si tiri la retta a A. & si intenda base del Triangolo Equicrure a b A, che per ciò (per la quinta propositione) in esso li dui angoli b a A, & b A a, sopra alla base (ò vogliamo dire opposti alli dui lati eguali a b, A b, saranno eguali fra loro, & si tiri anco la A D, quale (per la quarta propositione) sarà eguale alla A D, del secondo Triangolo, & cosi haueremo trasportato esso secondo Triangolo sù la base b d, il lato A D, del quale si allunghi per D, finche seghi il lato a d, eguale all'A D, (dal supposito) & sia in r, che cosi la totale retta A r, sarà maggiore del lato a d, & perciò sarà ancora maggiore della a r, parte d'essa a d, Et hora considerato il Triangolo a r A, nel quale il lato A r, è maggiore

giore dell'a r, ne segue (per la 18. propositione) che anco l'angolo A a r, opposto al lato A r, più lungo, sia maggiore dell'angolo a A r, opposto al lato a r, più corto, Onde di questi dui angoli diuersi, ò inegualì al maggiore A a r, giunto il b a A, & se ne forma il totale angolo b a r, ò b a d, & al minore a A r, giunto il b A a, & se ne forma il totale angolo b A D, ne segue, che la prima somma cioè l'angolo b a d, sia maggiore della seconda somma, cioè dell'angolo b A D, ma il d b a d, è l'angolo de' lati del primo Triangolo, delli dui dati, & il b A D, è eguale al B A D, de' lati del secondo Triangolo, però è manifesto il proposto.

Herone ancora dimostra la medesma propositione quinta ostensiuamente in modo simile al seguente,

Delli dui Triangoli detti, la base minore B D, del secondo, si allunghi verso D, fino alla equalità della maggiore b d, del primo, & sia in d. Angora fatto centro il punto angolare A, de' lati, secondo l'interuallo del lato A D, si descriua vn Cerchio fino alla circonferenza del quale per il centro A, si allunghi l'altro lato B A, & si segni m, doue vi arriua, che cosi tutta la retta B m, sarà eguale alla somma delli dui lati B A, A D, del Triangolo A B D, & però anco alla somma delli dui lati b a, a d, del Triangolo a b d, à quelli dell'A B D, posti eguali, perilche la retta B m, sarà maggiore della base B d; si come la somma delli dui lati b a, a d, è maggiore della base b d, (per la 20 propositione) Onde fatto centro il punto B, & con l'interuallo della base B d, descritto vn Cerchio egli segarà la retta B m, & anco il Cerchio primo da due bande, & segnisi n, nella intersegatione che è dalla banda dell'estremo d, & ad esso punto n, dal centro B, si tiri la retta B n, che perciò ella sarà eguale al la base B d, & anco dal centro A, del primo Cerchio al medesimo punto n, si tiri la retta A n, che perciò ella sarà eguale al lato A D, & cosi sarà formato il Triangolo A B n, che è quanto à dire il Triangolo a b d, primo delli dui proposti, essendo li dui lati A B, A n, & base B n, eguali alli loro dui corispondenti lati a b, a d, & base b d, perilche tanto è dire l'angolo B A n, quanto l'angolo b a d, ma il B A n, contiene in se il B A D, onde è maggiore di lui, però anco l'angolo b a d, del primo Triangolo è maggiore dell'angolo B A D, del secondo Triangolo, cioè l'opposto alla maggior base, è più grande dell'opposto alla minor base come si voleua prouare.

Propositione 26. Theorema 17.

SE di dui Triangoli dui angoli dell'vno siano eguali à dui angoli loro relatiui, ò corispondenti dell'altro, cioè il primo angolo al primo, & il 2. angolo al 2. & che di più vn lato dell'vno sia eguale al suo relatiuo, ò corispondente lato dell'altro, ò sia esso lato quello che è fra li dui angoli eguali, ouero sia vno de gl'altri lati opposto, ò sottotendente ad vno de dui angoli eguali; all'hora di necessità i restanti lati dell'vn Triangolo saranno eguali alli restanti lati dell'altro Triangolo, ciascuno al suo corispondente, & il restante angolo dell'vno sarà eguale al restante angolo dell'altro; & l'vn Triangolo sarà eguale all'altro.

Siano i dui Triangoli a b d, A B D, tali, che l'angolo b, del primo sia eguale all'angolo B, del secondo, & l'angolo d, del primo al D, secondo, Et anco vno delli lati del primo sia eguale al suo corispondente lato del secondo, cioè, ò il b d, (che è fra gl'angoli B, & d, che sono eguali alli altri B, & D) al suo corispondente B D, ò vno de gl'altri dui cioè a b, egnale all'A B, ouero a d, eguale all'A D. Hor sia prima, che il lato b d, fra gl'angoli eguali sia eguale al B D, si dice che anco vno de gl'altri dui, poniamo l'a d, sarà eguale al suo corispondente A D, per che se essi non fussero eguali fra loro, all'hora l'vno saria maggiore dell'altro, hor dicasi per l'Aduersario l'A D, essere il maggiore, & cominciando dal termine D, congiunto al lato B D, posto eguale al b d, si seghi da esso A D, la parte D r, per l'Aduersario eguale al lato d a, & si tiri dall'r, all'angolo oppostoli B, la retta r B, considerando il Triangolo r D B, & il primo nostro a d b, nelli quali i dui lati r D, D B, & angolo D, da loro contenuto dell'vno, sarebbono eguali alli dui lati a d, d b, & angolo d, da loro contenuto dell'altro primo Triangolo nostro, onde (per la quarta propositione) gl'altri angoli dell'vno sarebbono eguali à gl'altri angoli dell'altro loro corispondenti, & però l'angolo r B D, dell'vno sarebbe

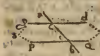
sarebbe eguale all'angolo a b d, dell'altro, ma al medesimo angolo a b d, è anco eguale dal supposito l'angolo A B D, del secondo nostro Triangolo, però (per la prima Comune Concessione) l'angolo r B D, saria anc'egli eguale all'angolo A B D, di che egli è parte, cioè la parte saria eguale al tutto, il che è impossibile, però è anco impossibile, che li dui lati detti a d, A D, siano ineguali fra loro, saranno dunque eguali, & cosi nelli nostri dui Triangoli li dui lati A D, D B, & angolo D, dell'vno, saranno eguali alli dui lati a d, d b, & angolo d, dell'altro, & per ciò (per la quarta propositione) ancora il restante lato (ò base) A B, dell'vno sarà eguale al restante lato a b, dell'altro, & il restante angolo A, dell'vno, al restante angolo a, dell'altro, & l'vn Triangolo all'altro. Ma se nelli dui nostri Triangoli occorra, che oltre l'essere li dui angoli a, & b, eguali all'A, & B, ancora vno delli dui lati opposti ad essi angoli, poniamo l'a d, sia eguale al suo corispondente A D, concluderemo quanto si propone, cominciando à prouare che il d b, lato posto fra detti angoli b, & d, è eguale al suo corispondente D B; perche se questi dui lati d b, D B, non fussero eguali fra loro, l'vno d'essi saria maggiore dell'altro, hor sia per l'Aduersario il D B, maggiore del d b, & da esso D B, cominciando dal punto D, conterminale al sopradetto A D, si seghi la parte D n, eguale per l'Aduersario al lato d b, & dal punto n, all'angolo A, oppostoli si tiri, ò si imagini la retta A n, & considerato il Triangolo A n D, che chiamaremo dell'Aduersario, paragonandolo all'a b d, nostro, diremo li dui lati A D, D n, con l'angolo D, da loro contenuto nel Triangolo dell'Aduersario, sono eguali alli dui lati a d, d b, con l'angolo d, da loro contenuto nel Triangolo nostro, onde (per la quarta propositione) ancora l'angolo A n D, del Triangolo dell'Aduersario saria eguale all'angolo a b d, suo corispondente nel nostro, ma al medesimo angolo a b d, è anco eguale dal supposito l'angolo A B D, dell'altro Triangolo nostro, però li angoli A n D, & A B D, che (sono eguali ad vn'istesso a b d) sariano eguali fra loro, ma l'angolo A n D, è estrinseco del Triangolo A B n, del lato B n, allungato in D, & l'angolo A B n, (che è quanto à dire l'angolo A B D,) è vno delli dui intrinsici oppostoli d'esso Triangolo A B n, però l'angolo estrinseco verria ad essere eguale ad vno delli dui intrinsici oppostili, il che è impossibile (per la 19. propositione nella quale si è dimostrato l'angolo estrinseco essere sempre maggiore di qual si vogli delli dui intrinsici oppostili, & perciò non può esserli eguale) onde impossibile anco è che li dui lati b d, B D, in essi Triangoli siano ineguali; saranno dunque eguali fra loro; Et cosi delli nostri dui Triangoli sapremo, che li dui lati a d, d b, del primo con l'angolo d, da loro contenuto, sono eguali alli dui lati A D, D B, del secondo con l'angolo D, da loro contenuto, per il che (per la quarta propositione) ne segue che il restante lato, ò base a b, del primo sia eguale al restante lato, ò base A B, del secondo, & l'angolo a, all'A, Et il Triangolo a b d, al Triangolo A B D, che è quanto occorreua dimostrare.

Fin qui fra l'altre cose si è trattato di molti accidenti, occorrenti alli Triangoli circa alli lati, angoli, & grandezze loro, & in particolare si è veduto, che in tre modi, ò con tre diuersi suppositi si può concludere, che dui Triangoli siano eguali fra loro, & che gl'angoli, & lati dell'vno siano eguali à gl'angoli, & lati dell'altro ciascuno al suo corispondente. Et si concludono dalla 4. propositione, dalla 8. & dalla 26. Hora l'Autore segue à mostrare alcuni accidenti occorrenti nelle figure Quadrilatere regolari di lati equidistanti, & per ciò prima mostra li accidenti, che auuengono alle linee equidistanti, & con quali suppositi si possa concludere la equidistanza di due linee (intendendosi sempre le linee di chi si tratta essere in vn medesimo piano) Onde si hà da notare, che quando due linee rette sono segate da vn'altra linea retta si formano 8. angoli come si vede nelle due g d, p q, segate dalla a b; di questi, quelli quattro, che sono dentro, ò fra le due segate, cioè li g c o, p o c, d c o, q o c, si chiamano interni, & li dui g c o, p o c, si dicono essere da vna medesima parte, per che sono ambidui dalla parte sinistra, & cosi anco li altri dui d c o, q o c, pur si dicono essere da vn'altra medesima parte destra; il d o c, disopra, & il q o c, disotto, mo presine, ò intesine vno da vna banda disopra, & vn'altro dall'altra banda disotto come sono li d c o, p o c, questi dui si chiamano fra loro alterni come anco li altri dui g c o, sinistro disopra, & q o c, destro disotto. Delli quattro angoli esteriori li dui destri a c d disopra, & q o b, disotto si dicono essere da vna medesima parte, & similmente li dui g c a, disopra, & p o b, disotto pure si dicono esteriori da vna medesima parte.

Propositione 27. Theorema 18.

SE vna linea retta intersegando, ò cadendo sopra à due linee rette, occorra che in esse li dui, ò dui angoli alterni che si faranno siano eguali l'vno all'altro, all'hora di necessità esse due linee rette saranno equidistanti, ò paralelle fra loro.

Siano

Siano le due rette g d, p q, segate dalla retta a b, cadente sopra ad esse, & occorra che li dui angoli alterni, ò destro superiore, & sinistro inferiore, Ouero li dui sinistro superiore, & destro inferiore siano eguali fra loro, hor sia il d c o, eguale al p o c, si dice che di necessità esse due rette g d, p q, saranno equidistanti, Perche non equidistanti non possono essere, che se non fussero equidistanti elle prolungate doueriano concorrere, ò da vna banda, ò dall'altra. Hor sia per l'Aduersario, che concorressero dalla banda destra in n, che cosi le c n, & o n, (rette per l'Aduersario) con la o c, formariano il Triangolo c n o, del quale inteso il lato n o, prolungato in p, l'angolo c o p, saria estrinseco d'esso Triangolo, & per ciò (per la 16. propositione) egli saria maggiore dell'angolo n c o, che saria vno delli dui intrinseci oppostoli, ma detto angolo c o p, non può essere maggior d'esso n c o, ò vogliamo dire d c o, (che è l'istesso) per che essi dui angoli si sono posti eguali fra loro. onde manco può essere, che le due rette g d, p q, concorrano dalla banda destra; ne meno possono concorrere dalla sinistra che se per l'Aduersario vi potessero concorrere, & sia in s, all'hora perche la c g s, & anco la o p s, (l'Aduersario) sariano rette, elle insieme con la c o, formariano il Triangolo c s o, del quale inteso allunganto il lato s c, in d, l'angolo d c o, saria estrinseco d'esso Triangolo, & però conuertria che fusse maggiore del c o s, ò vogliamo dire c o p, che è vno delli dui intrinseci oppostoli nel Triangolo, ma questo è impossibile, cioè che l'angolo d c o, sia maggiore del c o p, ponendosi essi essere eguali, però è similmente impossibile, che le due rette dette possino manco concorrere insieme dalla parte sinistra; non potendo dunque elle concorrere da banda alcuna, ne segue ch'elle siano fra loro equidistanti come si voleua mostrare.

Propositione 28. Theorema 19.

SE vna linea retta segando, due linee rette farà vno de gl'angoli esteriori eguale all'angolo interiore oppostoli dalla medesima parte, Ouero farà la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte eguale à dui angoli retti, all'hora di necessità esse due linee saranno equidistanti.

Siano le due rette g d, p q, segate dalla a b, in c, & o, & sia vno de gl'angoli esteriori poniamo l'a c d, superiore destro, eguale all'inferiore della medesima parte destra c o q, oppostoli inferiore (*che il d c o, interiore dalla medesima parte è lo all'a c d, congiunto*) si dice, che esse due rette g d, p q, sono equidistanti fra loro, il che cosi si dimostra. Per che le due rette g d, a b, si segano in c, l'angolo g c o, (per la 15. propositione) sarà eguale allo à lui contraposito a c d, ma à questo istesso a c d, dal supposito è anco eguale il c o q, però (per la prima Comune Concessione) il g c o, sarà eguale al c o q, ma questi dui sono coalterni nelle due rette g d, p q, segate dalla a b, & sono eguali, però (per la antecedente 27. propositione) esse due rette g d, p q, sono equidistanti. Si potria anco fare la dimostratione così: Per che la retta d c, cade sopra alla retta a b, la somma delli dui angoli a c d, d c o (per la 13. propositione) è eguale à dui retti, & perche la retta a o, cada sopra alla p q, ancora la somma delli dui angoli c o q, c o p, è eguale à dui retti, onde (per la prima Comune Concessione) la prima somma sarà eguale alla seconda somma; perilche dalla prima sõma leuato l'angolo a c d, che resta il d c o, & dalla seconda sõma leuato il c o q, che resta il c o p, per che li dui angoli leuati sono dal supposito eguali fra loro, ancora li dui rimanenti detti d c o, & c o p, sararanno eguali fra loro; ma questi dui d c o, c o p, sono angoli coalterni nelle rette g d, p q, segate dalla a b, & sono eguali però (per la antecedente 27. propositione) le dette rette g d, p q, sono equidistanti fra loro. Ancora in esse due rette g d, p q, siano li dui angoli interiori da vna medesima parte, poniamo li dui destri d c o, c o q, eguali à dui retti, si dice che pure esse rette g d, p q, saranno equidistanti, Perche considerato vna delle due rette dalla istessa parte destra d c, ouero q o, poniamo q o, cadere sopra alla a b, ne segue che la somma delli dui angoli c o q, q o b, sia eguale à dui retti, ma anco la somma delli dui c o q, d c o, dal supposito è eguale à dui retti, però l'vna somma è eguale all'altra, onde da ciascuna d'esse due somme leuato comunemente l'angolo c o q, il restante q o b, dell'vna sarà eguale al restante d c o, dell'altra, ma di questi dui restanti il q o b, è estrinseco, & il d c o, è intrinseco oppostoli dalla medesima parte delle due dette g d, p q, segate dalla a b, & sono eguali, però per la antecedente prima parte superiore di questa propositione ne segue, che dette due rette g d, p q, siano fra loro equidistanti. Potiamo ancore fare la dimostratione così. Intesa la c o, cadere sopra ad vna delle due g d, p q, poniamo sù la p q, ne segue che la somma delli dui angoli fatti con essa p q, cioè delli c o p, c o q, sia eguale à dui retti; ma ancora dal supposito la

somma

somma delli dui d e o, e o q, è eguale à dui retti, perilche l'vna somma è eguale all'altra, onde da ciascuna d'esse due somme leuando l'angolo e o q, ad ambedue comune, li dui restanti e o p, d c o, restaranno fra loro eguali, ma questi dui restanti sono dui angoli alterni delle rette dette g d, p q, segate dalla a b, & sono eguali, però (per la antecedente 27. propositione) esse due rette g d, p q, sono equidistanti fra loro.

Propositione 29. Theorema 20.

SE vna linea retta segarà, ò caderà sopra à due rette equidistanti, all'hora li angoli alterni, che si faranno dalle due parti delle segate, saranno eguali fra loro, l'esterno sarà eguale all'interno oppostoli dalla medesima banda, Et la somma delli dui interni da vna istessa banda sarà eguale à dui retti.

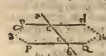
Siano le due rette g d, p q, paralelle, ò vogliamo dire equidistanti fra loro, sopra alle quali segandole cada la retta a b, si dice che li angoli alterni fatti da loro sono eguali, cioè il d e o, superiore destro al suo alterno p o e, inferiore sinistro, Et il e o q, inferiore destro al suo alterno g e o, superiore sinistro, Perche. Intesi hora li dui d e o, p o e, se questi dui non sono eguali fra loro vno d'essi sarà maggiore dell'altro, hor sia se possibile è per l'Aduersario, il d o e, maggiore del p o c, che all'hora gionto comunemente, cioè à ciascuno d'essi l'angolo g e o; anco la prima somma delli dui d e o, g e o, sarà maggiore della seconda somma delli dui p o c, g e o, ma la prima somma è (per la 13. propositione) eguale à dui retti, però essi dui retti ane'essi saranno maggiori della seconda somma, cioè conuersamente la somma delli dui angoli p o c, g e o, sarà minore di dui retti, ma questi sono li dui angoli interni da vna medesima parte sinistra, la somma de'quali saria minore di dui angoli retti, perilche (per la quinta Petitione) da essa parte sinistra concorreriano insieme li due rette g d, p q, ma elle sono poste essere equidistanti, & pereiò non possono concorrere, onde ne manco li dui angoli alterni detti d e o, p o e, possono essere inequali, saranno dunque eguali fra loro come si voleua mostrare, Et anco nel medesimo modo si potrà concludere gl'altri dui angoli alterni g e o, e o q, essere pure eguali fra loro, Ouero si potrà dire (*hauendo già prouata la egualità delli d e o, p o e,*) la somma delli dui angoli d e o, g e o, fatti dalla retta o e, cadente sù la g d, è eguale à dui retti, & però è eguale alla somma delli dui p o e, e o q, fatti dalla detta e o, cadente sù la p q, qual somma delli p o c, e o q, anc'ella è eguale à dui retti, onde dall'vna somma leuando l'angolo d e o, & dall'altra leuando l'angolo p o e, quali dui leuati già si è mostrato essere eguali fra loro, ne segue che l'vn rimanente cioè l'angolo g e o, sia eguale all'altro rimanente cioè all'angolo e o q, che sono li dui alterni, quali restaua à mostrare essere eguali fra loro.

Si dice ancora che l'angolo esterno qual si vogli, poniamo l'a e d, superiore destro sarà eguale all'interno oppostoli dalla medesima parte destra che è il e o q, Perche questo e o q, già si è prouato essere eguale al g e o, à lui alterno, & al medesimo g e o, è eguale l'a e d, esteriore detto (per la 15. propositione) essendo essi oppositi nelle due linee a b, g d, che si segano in e, onde (per la prima Comune Concessione) ancora l'a e d, sarà eguale al e o q, Et nel medesimo modo si potrà prouare, che ciascuno delli altri angoli estrinci, ò esteriori sia eguale all'intrinseco, ò interiore oppostoli dalla medesima bãda, cioè l'angolo a e g, al c o p, il b o p, all'o e g, & il b o c, all'o e d,

Di più si dice la somma delli dui angoli interni da vna medesima banda, poniamo delli destri d e o, e o q, essere eguale à dui retti, Perche al e o q, essendo eguale l'esterno a e d, (ouero l'alterno g e o,) se così all'esteriore a e d, come al c o q, giongeremo comunemente il d e o, la somma delli a e d, d e o, sarà eguale alla somma delli d e o, e o q, ma quella delli a e d, d e o, è eguale à dui retti (per la 13. propositione) però anco la somma delli d e o, e o q, sarà eguale à dui retri, come si voleua prouare. Ouero si potea dire (*seruendoci del g e o, alterno, & però eguale al e o q,*) Se così al g e o, come al e o q, si giunga comunemente l'angolo d e o, la prima somma delli g e o, d e o, sarà eguale alla seconda somma delli d e o, e o q, ma la prima somma (per la 13. propositione) è eguale à dui retti, però ancora la secõda somma delli d e o, e o q, interni detti da vna medesima parte destra, sarà eguale à dui retti, Ci poteuamo anco seruire dell'esterno q o b, ò dell'intern p o e, alterno, & però eguale al d e o, accompagnandoli all'angolo e o q, che ciascuna delle due loro somme è eguale à dui retti, & anco è eguale alla somma delli dui d e o, e o q, & però la somma delli dui d e o, e o q, anc'ella è eguale à dui retti.

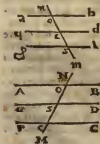
Nel medesimo modo si mostrarà la somma delli altri dui angoli interni g e o, c o p, essere similmente eguale à dui angoli retti.

Si può anco principiare la dimostratione dall'vltima delle tre parti di questa Propositione, prouando prima, che la somma delli dui angoli interiori da vna medesima parte delle due rette

equidistanti segate da vna retta è eguale à dui retti, poniamo la somma delli dui destri, dicendo la somma delli dui angoli d c o, c o q, è eguale à dui retti, perche ne minore di dui retti può esser, perche all'hora (per la quinta Petitione) le due rette g d, p q, concorreriano insieme da essa banda destra, & però non sariano equidistanti, che è contro il supposito *(essendo elle poste equidistanti)* ne meno essa somma delli dui angoli detti d c o, c o q, può essere maggiore di dui retti, perche all'hora la somma delli dui interni sinistri g c o, c o p, che saria il restante di quattro retti (per la 13. propositione, intesa due volte che la retta o c, con la g d, fa la sõma delli dui g c o, o c d, eguale à dui retti, & la istessa c o, con la p q, fa la somma delli dui c o p, c o q, eguale pure à dui retti, onde la somma di tutti li quattro interni detti è quanto quattro retti) verria ad essere minore, ò manco di dui retti, & però dette due linee rette d g, g p, (per la quinta Petitione) concorreriano insieme da tal banda sinistra, il che non può essere ponendosi, che elle siano equidistanti; onde non potendo la somma delli dui angoli interiori destri detti d c o, c o q, essere ne minore, ne maggiore di dui retti, ella di necessità sarà eguale à dui retti, & però la somma delli altri dui interni sinistri g c o, c o p, (che è il restante di quattro retti) sarà anc'ella eguale à dui retti; Prouata questa parte, qual si vogli dell'altre due si proua facilmente dependendo da questa, Che quanto alli angoli alterni il g c o, è eguale al c o q, per che la somma cosi dell'vno, come dell'altro con il d c o, (ò con il c o p,) è eguale à dui retti, onde leuatone da ciascuna somma il commune d c o, (ouero c o p,) ne segue che il solo g c o, sia eguale al solo c o q. Et che il d c o, sia eguale anc'egli allo à lui alterno c o p, si rende chiaro nel medesimo modo; Ouero dicendo, la somma delli dui angoli d c o, g c o, è eguale a dui retti (per la 13. propositione) (& per la istessa 13. propositione) ancora la sõma delli dui c o p, c o q, è anc'ella eguale a dui retti, & però eguale alla prima somma, onde dall'vna leuato il g c o, & dall'altra seconda sõma leuato il c o q, alterni gia prouati essere eguali fra loro, ne segue che il restãte d c o, dell'vna sia eguale al restante c o q, dell'altra, come si volea prouare. Ancora che qualsiuogli delli estrinseci sia eguale allo intrinseco à lui opposto dalla medesima parte, poniamo l'esteriore, ò estrinseco destro q o b, all'interiore e oppostoli d c o, si prouarà nel medesimo modo dicendo, la somma delli dui q o b, q o c, (per la 13. propositione) è eguale a dui retti; Ancora la somma delli dui interiori d c o, q o c, è pronato essere eguale a dui retti, & però l'vna somma è eguale all'altra, onde leuando da ciascuna di loro il commune angolo q o c, il restante q o b, sara eguale al restante d c o, come si voleua prouare.

Questa 29. Propositione si vede essere il conuerso d'ambedue le antecedenti 27. & 28. Perche in questa per supposito si piglia quello che in esse si dimostraua, cioè la Equidistanza delle linee, Et si dimostra tutto quello, che in essi supponeua, cioè la equalita delli angoli alterni. Dell'esteriore all'interiere oppostoli dalla istessa parte. Et delli interiori da vna medesma parte a dui rette.

Propositione 30. Theorema 21.

Le linee che sono equidistanti ad vna istessa linea sono equidistanti fra loro.

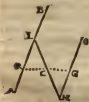
Sia ciascuna delle due rette a b, p d, equidistante alla g l, si dice esse due a b, p d, essere anco equidistanti fra loro. Per dimostrarlo. Tirisi vna retta n m, che le seghi tutte tre *(allungando qual d'esse occorresse)* acciò vna istessa retta le seghi. Et perche a b, è equidistante alla g l, l'angolo b o s, sara eguale allo a lui coalterno o s g, Et per che p d, è equidistante alla istessa g l, l'angolo o s g, sara eguale all'o c p, interiore, & esteriore oppofti dalla medesma parte, onde questi tre angoli b o s, o s g, o c p, saranno eguali fra loro, ma d'essi li dui b o s, o c p, sono alterni delle due rette a b, p d, segate dalla retta n m, & sono eguali però esse due rette a b, p d, sono equidistanti fra loro, che è quanto occorreua prouare.

Propositione 31. Problema 10.

Da vn punto dato si può tirare vna linea retta equidistante ad vna retta proposta.

Dal punto dato a, sia da tirarsi vna retta equidistante alla proposta b c, Per farlo, Tirisi vna linea come si vogli dal punto a, fino alla b c, & sia la a g, & dal punto detto a, si tiri vna linea (per la 23. propositione) che con la a g, dalla banda destra facci vn'angolo eguale all'angolo senistro a g b,

a g b & sia la a d, Ouero da esso punto a, si tiri vna retta, che con la a g, dalla banda sinistra facci, vn'angolo eguale all'angolo destro a g e, & sia la a n, che cosi la retta a d, ouero a n, sarà equidistante alla b e, (per la 17. propositione) perche li dui angoli alter-ni d a g, a g b; Ouero li dui n a g, a g e, dalla construttione sono eguali fra loro.

Et le due rette a n, a d, saranno congiunte insieme per il diritto, & cōponeranno vna sol linea, perche essendo l'angolo n a g, fatto eguale all'alterno a g e, & il d a g, eguale all'altro alterno a g b, ne segue, che la somma delli dui n a g, d a g, sia eguale alla somma delli dui a g e, a g b, ma la somma di questi dui a g e, a g b, è eguale à dui retti (per la 13. propositione) perilche ancora la somma delli dui n a g, d a g, sarà eguale à dui retti, & però (per la 14. propositione) le due rette a n, a d, saranno congiunte insieme per il diritto constituendo vna sola linea retta. Ancora per tirare dal punto a, vna retta equidistante alla b e, si potria tirarà dall'a alla b e, la retta à g, come si vogli allungarla verso l'a, à beneplacito poniamo in s, & dall'a, tirare vna retta a d, che con l'allungamento a s, dalla banda destra facesse angolo eguale all'a g e, destro della a g, con la g e, accioche l'angolo esteriore s a d, fusse eguale all'interiore a g e, oppostoli dalla parte destra medesma; Ouero dall a, tirare vna retta a n, che con la a s, dalla banda sinistra facesse angolo eguale all'a g b, sinistro della a g, con la g b, accioche l'angolo esteriore s a n, sia eguale all'interiore a g b, oppostoli dalla parte sinistra medesma, che cosi la retta a d, ò la a n, ò vogliamo dire la n a d, che è retta come si è mostrato sarà equidistante alla proposta b e; Ancora si potria operare nel modo seguente.

Dal punto g, dato per tirare vna retta equidistante alla a b, proposta; Segnato vn punto doue si vogli nella a b, & sia r, la distanza che è da esso r, al g, dato si diuida per mezo, & sia in e, al qual punto e, da vn punto segnato doue si vogli nella a b, & sia l, si tiri la retta l e, allungandola oltre il e, altretanto quanto è essa l e, & arriui in m, dal quale punto m, al g, dato si tiri la retta m g, allungandola quanto si vogli, che questa m g, sarà equidistante alla a b, Perche considerati i dui Triangoli r l e, m g e, i dui lati l e, e r, dell'vno sono eguali alli dui m e, e g, dell'altro, & l'angolo l e r, contenuto dalli dui lati dell'vno è eguale all'angolo m e g, contenuto dalli dui lati dell'altro, (che sono contraposti delle due rette l m, r g, che si segano in e,) per il che (per la quarta propositione) i restanti angoli dell'vn Triangolo saranno eguali alli restanti angoli à loro corispondenti dell'altro, & però l'angolo e g m, sarà eguale al e r l, ma questi sono coalterni delle due rette m g o, a b, sopra alle quali cade la retta r g, Ouero perche anco (pure per la quarta propositione) il restante angolo e m g, del Triangolo g m e, è eguale al restante angolo e l r, del Triangolo r l e, & questi sono coalterni delle due rette m o, a b, sopra alle quali cade la retta l m, ne segue che esse due a b, m o, siano equidistanti fra loro.

In Pratica ancora, con vna sola apertura di compasso si può da vn punto dato a, tirare vna retta equidistante ad vna proposta retta b d, cosi. Fatto centro il punto a, con apertura di cōpasso che possa segare la b d, si segni il punto c, doue ella sia segata (che se bene si segasse in dui punti girādo il compasso à noi ne basta vno) & anco si facci vn pezzo d'arco dall'altra banda del punto a, (cioè dalla banda destra se il c, sia dalla sinistra) sopra alla b d, circa al luogo doue si vede che deue passare la equidistante da tirarsi, poi posto vn piede del Compasso nel punto c, del segamento con la medesma apertura sù la b d, verso la parte destra detta si segni il pūto r, che cosi la c r, sarà eguale alla distanza c a, & poi posto vn piede del Compasso in r, con la istessa inuariata apertura si giri l'altro piede finche seghi l'arco già fatto con il centro a, & sia in s, dal quale s, tirata la s a, ella sarà equidistante alla b d; Perche imaginata la retta a r, & li dui Triangoli Equicrurij a c r, a s r, di base comune a r, essi (per la ottaua propositione) saranno fra loro Equiangoli, cioè ciascun angolo dell'vno sarà eguale all'angolo suo corispondente dell'altro, & però l'angolo s a r, dell'vno sarà eguale all'angolo c r a, dell'altro, ma questi dui angoli sono alterni delle due rette a s, b d, sopra le quali cade la a r, onde essendo essi eguali, ne segue che dette due rette a s, b d, siano fra loro equidistanti, come si ricerca.

Pro-

Propositione 32. Theorema 22.

DI ciascun Triangolo, essendo allungato qual si vogli lato, da qual si vogli banda, l'angolo estrinseco che si formarà, fuori cioè del Triangolo, sarà eguale alla somma delli dui angoli intrinsici oppostoli in esso Triangolo, Et la somma di tutti tre li angoli del Triangolo sarà eguale à dui retti.

Sia del Triangolo a b c, allungato qual lato si vogli, da che banda ci piace, poniamo il b c, dalla banda di c, & sia in d, facendosi fuori del Triangolo l'angolo a c d, estrinseco, si dice egli essere eguale alla somma delli dui intrinsici oppostoli a, & b; Et che la somma delli tre angoli intrinseci del Triangolo è eguale à dui angoli retti. Per dimostrarlo. Dal punto c, dell'allungamento si tiri, ò imagini vna linea retta c r, equidistante alla oppostoli a b, che cosi sopra ad esse due equidistanti cadendo la a c, & anco la b d; per rispetto della a c, l'angolo a c r, sarà eguale allo à lui alterno c a b, Et per rispetto della d b, l'angolo estrinseco r c d, sara eguale all'a b c, vno delli dui intrinsici oppostoli; onde la somma delli dui a, & b, sarà eguale alla somma delli dui a c r, r c d, qual somma è l'angolo a c d, cioè esso a c d, estrinseco sarà eguale alla somma delli dui a, & b, intrinsici oppostoli come era da dimostrare. Ancora giunto comunemente il restante angolo a c b, del Triangolo cosi alla somma delli dui a, & b, come al solo a c d, (ad essi dui eguale) ne segue, che il composto delli tre angoli a, b, & c, del Triangolo sia eguale al composto delli dui a c d, esteriore, & a c b, interiore congiuntoli, ma la somma di questi dui è eguale a dui retti (per la 13. propositione) però anco la somma delli tre angoli detti a, b, & c, interiori contenuti nel Triangolo proposto sara eguale a dui retti. Onde è chiaro quanto si è proposto di dimostrare.

I Pitagonici si dice che dimostrauano questa 32 Propositione nel modo seguente.

Proposto il Triangolo c a b, per dimostrare, che la somma delli suoi tre angoli è eguale à dui retti. Ad vno delli suoi tre lati, & sia l'a b, dall'angolo oppostoli c, si tiri la equidistante n s, che cosi sopra ad esse due equidistanti a b, n s, cadendo la retta a c, & anco la retta b c; ne segue (per la 29. propositione) che rispetto alla a c, l'angolo a, sia eguale allo à lui alterno A. & rispetto alla b c, l'angolo b, sia eguole allo à lui alterno angolo B. onde cosi alli a, & b, come alli A, & B, giunto comunemente l'angolo c, la somma delli tre a, b, c, interni del Triangolo proposto, sarà eguale alla somma delli tre A c B, detti, ma la somma di questi tre A c B, è quanto dui retti, però anco la somma delli tre a b c, del Triangolo proposto è medesimamente quanto dui retti, Che mò allungando vn lato qual si vogli del Triangolo da che banda si vogli, l'angolo estrinseco che si formi sia eguale alla somma delli dui intrinsici oppostili nel Triangolo è chiaro, per che l'angolo estrinseco con l'angolo intrinsico I, congiuntoli è sempre quanto dui retti (per la 13. propositione) & anco l'istesso intrinsico I, con li altri dui intrinsici (cioè li tre intrinsici insieme) fanno similmente somma, che e quanto dui retti, & però eguale alla somma delli dui estrinseco cioè, & intrinseco I, congiuntoil, onde da ciascuna somma leuato l'angolo I, intrinsico comune ne segue che il restante da vna banda che è il solo estrinseco sia eguale à quello che resta dall'altra banda che è il composto delli dui intrinsici opposti ad esso estrinseco detto.

Si può ancora dimostrare la sõma delli tre angoli di ciascun Triangolo essere eguale, ò quanto dui retti, così.

Da vn'angolo d'esso al lato, ò base oppostoli (che la possa hauere dentro al Triangolo) si tiri vna perpendicolare, & sia la a c, sopra al lato b d, nel Triangolo a b d, diuidendo l'angolo a, nelle due parti n, & v, Ancora dalli dui estremi b, & d, d'esso lato b d, se li ergano, ò imaginino le due perpendicolari b r, d s, ciascuna delle quali (per la 28. propositione) sarà equidistante alla c a, (*per che imaginato cadere sopra ad esse b r, c a, d s, la retta b d, la somma delli dui angoli interiori r b c, a c b, da vna medesima parte sarà eguale à dui retti, essendo ciascun d'essi (dal la construttione) retto, & perciò la r b, equidistante alla a c, similmente, perche essendo retto ciascuno delli dui angoli a c d, s d c, interiori dalla medesima parte nelle due rette a c, s d, la somma d'essi dui angoli è eguale à dui retti, & perciò dette due rette a c, s d, sono equidistanti*) Hora inteso cadere la a d, sopra alle dne equidistanti a c, s d, ne segue che l'angolo a d s, ò vogliamo nominandolo breuemente chiamarlo l'angolo o, sia eguale all'v, parte del b a d, à questo o, coalterno, Et anco in-

teſo cadere la retta a b, ſopra alle due equidiſtanti r b, a c, ne ſegue che all'angolo n, (che è l'altra parte del b a d,) ſia eguale lo à lui alterno t, onde il totale b a d, è eguale alli dui t, & o, perilche coſi all'a, totale come alli dui t, & o, giunti comunemente li dui angoli b, & d, del Triangolo propoſto, la ſomma da vna banda che ſarà li tre angoli a, b, & d, del Triangolo propoſto ſara eguale alla ſomma dall'altra, che ſarà li dui retti compoſti l'vno dalli t, & b, & l'altro dalli o, & d; cioè la ſomma delli tre angoli del Triangolo propoſto ſara eguale à dui retti, come ſi vokua moſtrare. Di qui mò facilmente ſi concluderà anco, che ciaſcun'angolo eſtrinſeco, che ſi formaſſe da qual lato allungaſi vogli del Triangolo ſarà ſempre eguale alla ſomma delli dui angoli intrinſici oppoſtili in eſſo Triangolo.

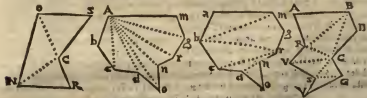
Da queſta Propoſitione ſi può deriuare il modo di conoſcere à quanti angoli retti ſia eguale la ſomma de gl'angoli contenuti in qual ſi vogli ſuperficie rettilinea. Che ſegnando vn punto C, in eſſa ſuperficie dal quale à ciaſcuno delli ſuoi angoli tirando vna retta ella ſia dentro ad eſſa ſuperficie, ella ſi verrà à diuidere in tanti Triangoli, quanto è il numero delli ſuoi lati, & però quanto è il numero de gl'angoli d'eſſa (che ogni ſuperficie hà tanti angoli, quanti lati) che ciaſcun lato ſi potrà pigliare per baſe d'vn Triangolo gl'angoli delli quali Triangoli ſaranno contenuti da gl'angoli della ſuperficie in queſto modo, che delli tre angoli di ciaſcun Triangolo vno d'eſſi ſara intorno al punto detto C, & gl'altri dui ſaranno cõpreſi, ò contenuti da gl'angoli della ſuperficie, perche ogn'angolo della ſuperficie ſara diuiſo in due parte dalla linea che ſarà tirata ad eſſo angolo dal punto C, & d'eſſe due parti d'angolo l'vna parte ſeruirà per angolo d'vno delli Triangoli formati, & l'altra parte ſeruirà per angolo d'vn'altro d'eſſi Triangoli, onde ſe i lati, & però ſe gl'angoli della ſuperficie ſaranno poniamo 10. dieci ancora ſaranno i Triangoli nelli quali ella ſi diuiderà, Et delli 30. angoli delli 10. Triangoli 10. cioè vno per ciaſcun Triangolo, ſaranno intorno al punto C, & però la ſomma di tutti eſſi 10. angoli ſara quanto quattro retti (per quello che ſi caua dalla 13. propoſitione) & gl'altri 20 ſaranno compreſi, ò contenuti nelli 10 angoli della ſuperficie, onde perche li 30. angoli delli 10. Triãgoli importano quanto 20. angoli retti (che li tre angoli di ciaſcun Triangolo importano quanto dui retti) cauandone li quattro retti cõtenuti dalli 10. angoli delli Triangoli che ſono intorno al punto C, il restante 16. ſara il numero de gl'angoli retti alli quali ſono eguali gl'altri 20. angoli delli Triangoli contenuti dalli 10. della ſuperficie, & conſequentemente eſſi 10. angoli della ſuperficie ſaranno eguali à detti 16. angoli retti. Et coſi conoſciamo che in queſto modo diuidendoſi la ſuperficie propoſta in tanti Triangoli quanto è il numero delli lati d'eſſa, Doppiando noi tal numero de' lati, ò numero delli Triangoli che è l'iſteſſo, & dal prodotto, cioè da eſſo doppio cauando quattro (che è il numero de gl'angoli retti alli quali ſono eguali li angoli delli Triangoli intorno al punto preſo nella ſuperficie, che non ſono cõpreſi, ò contenuti nelli angoli d'eſſa ſuperficie) il reſtante è il numero de gl'angoli retti alli quali ſono eguali gl'angoli tutti della ſuperficie propoſta. Onde proponendoſi vna ſuperficie di 40. lati, dal doppio di 40. che è 80. cauando quattro per regola il reſtante 76 moſtrarà, che li 40. angoli d'eſſa ſuperficie ſono eguali à 76. retti. Perilche ſe eſſa ſuperficie fuſſe equiangola, cioè di 40. angoli, ciaſcun d'eſſi ſaria il quaranteſimo di 76. retti, cioè partendo 76. retti per quattro l'auenimento $1\frac{9}{10}$. moſtraria, che ciaſcu'angolo di tal figura ſaria, ò conteneria angoli retti $1\frac{9}{10}$. Et coſi il Triangolo Equiangolo, che è l'Equilatero, con queſto modo diuiſo in tre Triangoli haueria li angoli eguali à tanti retti quanto è il doppio di 3. di numero delli ſuoi lati (cioè del 3. numero delli Triangoli in che ſi diuideria) qual doppio è 6. cauatone il 4. che importano li tre angoli intorno al punto C, & coſi reſtando à 2. angoli retti ſariano eguali li tre angoli del Triangolo propoſto, come ſappiamo per la dimoſtratione gia fatta in queſta 32. propoſitione, per il che ciaſcuno d'eſſi tre angoli eguali del Triangolo Equilatero ſaria l'$\frac{1}{3}$. di detti 2. retti, cioè ſara $\frac{2}{3}$. di retto; Et nel medeſimo modo potremmo trouare la quantita di ciaſcun'angolo di qual ſi vogli figura, ò ſuperficie Equiangola riſpetto al retto, che con queſta Regola ſi è formata la ſeguente Tauola, che ſi potra andare ampliando in qual ſi vogli altra figura Equiangola.

Ciaſcuno angolo del Triangolo Equiangolo è $\frac{2}{3}$. di retto.
Del Quadrangolo Equiangolo è 1. retto.
Del Pentagono è $1\frac{1}{5}$. Dell'Eſagono è $1\frac{1}{3}$.
Del Settagono è $1\frac{3}{7}$. Dell'Ottagono è $1\frac{1}{2}$.
Del Nonagono è $1\frac{5}{9}$. Del Decagono è $1\frac{3}{5}$.

Et breuemente ſi può notare, che il rotto da accompagnare all'1. intiero (ſignificante 1. angolo retto) in qual ſi vogli ſuperficie Equiangola, ha ſempre per denominare il numero de lati

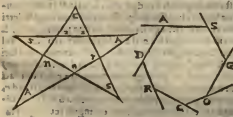
Dell'Vndecagono è $1\frac{7}{11}$. Del Duodecagono è $1\frac{2}{3}$.
Del Tredecagono è $1\frac{9}{13}$. Del Quatordecagono è $1\frac{5}{7}$.
Del Quindecagono è $1\frac{11}{15}$. Del Sedecagono è $1\frac{3}{4}$.
Del Diciasetteagono è $1\frac{13}{17}$. Del Diciottagono è $1\frac{7}{9}$.
Del Diecinouagono è $1\frac{15}{19}$. Del Vintiagono è $1\frac{4}{5}$.

ò angoli della figura, & per numeratore vn numero minore di questo denominatore in quattro vnità (per causa del quattro, che si caua dal doppio del numero de' lati d'essa figura) Onde il rotto da accompagnare all'1. intiero nella superficie Centangola Equiangola, ò vogliamo dire di 100. lati sarà $\frac{96}{100}$. che schisato si riduce à $\frac{24}{25}$. & con l'1. intiero fa $1\frac{24}{25}$. & cosi l'angolo del Centagono Equiangolo rispetto al retto è $1\frac{24}{25}$. Et della superficie Equiangola di 101. angoli sarà $1\frac{97}{101}$. Et della superficie di 102. angoli sarà $1\frac{98}{102}$. cioè schisato sarà $1\frac{48}{51}$. Et della superficie di 103. angolo sarà $1\frac{99}{103}$. Et cosi dell'altre.

Potressimo anco deriuare la Regola da sapere à quanti angoli retti siano eguali gl'angoli di vna proposta figura, diuidendola pure in Triangoli, ma in altro modo, cioè Da vno delli suoi angoli quale ci piaccia, ò venga commodo, & sia l'A, à ciascuno delli angoli oppostili si tiri vna retta cadente tutte dentro della figura (come hora si suppone che possa riceuere la figura) che cosi ella sarà diuisa in tanti Triangoli, quanto è il numero delli suoi angoli manco dui; perche dall'A, non si è tirata linea ad alcuno de dui angoli conterminali ad esso A, poniamo nella figura A b c d o n r g m, che dall'A, à l'angolo m, tirando vna linea ella saria la istessa A, m, & cosi dall'A. al b, ella saria la istessa A b, perche essi dui angoli m, & b, sono conterminali all'A, & non oppostili come sono, ò si chiamano tutti gl'altri angoli di essa figura, nella quale hauendo ella 9. angoli, si saranno dall'A, (lassando li dui m, & b, ad esso A, conterminali) à gl'altri 6. angoli tirate 6. linee, quale insieme con i 9. lati della figura la diuideranno in 7. Triãgoli, cioè in 2. manco di 9. numero de gl'angoli, ò vogliamo dire (che resulta l'istesso) numero delli lati della detta figura. Et per che tutti

li angoli di essi Triangoli nella figura cosi diuisa sono intieramente contenuti nel numero de gl'angoli d'essa (*che ne li angoli tutti delli Triangoli non eccedono, ne meno sono ecceduti dalli angoli tutti d'essa figura*) cioè la somma di tutti gl'angoli delli Triangoli è eguale alla somma di tutti gl'angoli della figura, ne segue che à tanti angoli retti siano eguali gl'angoli tutti della figura, à quanti angoli retti sono eguali gl'angoli tutti delli Triangoli, ma gl'angoli di ciascun Triangolo sono eguali à dui retti, & il numero delli Triangoli nella figura è 2. manco dal numero de gl'angoli, ò de' lati d'essa, però dal numero de lati cauando 2. & il restante (*che il numero delli Triangoli nelli quali ella cosi si diuide*) doppiandolo esso doppio sarà il numero de gl'angoli retti à i quali sono eguali gl'angoli della figura, che per ciò nella superior figura di 9. lati, ò angoli da esso 9. cauando 2. & il restante 7. (numero delli Triangoli nelli quali ella cosi si diuide) doppiato che fa 14. questo 14. è il numero de gl'angoli retti à i quali sono eguali li 9. angoli della figura, che se ella fusse equiangola, ciascuno d'essi 9. angoli importaria l'vn nono del 14. onde partẽdo 14. per 9. l'auenimẽto $1\frac{5}{9}$. mostraria che ciascun angolo del Nonagono saria ottuso importando quanto $1\frac{5}{9}$ retti, cioè saria $\frac{5}{9}$. di retto più d'vn retto; Et se bene si è detto che da vn'angolo della figura alli à lui oppositi si tirino le linee rette, si può anco da vn'angolo all'altro non conterminale à lui tirare vna retta, & cosi da altri angoli ad altri tirare linee rette di modo che la figura venga diuisa in Triangoli, gli angoli tutti de quali siano comuni, ò contenuti da gl'angoli della figura, che cosi ella sarà medesimamente diuisa sempre in tanti Triangoli quanto è il numero manco 2. delli angoli, ò lati d'essa, auuertendo che poniamo nella figura di 5 lati o n r c s, l'angolo suo s c r, è quello spatio, che è contenuto dalle rette s c, c r, dentro dalla figura, quale è maggiore di dui retti, & con l'angolo, ò spatio s c r, di fuori della figura, che è ottuso, farebbe in somma quattro retti, & cosi in ciascuna figura doue occorra il simile l'angolo della figura s'intende lo spatio interiore contenuto dalle due linee, che lo formano, & è sempre maggiore di dui retti, in quanto l'esteriore (sia egli ottuso, ò retto, ò acuto) è minore di dui retti, perche la somma dell'interiore, & esteriore è sempre quanto quattro retti; Che delli dui Ottagoni, ò figure di otto lati poste in margine cosi l'vna come l'altra con le rette da vn'angolo

all'al-

all'altro si diuide in 6. Triangoli, & perciò à 12. angoli retti sono eguali li angoli dell'vna contienenti tutti li 18. angoli delli suoi 6. Triangoli, come anco à 12. retti sono eguali l'angoli dell'altra continenti similmente tutti li 18. angoli delli suoi 6. Triangoli; Et cosi conosciamo, che vna figura di molti lati (& anco il Triangolo istesso, ò figura di tre lati) si può diuidere in qual gran numero di Triangoli si vogli, ma il minor numero de Triangoli in che ella si possa diuidere è determinato, & è sempre 2. manco del numero de' suoi lati, perche ne vna sola retta, ne due possono serrare superficie, ma ne bisognano almeno tre però il Triangolo, ò figura di tre lati (& perciò di tre angoli) è la prima figura di linee rette, & si diuide almeno in vn solo Triangolo, che è lei stessa intiera. La figura poi di quattro lati è la seconda di linee rette, & si diuide in dui Triangoli almeno. La figura di 5. lati è la terza, & si diuide in tre Triangoli almeno, & cosi seguendo ogni figura rettilinea si diuide almeno in tanto numero di Triangoli quāto è il numero per ordine d'essa figura, che si troua cauando 2. dal numero de suoi lati (perche ne di vna retta, ne di due si troua alcuna figura) Onde d'vna figura poniamo di 20 lati volendo sapere à quanti angoli retti siano eguali i suoi 20. angoli, noi cauaremo 2. da 20 & resta 18. qual 18. mostra, che ella è per ordine la decima ottaua figura, & perciò 18. è il minor numero de' Triangoli in che ella si possa diuidere, gl'angoli tutti de quali siano contenuti precise, & però eguali à gl'angoli tutti della figura, per il che doppiando questo 18. che fa 36. diremo che li 20. angoli d'essa figura sono eguali à 36. retti, onde se ella fusse equiangola, ciascuno delli suoi 20. angoli importarebbe 1. retto, & $\frac{4}{5}$.

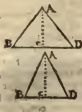
Si può ancora notare, che di qual si vogli figura i lati della quale si possano di mano in mano per ordine seguire per vn medesimo verso ad allungarsi tutti fuori della figura formando tanti angoli esterni fuori d'essa, quanti sono gl'interiori della istessa figura, la somma di tutti essi angoli estrinseci, ò esteriori è sempre eguale à quattro retti. Perche essendo, che la somma di qual si vogli de gl'angoli interiori con il suo esteriore è sempre eguale à 2. retti, ne segue, che la somma di tutti li interiori con li suoi esteriori sia eguale à due volte tanti retti quāto è il numero de gl'angoli (ò lati) d'essa figura. ma gl'angoli interiori solo della medesima figura sono anc'essi eguali à due volte tanti retti quanto e il numero de gl'angoli d'essa manco quattro però à questi quattro retti couiene, che sia eguale la sōma di tutti gl'angoli esteriori. Che per essempio nella figura del margine di 7. lati, quali tutti per vn medesimo verso sono allungati, formando 7. angoli fuori della figura. Essi 7. angoli esteriori con li 7. interiori sono quanto 2. volte 7. cioe 14. retti, ma li soli 7. interiori sono eguali à 2. volte 7. fa 14. manco 4. cioe à 10. retti, però alli restanti 4. retti conuiene, che siano eguali li 7. esteriori detti.

Ancora d'vna figura di 5. lati, tale che allungando ciascun lato da ciascuna delle sue due bāde, le linee, ò allungamenti tutti concorrano insieme formando 5. angoli (*come si vede auuenire nella figura del margine a n o r s, che li angoli formati dalli 5. & 5. allungamenti sono li c S A, S A, & sono anco formati cinqui Triangoli fuori d'essa figura*) questi 5. angoli sono eguali a soli 2. retti. Perche, preso vno delli 5. Triangoli cosi formati fuori della figura, poniamo il c a s; consideraremo che il suo angolo a, è estrinseco del Triangolo a A A, del lato A a, allungato in c, però esso angolo a, estrinseco e eguale alla somma delli dui intrinsici oppostili A, & A. Ancora l'angolo s, del medesimo Triangoletto c a s, e estrinseco del Triangolo s S S, del lato s S. allungato in c, però e eguale alla somma delli dui angoli interiori oppostili S S, onde cosi alli dui angoli a, & s, del Triangoletto a c s, come alli 4. detti A A S S, gionto il quinto c, che serue anco al Triangoletto a s c, la somma di tutti li 5. angoli A A S S c, detti sarà eguale alla somma delli 3. a s c, del Triangoletto a s c, ma questi 3. del Triangoletto sono sempre eguali à 2 retti; però ancora li 5. formati fuori del Pentagono detto saranno eguali à 2. angoli retti, cioe la somma loro è quanto 2. retti, che e quello, che occorreua mostrare.

Co-

Corollario.

DA questa 32. Propositione si manifesta, ò conosce, che, che li tre angoli di qual si vogli Triangolo sono eguali alla somma, ò composto delli tre angoli di qual si vogli altro Triangolo; poi che cosi quelli dell'vn Triangolo come quelli dell'altro sono eguali à dui retti. Per il che quando di dui Triangoli dati i dui angoli dell'vno siano eguali à dui angoli dell'altro, ancora di necessità il restante angolo dell'vno sarà eguale al restante angolo dell'altro, & però essi dui Triangoli saranno fra loro eguiangoli.

Corollario Secondo.

ANcora si conosce, che in ogni Triangolo rettangolo Equierute (cioè, che habbi i dui lati continenti l'angolo retto eguali l'vno all'altro) ciascuno de gl'altri dui angoli, è semiretto, ò vogliamo dire mezo retto perche intesa per base la linea opposta all'angolo retto sopra alla quale staranno li dui angoli detti, essi per essere opposti alli dui lati eguali saranno (per la prima parte della quinta propositione) eguali fra loro, & perche li tre angoli d'esso Triangolo, so eguali à dui retti, essendouene vno retto, resta che la somma de gl'altri dui sia vn'altro retto, & perche essi dui sono eguali fra loro, ciascuno d'essi sarà la mità di detta somma loro, cioè sara la mità d'vn retto. Et se dall'angolo retto del Triangolo rettangolo Equicrure si tirarà vna perpendicolare al lato oppostoli ella diuiderà il suo angolo retto, & anco esso lato oppostoli in due parti eguali, & di più diuiderà il totale Triangolo in dui Triangoli similmente rettangoli Equicrurij, che nel Triangolo rettangolo b a d, dell'angolo retto a, tirata alla subtensa b d, la perpendicolare a c, & considerati i dui Triangoli rettangoli a c b, a c d, ne i quali oltre l'essere l'angolo retto a c b, dell'vno eguale all'angolo retto a c d, dell'altro, ancora l'angolo b, è eguale all'angolo d, & per ciò il restante angolo b a c, dell'vno, eguale al restante angolo d a c, dell'altro, ne segue, che essendo questi dui restanti angoli detti le due parti dell'angolo retto a, che egli sia diuiso in due parti eguali, & che per ciò ciascuno d'essi dui angoli b a c, d a c, sia mezo retto, onde nel Triangolo a c b, essendo li dui angoli c à b, & b. eguali, ancora i dui lati b c, & a c, oppositi ad essi angoli eguali saranno (per la 6. propositione) eguali fra loro. Et similmente nel Triangolo rettangolo a c d, i dui lati a c, d c, saranno eguali fra loro, & perche ciascuna delle due rette b c, d c, è eguale alla a c, esse due b c, d c, saranno eguali fra loro, per ilche la totale retta b d, sara diuisa in c, in due parti eguali dalla perpendicolare a c, & ciascuno delli dui Triangoli rettangoli sara Isoscele, ò Equicrure come si voleua mostrare.

Corollario Terzo.

SI conosce ancora che ciascun'ang. del Triãg. Equilat. & però Equiang. è $\frac{2}{3}$. di retto, poiche ciascuno d'essi è l'$\frac{1}{3}$. di dui retti. Et che da qual si vogli de suoi angoli alla oppostali base tirata vna perpendicolare, ella diuide esso angolo, & anco la base oppostali per mezo, & però si formaranno dui Triangoli rettangoli eguali, in ciascuno de quali sarà vn'angolo di $\frac{1}{3}$. di retto & vn'altro di $\frac{2}{3}$. di retto. Che nel Triangolo Equilatero b a d, dall'a, tirata la perpendicolare a c, al lato oppostoli b d, ella diuiderà (come s'è veduto nel superiore secondo Corollario) l'angolo b a d, in due parti eguali, & per ciò ciascuna d'esse sarà $\frac{1}{3}$. di retto, & anco la base b d, in due parti eguali, onde b c, sara eguale à d c, & per che l'angolo b, è $\frac{2}{3}$. di retto, come anco il d, si conosce che li dui Triangoli rettangoli a c b, a c d, sono eguali, essendo li 3. lati dell'vno eguali alli 3. lati loro corispondenti dell'altro, & che li suoi angoli in ciascuno importano 1. retto, $\frac{1}{3}$. di retto, & $\frac{2}{3}$. di retto; cioe che l'angolo mezzano è doppio al minore, & il maggiore è triplo ad esso minore.

Propositione 33. Theorema 23.

SE date due linee eguale, & equidistanti da vn termine dell'vna all'vn termine all'altra da vna istessa parte d'esse si tiri vna retta, & anco dall'altro termine dell'vna all'altro termine dell'altra dall'altra parte d'esse si tiri vn'altra linea retta, queste due rette tirate, saranno anc'elle fra loro eguali, & equidistanti.

Siano le due rette A B, C D, eguali, & equidistanti, & dall'A, al C, loro termini sinistri si tiri la A C, & anco dalli loro termini B, & D, destri si tiri la retta B D, si dice che queste due tirate, A C, B D, saranno anc'elle eguali, & equidistanti fra loro. Per dimostrarlo. Nel Quadrilatero cosi formato A C B B, si tiri vno delli suoi dui diametri, cioè vna retta, che vada da vn'angolo, allo à lui opposito angolo, & sia il C B, che considerate le due rette equidistanti A B, C D, sopra alle quali cade la B C, ne segue (per la 29. propositione) che l'angolo A B C, sia eguale allo à lui alterno D C B, onde nelli dui Triangoli A B C, D C B, perche li dui lati A B, B C, dell'vno cō l'angolo A B C, da loro contenuto sono equali alli dui lati D C, C B, cō l'angolo D C B, da loro contenuto dell'altro, ne segue che anco la base A C, dell'vno (per la quarta propositione) sia eguale alla base B D, dell'altro, & gl'altri angoli dell'vno à gl'altri angoli à loro corispondenti dell'altro, perilche l'angolo A C B, dell'vno contenuto dalla base A C, & diametro C B, sarà eguale all'angolo D B C, dell'altro contenuto similmente dalla base B D, & diametro B C, ma questi dui angoli A C B, D B C, sono alterni delle due rette A C, D B, sopra alle quali cade la B C, & sono eguali, però (per la 27. propositione) esse due rette A C, D B, sono equidistanti, ma di più già si è mostrato, che esse sono eguali, però è chiaro, che esse A C, B D, sono eguali, & equidistanti, come si voleua mostrare.

Propositione 34. Theorema 24.

Ogni quadrilatero di lati equidistanti hà i lati, & gl'angoli oppositi eguali fra loro, & il diametro lo diuide in due parti eguali.

Sia il Quadrilatero a c d r, di lati equidistanti, cioè a c, equidistante ad r d, & a r, à c d, & in esso si tiri qual si vogli di suoi dui diametri r c, ouero a d, hor sia a d; Si dice che egli diuide esso Quadrilatero in due parti eguali, & che il lato a c, è eguale allo à lui equidistante r d, & anco l'a r, al c d, & l'angolo c, eguale al suo opposito r, & il c a r, al c d r. Dimostratione. Per che sopra alle due rette equidistanti a c, r d, cade la a d, ne segue (per la 29. propositione) che l'angolo c a d, sia eguale allo à lui alterno r d a, & per che sopra alle due rette equidistanti r a, c d, cade la istessa a d, ne segue (per la medesima 29. propositione) che l'angolo r a d, sia eguale allo à lui alterno c d a, onde per che essendo diuiso ciascuno delli dui angoli r a c, c d r, in due parti, la prima parte dell'vno, è eguale alla prima parte dell'altro, & la seconda alla seconda, ne segue, che anco tutto l'vn'angolo r a c, sia eguale à tutto l'altro c d r, à lui opposto nel quadrilatero dato a c d r, di lati equidistanti. Ancora considerati i dui Triangoli a r d, d c a, per che il lato, ò base a d, dell'vno, è eguale al lato, ò base d a, dell'altro, che è vna istessa, & li dui angoli r a d, r d a, dell'vno stanti sopra à detta base sono eguali alli dui angoli c d a, & c a d, stanti sopra alla medesima base dell'altro, ne segue (per la 26. propositione) che anco il restante angolo r, dell'vno, sia eguale al restante angolo c, dell'altro (che sono oppositi nel Quadrilatero dato) & gli restanti dui lati dell'vno alli restanti dui lati dell'altro, ciascuno al suo corispondente, cioè il d r, al c a, & l'a r, al c d, che & quelli, & questi sono lati contrapositi nel Quadrilatero dato) & l'vn Triangolo all'altro; ma questi dui Triangoli sono le due parti nelle quali è diuiso il Quadrilatero dato dal suo diametro d a, però egli lo diuide in due parti eguali, come restaua à prouare, essendo già prouato in esso Quadrilatero i suoi angoli, & lati contrapositi essere eguali fra loro.

Si possono hora mostrare alcun'altre cose seguenti, & facili di qui dependenti.

Ogni Quadrilatero che hà i lati oppositi eguali è Paralello grammo, cioè di lati equidistanti.

Si può notare, che le figure Quadrilatere di lati equidistanti si sogliono chiamare Paralello gramme, Et se hanno oltre di ciò tutti i suoi quattro angoli retti si chiamano Paralello gramme rettangole, come sono il Quadrato, & il Quadrangolo rettangolo (più lungo, che largo) Ma se elle non hanno gl'angoli retti si chiamano Paralello gramme non rettangole, come sono il Rombo, & il Romboide, & queste figure Quadrilatere per commodità si sogliono nominare breuemente con le due sole lettere, ò segni contraposite in essi, cioè in vece dire il Quadrilatero, ò Paralello grammo a c o r, si dice il Quadrilatero, ò Paralello grammo r c, ouero con l'altre opposite l'a o; Hor sia nel Quadrilatero a r o c, il lato a c, eguale allo à lui opposito r o, & l'a r, al c o, si dice, che a c, sarà equidistante ad r o, & a r, ad o c. Per che in esso Quadrilatero tirato vno de suoi dui diametri poniamo il c r, & inteso lo base delli dui Triangoli r a c, & c o r; perche di più il primo lato a c, dell'vno è dal supposito eguale a lprimo lato o r, dell'altro, & i

O secon-

secondo lato a r, eguale al secondo lato o c, ne segue (per la ottaua propositione) che gl'angoli dell'vno siano eguali à gl'angoli dell'altro, ciascuno al suo corrispondete, & però l'angolo a c r, contenuto dal primo lato, & base dell'vn Triangolo sarà eguale all'angolo a r c, contenuto similmente dal primo lato, & base dell'altro, ma questi dui angoli detti sono alterni delle due rette a c, o r, sopra alle quali cade la c r, però (per 27. propositione) esse due rette a c, o r, opposti lati nel quadrilatero dato sono fra loro equidistanti; Et ancora nelli Triangoli medesimi l'angolo a r c, contenuto dal secondo lato, & base dell'vno, sara eguale all'angolo o c r, contenuto similmente dal secondo lato, & base dell'altro Triangolo, ma questi dui angoli eguali detti a r c, o c r, sono alterni delle due rette a r, c o, sopra alle quali cade la retta r c, però (per la sopradetta 27. propositione) esse due rette a r, o c, sono equidistanti fra loro, che sono gl'altri dui lati contrapositi nel Quadrilatero dato, però è chiaro che egli è Paralellogrammo.

Ancora Ogni Quadrilatero che habbi gl'angoli oppositi eguali è Paralello grammo cioè di lati equidistanti.

Nel Quadrilatero a c o r, sia l'angolo a, eguale allo à lui opposto o, & il c, all'r, si dice esso Quadrilatero hauere i lati contrapositi equidistanti. Dimostratione. Perche l'angolo a, è eguale all'o, & l'r, al c, ne segue che la somma delli dui a, & r, sia eguale alla somma delli dui o, & c, onde ciascuna d'esse due somme sarà la mità della somma di tutti li 4. angoli a, r, o, c, del Quadrilatero, & però sarà la mità di quattro retti, alli quali sono eguali detti quattro angoli del quadrilatero, ciascuna dunque d'esse due somme che è la mità di quattro retti importarà, ò sarà quanto dui retti, onde considerate le due rette a c, r o, sopra alle quali cade la r a, (ouero c o,) & la somma delli dui angoli interni da vna medesima bāda a, & r, (ouero o, & c, è eguale à 2. retti ne segue (per la 28. propositione) che esse due linee a c, r o, siano equidistanti fra loro. Ancora perche la somma delli dui angoli a, & c, è eguale alla somma delli dui o, & r, & però ciascuna somma è la mità delli quattro angoli del quadrilatero, & perciò è la mità di quattro angoli retti, & perciò è ciascuna d'esse due somme eguale à dui retti, considerate le due linee a r, c o, sopra alle quali cade la a c, (ouero o r,) facendosi la somma delli dui angoli interni a, & c, (ouero o, & r,) eguale à dui retti, ne segue (per la 28. propositione) che le due rette a r, c o, siano equidistanti; Il Quadrilatero dunque dato a c o r, di angoli oppositi eguali è Paralello grammo come si volena morare.

Di qui anco si manifesta che ogni Quadrilatero, quale habbi ciascuno delli suoi quattro angoli retti è paralello grammo, poiche nel Quadrilatero a c o r, se ciascuno angolo fusse retto la somma delli dui a, & r, ouero c, & o, saria eguale à 2. retti, & però le due rette a c, r o, sariano similmente equidistanti. Et cosi anco la somma delli dui angoli a, & c, ouero r, & ò saria pure eguale à dui retti, & però le due linee a r, c o, sariano anc'elle equidistanti.

Ancora si conosce che in vn paralello grammo quando vi è vn'angolo retto egli di necessità è rettangolo, cioè che ciascuno de gl'altri tre angoli d'esso è similmente retto. Che nel paralello gramo a r o c, essendo l'angolo a retto, perche le due linee a c, r o, sono equidistanti sopra alle quali cade la a r, ne segue (per la 29. propositione) che la sōma delli dui angoli interni a, & r, da vna istessa banda, sia eguale à dui angoli retti, onde essendo l'vno d'essi cioè l'a, retto, ancora l'altro r, sara retto, che è il restante à dui retti. Et (per la 34. propositione) essendo l'angolo a, retto, ancora lo à lui opposito o, sara retto, Et similmente essendo l'angolo r, retto, di necessità ancora il c, à lui opposito sara retto, & perciò tutti gl'angoli del paralello grammo saranno retti, & egli si chiamarà paralellogrammo rettangolo, che anco per breuità si suole chiamare rettangolo, tacendo la parola paralello grammo, poi che ogni Quadrilatero rettangolo (cioè che hà quattro angoli retti) di necessità è Paralello grammo, cioè ha i lati contrapositi equidistanti come si è mostrato disopra auuenire alli Quadrilateri che hanno gl'angoli contrapositi eguali.

Ancora non solo il diametro del Paralello grammo diuide esso Paralello grammo per mezo, ma ancora ciascuna linea retta, che diuidendo il diametro per mezo arriui da ciascuna banda a i lati del Paralello grammo diuidera ancora il Paralello grammo in due parti eguali. Che nel Paralello grammo a c d g, tirato vno de suoi dui diametri, poniamo il d a, & diuiso per mezo in o, se per il punto o, passara vna retta, che arriui da ciascuna banda alli lati del palarello grammo, & sia n o s, ella diuidera esso paralello grammo in due parti eguali, che saranno i dui quadrilateri a c s n, & d g n s. Perche considerati i dui Triangoli a n o, d s o, l'angolo n a o, dell'vno

è eguale

è egu a'e all'angolo s d o, dell'altro (che sono alterni nelle due rette equidistanti a g, d c, sopra alle quali cade la a d,) & l'angolo a o n, dell'vno, è eguale all'angolo d o s, dell'altro (che sono oppositi delle due rette a d, n s, che si segano in o, & di più il lato a o, dell'vno sopra al quale stanno li dui angoli detti, è eguale al lato d o, dell'altro sopra al quale stanno similmente i dui suoi angoli detti, onde (per la 26. propositione) l'vn Triangolo è eguale all'altro, perilche à ciascuno d'essi dui Triangoli a n o, d s o, giongendo il Quadrilatero n o d g, alla somma da vna banda che sarà il Triangolo a d g, mità del Paralello grammo dato, sarà eguale la somma dell'altra, che sara il quadrilatero s n g d, però questo Quadrilatero s n g d, sara anc'egli la mità del paralello grammo dato (Ouero à ciascuno delli Triangoli a n o, d s o, giongendo il Quadrilatero c a o s, alla somma da vna banda, che sara il Triangolo c a d, mità del Paralello grammo dato sara eguale la somma dall'altra che sara il Quadrilatero c a n s, però questo quadrilatero c a n s, sara anc'egli la mità del paralello grammo dato, per il che l'altra mità sara l'altro quadrilatero, quali dui Quadrilateri perciò saranno eguali fra loro, & cosi il paralello grammo dato sarà diuiso in due parti eguali con la retta n s, diuidente il diametro a d, per mezo in o.

Di qui si conosce che dato vn punto in vn paralello grammo, ò sopra ad vno de' suoi lati, ò anco fuori del paralello grammo, si può da esso punto tirare vna linea retta che arriuando da ciascuna banda a i lati del Paralello grammo lo diuida per mezo. Che dato il Paralello grammo a b c d, & in esso il punto o, ò sia egli in vno de suoi lati, ò dentro al paralello grammo, ò fuori. Se tiraremo vno de suoi diametri a c, ouero b d, & lo diuideremo per mezo in l, & dal punto dato o, tiraremo la retta l o, allungandola da ciascuna parte quanto occorra, finche arriui alli dui lati opposti del paralello grammo, & sia in r, & s, questa retta r o l s, diuiderà (come s'è mostrato) il paralello grammo in due parti eguali, che saranno i dui quadrilateri s r b a, & s r e d.

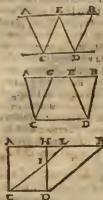
Si conosce anco che nelli Paralello grammi tirati i suoi dui diametri essi diametri si segano fra loro in due parti eguali. Che nel paralello grammo a b c d, tirati i dui diametri a d, b c, che si segano in s. Perche sopra alle due equidistanti a c, b d, cade la retta a d, ne segue che l'angolo c a d, sia eguale allo à lui coalterno b d a, Et perche sopra alle medesime due equidistanti a c, d b, cade la b c, ne segue che l'angolo a c b, sia eguale allo a lui alterno d b c, Onde considerati i dui Triangoli a c s, d b s, per che i dui angoli a, & c, dell'vno con il lato a c, sopra al quale essi stanno, sono eguali alli dui angoli d, & b, dell'altro con il lato d b, sopra al quale essi stanno, ne segue (per la 26. propositione) che gl'altri dui lati dell'vno siano eguali alli altri dui lati dell'altro ciascuno al suo corispondente, cioè il lato a s, al d s, & il c s, al b s. La a d, dunque sara diuisa in s, in due parti eguali a s, d s, Et la b c, similmente sara diuisa nell'istesso punto s, in due parti eguali c s, b s, come si voleua mostrare.

Propositione 35. Theorema 25.

LE superficie Paralellogramme, ò vogliamo dire quadrilatere di lati equidistanti, fatte sopra ad vna istessa base, & fra medesime linee equidistanti sono fra loro eguali.

Siano le due rette A B, C D, equidistanti, & sia la C D, base di dui paralello grammi di ciascuno de quali il lato opposito, & però eguale à questa base C D, sia nella retta A B, equidistante alla base. & dell'vno il lato opposto alla C D, sia A E, & dell'altro l'E B, essendo li dui paralello grammi A C D E, E C D B, (*che cosi si intendono essere fra medesime rette equidistanti, cioè quando delli dui lati oppositi d'essi l'vno è in vna delle due equidistanti, & l'altro nell'altra*) si dice che esse due superficie sono eguali fra loro; Dimostratione. Per che nel Paralello grammo A C D E, il diametro C E, lo diuide per mezo (per la antecedente 34. propositione) ne segue che esso paralello grammo sia doppio al Triangolo C D E, sua mità; Et perche nell'altro paralello grammo E C D B, il diametro D E, similmente lo diuide per mezo, ne segue, che anc'egli sia doppio al Triangolo detto C D E, dunque ciascuno delli dui paralello grammo detti è doppio ad vna medesma superficie, ò Triangolo C D E, perilche ne segue (per la 6. Comune Concessione) che essi dui Paralello grammo siano eguali fra loro.

Ma

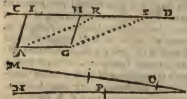
Ma se li dui paralellogrammi non habbino nella retta A B, vn medesimo punto E, comune, ma il lato superiore dell'vno occupi parte del lato superiore dell'altro, come auuiene nelli dui Paralellogrammi A C D E, G C D B, che il lato G D, del secondo occupa la parte G E, del lato A E, del primo. All'hora considerati i dui Triangoli G A C, & B E D, il lato A C, del primo è eguale al lato E D, del secondo, perche sono oppositi nel paralellogrãmo A C D E, & il lato G C, del 1. è eguale al lato B D, del 2. perche sono oppositi similmente nel paralellogr. G C D B. Ancora l'vltimo lato A G, del primo è eguale all'vltimo lato E B, del secondo (che esse A G, & E B, sono i restanti delle due rette A E, G B, eguali lati delli dui paralellogrammi (che ciascun di loro è eguale all'opposto C D) leuatone la parte commune G E,) onde per la ottaua propositione) il primo G A C, sara eguale al secondo B E D, hora à ciascun d'essi dui Triangoli eguali giungẽdo il quadrilatero G C D E, ne segue che l'vna somma quale è il paralellogrammo A C D E, sara eguale all'altra somma che è il paralellogrammo G C D E, sono dunque essi dui paralellogrammi eguali come si voleua prouare.

Et se li dui paralellogrammi nella A B, non habbino alcuna parte d'essa comune, come auuiene nelli dui A C D H, L C D B, che il superiore lato A H, dell'vno, & il superiore lato L B, dell'altro, sono intieramente diuersi, & terminati in tutto da diuersi punti; perche essi lati A H, L B, sono eguali ciascun debito, all'oppositi C D, essi A H, L B, saranno eguali fra loro, onde à ciascuno d'essi inteso giunto la retta H L, l'vna somma A L, sara eguale all'altra somma H B. Et considerati i dui Triangoli A L C, H B D, essi saranno eguali fra loro (per la ottaua propositione) che il primo lato A L, già sappiamo essere eguale al primo lato H B, il secondo A C, al secondo H D, (essendo oppositi nel paralellogrammo A C D H) & il terzo lato L C, eguale al terzo lato B D, (che sono lati oppositi del paralellogrammo L C D B, onde da ciascuno d'essi dui Triangoli A L C, H D B, leuato il comune Triangoletto H I L, ne segue che il Quadrilatero A C I H, che resta dell'vn Triangolo sia eguale al quadrilatero B L I D, che resta dell'altro. Et hora à ciascuno d'essi dui quadrilateri eguali giunto il Triangoletto C I D, ne segue che la sõma da bãda che è il paralellogrammo A C D H, sia eguale alla somma dall'altra banda che è il paralellogrammo L C D B, che è quanto occorreua mostrare.

Propositione 36. Theorema 26.

I Paralellogrammi constituiti, ò formati fra medesme linee rette equidistanti, & sopra à basi eguali sono eguali fra loro.

Sianno le due rette A B, C D, equidistanti, & nella C D, prese le due C E, I D, eguali si intenda sopra ad esse, & fra dette due equidistanti trouarsi li dui paralellogrammi A C E G, O I D B, si dice che essi sono eguali fra loro. Dimostratione. Dal C, termine sinistro del lato inferiore C E, del primo paralellogrammo all'O, termine sinistro del lato superiore O B, del secondo paralellogrammo, si tiri, ò imagini la retta C O, & ancodal termine destro E, della C E, al termine similmente destro B, dello O B, intesa tirata la retta E B, esse C O, E B, insieme con le C E, O B, formaranno il Quadrilatero O C E B, che sara paralellogrammo, per che essendo già le due rette C E, O B, eguali, & equidistanti (che ciascuna di loro è eguale alla I D) ancora le due C O, & E B, che le congiungono insieme (per la 33. propositione) saranno eguali, & equidistanti fra loro. Hora intesi i dui paralellogrammi A C E G, O C E B, formati sopra ad vna base C E, & fra medesme equidistãti C D, A B, l'vno perciò (per la antecedente 35. propositione) sara eguale all'altro. Ancora intesi i dui paralellogrammi O I D B, O C E B, formati sopra ad vna istessa base O B, & fra medesme equidistanti C D, A B, l'vno per ciò sara similmente eguale all'altro, cioè ciascuno delli dui paralellogrammi A C E G, O I D B, sara eguale ad vn'istesso O C E B, per il che essi dui A C E G, O I D B, saranno ancora eguali fra loro come si è proposto di mostrare.

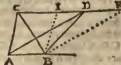
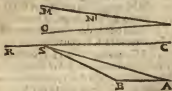
Di qui si può auuertire che li paralellogrammi possono essere eguale fra loro (cioè la superficie

ficie dell'altro) & nondimeno il giro dell'vno essere diuerso del giro dell'altro, che li Parallelogrammi A C E G, B O C E, Ouero li B O I D, B O C E, sono eguali fra loro, benche il giro del B O C E, sia molto maggiore del giro di qualsiuogli de gl'altri dui, per che la retta C O, è più lunga della C A, ò della O I; Et dato vn parallellogrammo si può fra le medesime due rette fra le quali sia inteso egli essere formato, & sopra alla sua istessa base (ò sopra à base à quella eguale presa fra le medesme equistanti) formare vn paralellogrammo, che sia à quello eguale, & giri quanto più d'esso si vogli. Che essendo fra le due equidistanti A B, C D, & sopra alla base A G, formato il paralellogrammo A G H I, & data la linea M N, maggiore del giro A G H I, in essa M N, da vn termine, & sia M, segnaremo la M O, eguale alle somma della base A G, & della à lei oppositi H I, ò vogliamo dire doppia alla base A B, & diuideremo la restante D N, in due parti eguali in P, poi fatto centro vna delle due estremità della A G, & sia la A, & semidiametro vna delle due mità della O N, segnaremo vna circonferenza, ò arco, che seghi la C D, allungata se bisogni (& la segarà essendo la O P, maggiore dal supposito della A S, dãdosi la M N, maggiore del giro A G H I) & iui segnaremo il punto R, tirando poi la retta R A, & dall'R, sù la C D, dalla banda dell'altro estremo G, della base A G, segnaremo la R S, eguale ad essa base A G, & tiraremo la S G, quale (per la 33. propositione sarà eguale, & equidistante alla R A, (si come la R S, è eguale, & equidistante alla A G) però la somma loro sarà eguale alla somma delle due O P, P N, & la somma delle R S, & A G, è eguale alla M O, onde alla data M N, è eguale il giro A G S R, del paralellogrammo A G S R, formato, quale, perche è sù la istessa base A G, & fra le istesse equidistanti A B C D, doue è il proposto A G H S, è anco à lui eguale come si voleua fare.

Si può anco auertire, che sopra ad vna istessa base, & fra medesime due rette paralelle il paralellogrãmo di minor giro, che si possa fare il è il rettang. (perche da vn punto segnato in vna delle paralelle, & sia l'A, (nella A B, paralella alla C D) tirãdo vna perpendicolare alla C D, che sarà anco perpendicolare alla istessa A B, (perche li dui angoli A, & C, così da vna banda come dall'altra sono eguali à dui angoli retti) ella sarà la più corta linea, che dall'A, si possa tirare alla C D, per che intesanene tirata qual si vogli altra, poniamo la A r, haueremo il Triangolo rettangolo A C r, nel quale, per ché dell'angolo C, retto, è minore l'angolo r, ancora il lato C A, che si oppone all'angolo r, minore, è minore del lato A r, che si oppone all'angolo C, maggiore) per il che dicendo, sù la base A B, & fra le due paralelle A B, C D, formisi vn paralellogrammo il giro del quale sia quanto la retta M N, sempre che questa retta M N, non sia minore del giro del paralellogrammo rettangolo, che sù la base data, & paralelle proposte si formasse, cioè hora che non sia minore del doppio della somma delle A B, A C, semigiro del paralellogrammo rettangolo detto, il Problema si potrà esequire nel modo mostrato di sopra, ne importarà se essa M N, sia minore, ò maggiore del giro d'vn'altro paralellogrammo (non rettangolo però) che già sopra ad essa base, & fra le istesse paralelle fusse formato.

Propositione 37. Theorema 27.

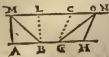
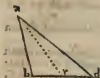
LI Triangoli formati sopra ad vna istessa base, & fra due medesime linee equidistanti sono eguali fra loro.

Siano li dui Triangoli A B C, A B D, formati sopra la istessa base A B, & fra le medesime paralelle A B, C D, (arriuando cioè ciascun d'essi con la sua sommità angolare alla C D,) si dice che essi dui Triangoli sono eguali l'vno all'altro. Per dimostrarlo. Da vno delli dui termini della base comune A B, poniamo dal B, si tiri la retta B I, equidistante al lato oppostoli A C, del primo Triangolo A B C, & la retta B R, equidistante al lato oppostoli A D, del secondo Triangolo A B D, considerato il paralellogrammo A B I C, & anco l'A B R D, perche essi sono formati sopra ad vn'istessa base A B, & fra le medesme paralelle A B, C D, essi sono eguali, & perche l'vno A B I C, è diuiso in due parti eguali dal suo diametro B C, il nostro primo Triangolo

A B C, farà la sua mità, Et similmẽte perche l'altro A B R D, è diuiso dal suo diametro B D, in due parti eguali, il nostro secondo Triang. A B D, fara la sua mità però essi dui Triangoli essendo la mità di due superficie eguali, anc'essi (per la 7. Comune Concessione) saranno eguali fra loro, come si voleua prouare.

Qui anco si conosce che i Triangoli possono essere eguali fra loro, & diuersi di giro, che si vede il Triangôlo A D B, che è eguale all'A B C, hauere molto maggior giro, che detto A B C, & quanto più il punto superiore D, si allôtanasse dal D, verso R, tanto più si accrescería il giro del Triang. poi che ciascuna delle due linee, ò lati che si partissero dalli termini A, & B, della base, sariano l'vna maggiore della A D, & l'altra maggiore della B D. Et se volessimo sù la base A B, & fra le medesime equidistanti A B, C R, (inteso allungarsi la C R, quanto occorresse) formare vn Triangolo di che maggiore giro si vogli poniamo, che girasse quanto è la lunghezza della retta M O, noi praticalmente lo potressimo fare così. Nella M O, da vn termine M, segnata la M N, eguale alla base A B, il restante N O, faria il giro, ò lunghezza delli dui restanti lati del Triangolo, onde con vn filo, ò spago presa la lunghezza N O, & fermato vn capo del filo d'essa lunghezza nel termine A, della base, & l'altro Capo nel termine B, & dentro del filo posto vno stilo, & condottolo sù la C R, finche egli più sù essa C R, non si possa dalla istessa banda condurre stando tirata ciascuna parte del filo, quanto più si possa, formando due linee rette, & doue questo occorra segnato il punto S, le due parti A S, B S, del filo segnaranno i dui lati del Triang. & così esso Triangolo sara l'A B S, che il suo giro, ò somma delle sue tre rette A B, A S, B S, sara quanto è la lunghezza M O, proposta.

L'esequir mò questo Geometricamente, come anco il mostrare, che il minor giro, che possa hauere vn Triangolo formato sù vna base A B, & fra due medesime equidistanti A B, C R, occorre quando il Triangolo è rettangolo, cioè che vn suo lato è perpendicolare alla base da vno de' suoi termini A, ouero B, si potrà mostrare ad altro tempo, ò vederlo nel nostro Orto Mathematico, non si potendo intendere senza la cognitione di molte cose non ancora mostrate.

Propositione 38. Theorema 28.

LI Triangoli formati sopra à basi eguali, & fra medesime linee equidistanti sono eguali fra loro.

Sopra alle due basi eguali A *B*, G H, & fra le medesime equidistanti A H, M N, siano formati i dui Triangoli A *B* M, G H O, si dice che essi sono eguali per dimostrarlo. Dall'vno de' dui termini della base A *B*, poniamo dal *B*. si tiri vna retta equidistante al lato oppostoli A M. che arriui alla superiore M N, & sia in L, che così il Quadrilatero A *B* L M, sara di lati equidistanti, & il diametro *B* M, in esso lo diuiderà in due parti eguali, onde il Triangolo A *B* M, farà la sua mità, Ancora dall'vno delli dui termini dell'altra base G H, poniamo dal G, si tiri vna retta equidistãte al lato oppostoli H O, che arriui alla superiore M N, & sia in, C che così il quadrilatero GHOC, sara di lati equidistanti, & il diametro G O, in esso lo diuiderò in due parti eguali, onde il Triangolo G H O, farà la sua mità, ma essi dui parallelogrammi A *B* L M, G H O C, sono eguali (perche sono formati sopra alle due basi eguali A *B*, G H, & fra due medesime equidistanti A H, M N,) però anco le mità loro cioè i nostri dui Triangoli A *B* M, G H O, saranno eguali fra loro, che è quello, che si voleua mostrare.

Di qui ancora si conosce, che se da vn'angolo d'alcun Triangolo si tirarà vna linea retta, che diuida il lato oppostoli in due parti eguali, ella diuiderà anco il Triãg. in 2. parti eguali, Che se la a r, dall'angolo a, del Triang. a b d, diuida la retta oppostali b d, in due parti eguali in r; perche inteso dal punto a, tirarsi vna paralella alla b d, li dui Triangoli a b r, a d r, saranno fra due medesime paralelle, & sopra eguali basi b r, d r, & però saranno eguali, onde ciascun d'essi fara la mità del Triangolo a b d.

Si può anco mediante questa cognitione da vn punto dato in vn lato d'alcun Triangolo, tirare vna retta, che lo diuida in due partie guali. Che se nel lato B C, del Triang. A B C, sia dato il punto D, se esso punto D, sia egualmẽte lontano dalli termini B, & C, cioè se egli sia nel mezzo del lato B C, all'hora da esso all'angolo A, tirata vna retta, ella sarà la diuidente il Triangolo in due parti eguali, che saranno li dui Triangoli partiali di basi eguali, ma se il punto D, sia più vicino ad vno estremo che all'altro, poniamo più vicino al B, segnaremo il pũto E, nel mezzo della B C, & dal punto D, all'angolo A, oppostoli si imagini, ò segni la a retta D A, alla quale dall'E, si tiri vna equidistante, segnando F, doue ella seghi il lato A C, dal quale F, al punto D, si tiri la retta F D, che ella diuiderà il Triang. dato in due parti eguali, che saranno il Triangolo F D C, & il Quadrilatero F A B D; per che segnata, ò intesa la retta E A, (che ciò dall'angolo A, al mezo della base, diuidendo il Triangolo A B C, in due parti eguali, che sono li dui Triangoli A B E, A C E,) & considerati i dui Triangoli A E F, D E F, per che essi sono formati sopra vna istessa base E F, & fra le due medesme equidistanti E F, D A, essi sono eguali fra loro, onde giontoli comunemente il Triangolo E F C, l'vna somma, che è il Triangolo F D C, sarà eguale all'altra, che è il Triangolo A E C, ma questa A E C, è la mità del Triangolo dato A B C, però anco l'altra somma F D C, sarà la mità del medesmo Triangolo A B C, onde il restante Quadrilatero B D F A, sarà l'altra mità. Et se il punto dato D, sia più vicino alla estremità C, che alla B, si operarà pure nel medesmo modo tirando la D A, & à questa equidistante dall'E, la E F, ma ella arriuarà al lato A B, in F, dal quale al D, tirata la F D, sarà la diuidente cercata, che il Triangolo F D B, sarà la mità del dato A B C, essendo il quadrilatero F D C A l'altra mità.

Propositione 39. Theorema 29.

I Triangoli formati sopra ad vna istessa base, quando siano eguali, saranno anco di necessità fra medeme linee equidistanti.

Siano sopra alla base A B, formati i dui Triangoli A B C, A B D, & siano eguali, si dice, che saranno anco fra medesme linee equidistanti, cioè, che dalla cima C, dell'vno, alla cima, ò sommità D, dell'altro tirata vna retta C D, ella sarà equidistante alla base A B. Perche se per l'Aduersario la C D, non sia equidistante alla A B, tirando per lui dal punto C, vna retta equidistante alla A B, ella perciò passarà, ò disopra al punto D, ò disotto hor sia se possibile è, che passi disopra, all'hora allunghisi vno delli dui lati del Triangolo A B D, poniamo il B D, tinche attiui à tale equidistante dell'Aduersario, & sia in E, dal quale E, fino al termine A, sù la base dell'altro lato del detto Triangolo si tiri la E A, & considerato il Triangolo E A B, che saria formato sù la base A B, & fra le due equidistanti A B, C E, come è anco il Triangolo C A B, esso E A B, perciò saria eguale al C A B, ma al medesmo C A B, è anco eguale per il supposito il D A B, però questi dui D A B, E A B, sariano eguali fra loro, ma il D A B, sarà parte dell'E A D, onde la parte saria eguale al tutto, che è impossibile, però impossibile è anco che dal C, tirata vna retta equidistante alla A B, ella vada disopra al punto D, ne meno potrà andare disotto, segando cioè i lati A D, B D, del Triangolo D A B. Perche, dicendosi per l'Aduersario ella potere essere la retta C t S, si mostrarà la impossibilità di ciò così. Dal punto t, del segamento del lato A D, all'angolo oppostoli B, del Triangolo D A B, ouero dal punto S, del segamento del lato D B, all'angolo oppostoli A, si tiri la retta S A, & considerato il Triangolo S A B, che saria formato sù la base A B, & fra le due equidistanti A B, C S, come è anco il Triangolo C A B, esso S A B, perciò saria eguale al C A B, ma al medesmo C A B, è anco eguale dal supposito il Triang. D A B, però à questo D A B, saria eguale l'S A B, ma egli è parte del D A B, però la parte saria eguale al tutto; ma questo è impossibile (cioè che la parte sia eguale al tutto) però impossibile è anco quello da che essa impossibilità si dedurria, cioè che dal C, tirando vna retta equidistante alla base A B, ella possa passare disotto al punto D, ne manco come si è mostrato può andare disopra dal D, però di necessità ella passarà per esso punto D, onde li dui Triangoli

angoli A B C, A B D; che sono sopra vna istessa base A B, saranno anco fra due medesme equidistanti A B, C D, come si voleua mostrare.

Di qui si può mostrare che vna linea retta, che seghi per mezo, ciascuno delli dui lati d'alcun Triangolo è di necessità equidistante alla base.

Che nel Triangolo A B C, se la retta D E, segarà il lato A B, & anco l'A C, in due parti eguali ella di necessità sarà equidistante alla base B C. Per che dall'E, al punto oppostoli B, della base tirata la retta E A, & anco dal D, al pūto oppostoli C, tirata la retta D C, & considerato i dui Triangoli A D E, B D E, per che saranno formati sopra à base eguali A D, D B, & fra medesme equidistanti (che arriuando ambidui con la cima, ò sommità loro in vn'istesso comun punto E, da esso si può tirare, ò imaginare vna retta equidistante alla A B, doue sono le loro eguali basi) l'vno E D B, è eguale all'altro E D A. Et ancora considerati i dui Triangoli E D C, E D A, che sono constituiti sopra eguali basi C E, E A; & fra medesme equidistanti (che hanno la sommità D, commune) l'vno sarà similmente eguale all'altro, cioè l'E D C, all'E D A, ma al medesimo E D A, si è mostrato essere anco eguale l'E D B, però questi dui E D B, E D C, sono anc'esse eguali fra loro, & perche di più sono sopra ad vna istessa base B E, di necessità uerranno anco ad essere fra due medesme rette equidistanti, onde alla retta B C, che passa per le sommità loro, sarà equidistante la D E, loro base, questa D E, dunque, che nel nostro Triangolo A B C, segni i suoi dui lati A B, A C, per mezo è equidistante alla sua base B C, come si voleua mostrare.

Di qui si può anco dedurre, che Ogni Quadrilatero che sia diuiso per mezo da ciascuno delli suoi dui diametri è necessariamente paralellogrammo, cioè hà i lati contrapositi fra loro equidistanti, & eguali. Che nel Quadrilatero A B C D, diuiso per mezo da ciascuno delli suoi dui diametri A C, B D, li dui Triangoli A B C, D B C, sono eguali (che ciascun d'essi è la mità del quadrilatero) & per che essi dui Triangoli sono sopra ad vna istessa base B C, essi di necessità sono anco fra medesme rette equidistanti, perilche la retta A D, doue peruengono con le loro sommità A, & D, sarà equidistante alla B C, base loro. Ancora li dui Triangoli A B C, A B D, sono eguali fra loro (che ciascun d'essi dal supposito è la mità del Quadrilatero) & perche essi sono sopra ad vna istessa base A B, saranno ancora fra medesme retto equidistanti, cioè la D C, sara quidistante alla A B, onde il quadrilatero A B C D, è contenuto da lati equidistanti come si voleua pronare.

Ancora Ogni Quadrilatero nel quale i suoi diametri si diuidono scambieuolmente per mezo è paralellogrammo cioè hà i lati equidistanti.

Che nel quadrilatero A B C D, diuidendosi i suoi dui diametri A C, B D, scambieuolmente per mezo nel punto O, li 4. Triangoli, che terminano nel comune punto O, sono eguali fra loro, per che il t, è eguale al T, essendo sopra à basi eguali B O, D O, & arriuando con le sommità loro al punto A. Et l'v, è eguale anc'egli al T, perche sono sopra à basi eguali A B, C O, & arriuano con le loro sommità al punto comune B, onde il t, è similmente eguale all'v, & è di più eguale al Z, perche sono sopra à basi eguali A O, C O, & hanno le loro sommità in vn medesmo punto D, la somma dunque delli dui T, & v, cioè il Triangolo A B C, sara eguale alla somma delli dui Z, & v, cioè al Triangolo D B C, onde perche questi dui Triangoli eguali A B C, D B C, sono sopra ad vna medesma base B C, saranno ancora fra medesme peralelle, cioè la retta A D, che congiunge le cime, ò sommità loro sara equidistante alla B C, base loro. Ancora il Triangolo C A B, inteso sù la base A B, composto dalli dui T, & v, sara eguale al Triangolo D A B, inteso fatto sù la medesma base A B, & composto delli dui T, & t, (eguali alli T, & v) perilche essi dui Triangoli eguali C A B, & D A B, saranno anco fra medesme linee equidistanti, onde la retta D C, che giunge le loro sōmità D, & C, sara equidistante alla base loro A B, è dunque chiaro il Quadrilatero A B C D, doue i dui suoi diametri si diuidono scambieuolmente per mezo essere Paralellogrammo, cioè hauere i lati contrapositi equidistanti, & perciò anco eguali.

Propositione 40. Theorema 30.

I Triangoli eguali, quando siano formati sopra à basi eguali d'vna medesima linea, & da vna medesma banda, saranno anco di necessità fra medesme due equidistanti.

Sù

Sù la retta A D, prese le due basi A B, C D, eguali, & sopra ad esse da vna medesima banda superiore formati i dui Triangoli G A B, H C D, che siano eguali, si dice che anco saranno fra linee equidistanti, cioè che dalla sommità G, alla H, tirata la retta G H, ella sarà equidistante alla A B.

Perche se questa G H, non fusse equidistante alla A D, all'hora dal G, tirando vna equidistante alla A D, ella non passaria per il punto H, ma, ò disopra, ò disotto da esso H. Disopra non può passare, che se ella per l'Aduersario potesse peruenire in I, concorrendoui con la D H, allungata, all hora dal termine C, della base C D, all'I, tirata, ò intesa la retta C I, formando il Triangolo C D I, egli sarebbe eguale all'ABG, poiche sarebbono sopra à basi eguali CD, AB, & fra medesme paralelle A D, G I, ma ancora il Triang. C D H, (dal supposito, è eguale al medesimo A B G, onde il C D I, sarebbe eguale al C D H, sua parte il che è impossibile, non può dunque dal G, la retta, che si tiri equidistante alla A D, passare disopra al punto H, ne può manco passarui disotto, che se per l'Aduersario si dicesse ella poterui passare segando il lato C H, in r, all'hora dall'r, tirata, ò intesa tirata al termine D, oppostoli la retta r D, & considerato il Triangolo C D r, egli saria eguale all'A B G, poiche sariano fatti sopra basi eguali, & fra medesme equidistanti A D, G r, ma al medesimo Triangolo A B G, è anco eguale il C D H, perilche à questo C D H, saria similmente eguale il C D r, sua parte il che è impossibile, & perciò pure è impossibile che dal G, la equidistante alla A B, passi disotto al punto H, ne meno può passarui disopra come s'è veduto, però di necessità passarà per il punto istesso H, & così i dui Triangoli A B C, C D H, che sono eguali, saranno anco fra medesme equidistanti A D, G H, come si voleua mostrare.

Propositione 41. Theorema 31.

SE vn Paralellogrammo, & vn Triangolo siano constituiti sopra ad vna istessa base, & fra due medesme linee paralelle, il Paralellogrammo sarà doppio al Triangolo.

Fra le due equidistanti A B, C D, & sopra la istessa base A B, siano formati il paralellogrammo A B G C, & il Triangolo A B D, si dice il paralellogrammo essere doppio al Triangolo, perche in esso paralellogrammo da vno de termini della base, poniamo dall'A, tirato il suo diametro A G, egli sarà diuiso in due parti eguali, onde sarà doppio à ciascuno delli dui Triangoli ne quali egli è diuiso, & però al G A B, quale hà per base la A B, medesima, che è base del nostro Triangolo A B D, & per che questi dui Triangoli G A B, A B D, di più sono fra medesime equidistanti A B, C D, essi sono eguali fra loro, onde il paralellogrammo A B G C, che è doppio all'vno G A B, (sua metà) sarà anco doppio all'altro A B D, che è quanto si voleua prouare.

Propositione 42. Problema. 11.

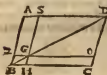
PRoposto vn Triangolo si può eguale ad esso formare vn Paralellogrammo in vn dato angolo retti lineo, cioè che habbi vn'angolo (& consequentemente l'altro angolo a questo opposto) eguale ad vn'angolo dato.

Sia proposto il Triangolo A B C, al quale si vogli fare eguale vn Paralellogrammo nel dato angolo P, cioè che in esso Paralellogrammo dui de' suoi angoli opposti siano ciascun d'essi eguale all'angolo P, Per farlo. Diuidasi vno dell'i tre lati del Triangolo poniamo il B C, che chiamaremo base in due parti eguali in D, & da esso D, tirisi vna retta quale con vna delle metà della base poniamo con la D C, formi vn'angolo eguale al dato P, & sia la D R, che arriui alla retta A S, tirata equidistante

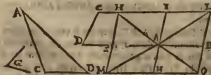
distante alla D R, finche arriui alla A S, & sia la C O, (ouero nella R S, dall'R, si segni la R O, eguale alla D C, à lei opposta, & si tiri la O C, che sarà equidistante, & anco eguale alla D R, congiungendo elle le due D C, R O, eguali, & equidistanti) & cosi sarà formato il paralellogrã-mo R D C O. (hauendo egli i lati opposti equidistanti) che sarà eguale al proposto Triangolo A B C. Perche dal D, mità della base all'angolo oppostoli A, tirata, ò imaginata la retta D A, ella diuiderà il Triangolo A B C, in dui Triangoli eguali (essendo essi formati sopra basi eguali B D, D C, & fra medesme rette equidistanti B C, A S, però il Triangolo A B C, sarà doppio al-l'A D C, (sua mità) ma al medesmo Triang: A D C, è anco doppio il paralellogrammo R D C O, (per la antecedente 41. propositione) essendo ambedui fatti sù la istessa base D C, & fra le medesme due equidistanti DC, AS, però (per la 6. Comune Concessione) il paralellogrãmo RDCO, è eguale al Triangolo A B C, come si è proposto di fare.

Propositione 43. Theorema 33.

LI Supplementi di quelli Paralellogrammi, che sono attorno al diametro di qual si vogli Paralellogrammo sono eguali fra loro.

Sia il paralellogrammo A B C D, nel quale tirato vno delli suoi dui diametri, & sia il B D, & la retta A S, doue si vogli equidistante alli dui lati A B, C D, segnando G, doue ella sega il diametro, & di li tirãdo vna retta L O, equidistante alli altri dui lati A D, B C, il paralellogrammo A C, sara diuiso in quattro paralellogrãmi delli quali li dui S O, L H, che dentro di loro inchiudono tutto il diametro B D, del totale paralellogrammo A C, si dicono stare attorno ad esso diametro B D, & li altri dui paralellogrammi A G, G C, che suppliscono, ò restano à cõpir il totale paralellogrammo A C, si chiamano supplementi, questi mò A G, G C, si dice essere equali fra loro, Perche, Considerato il Paralellogrammo totale A C, diuiso dal diametro B D, in dui parti eguali, che sono i dui Triangoli A B D, C B D, & similmente il paralellogrammo A L, diuiso dal suo diametro B G, in due parti eguali che sono i dui Triangoli L B G, H B G, come anco il paralellogrammo S O, diuiso in due parti eguali dal suo diametro G D, che sono i dui Triangoli S G D, O G D, vedremo, che ciascuno delli dui Triangoli A B D, C B D, mitadi del paralellogrammo A C,) è diuiso in tre parti, che sono dui Triangoli, & vn Supplemento, ma la prima parte, ò Triangolo S G D, dell'vno è eguale alla prima parte, ò Triangolo O G D, dell'altro, & la seconda parte, ò Triangolo L B G, dell'vno è eguale alla seconda parte, ò Triangolo H B G, dell altro, perilche ancora la restante terza parte dell'vno, che è l'vn il Supplemento A G, sara eguale alla restante terza parte dell'altro, che è l'altro supplemento G C, il che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 44. Problema 12.

SOpra ad vna proposta linea retta si può in vn'angolo dato formare vn Paralellogrammo eguale ad vn Triangolo assegnato.

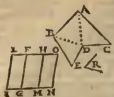
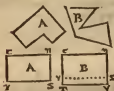
Sopra alla proposta retta A B, sia da formarsi eguale al Triangolo A C D, vn paralellogrammo, che habbi vn'angolo (& però anco lo à lui opposito) eguale all'angolo dato G. Per farlo. Accompagnisi il Triangolo assegnato in retta linea con la proposta A B, cioè allunghisi la A B, da vna sua banda poniamo dalla A, quãto è vno de' lati qual ci piaccia del Triangolo, & sia l'A D, & con due linee eguali alli altri dui lati C A, C D, del Triangolo si formi sù la A D, il Triangolo A C D, (come insegna la 22. Propositione) & cosi per Triangolo assegnato pigliaremo l'accompagnato alla proposta A B. Poi à questo Triangolo A C D, si formi vn Paralellogrammo

eguale

eguale nel dato angolo G, come insegna la 42. propositione, & sia l'A S H I, hauente l'angolo S, & anco l'I, eguale al dato G. Hora si allunghi il suo lato H I, verso I, fino in L, di modo che I L, sia eguale alla opposita à lei equidistante A B, & si tiri li L B, che sarà eguale, & equidistante alla I A, (per la 33. propositione) poi nel paralellogrammo L B A I, dall'L, all'A, si tiri il diametro L A, & si allunghi verso A, finche concorra con il lato H S, del primo paralellogrammo, & nel punto del concorso si segni M, dal quale si tiri vna equidistante alla S A B, & fino ad essa si allunghino le I A, & L B, segnandoui i punti dell'arriuo N, & O, che cosi sarà formato il paralellogrammo L H M O, nel quale sara tirato il diametro L M, & le rette S B, I N, diuidendo esso paralellogrammo H O, in quattro paralellogrammi de' quali li dui L I A B, A S M N, stanno attorno al diametro L M, & li altri dui I H S A, A B O N, sono i Supplementi, quali (per la antecedente 43. propositione) sono eguali fra loro, ma l'vno I H S A, è eguale al Triangolo C A D, però anco l'altro A O, che è fatto sopra alla linea A B, proposta sara eguale al medesmo Triangolo C A D, & ciascuno delli dui angoli N, & B, in esso paralellogrammo A O, è eguale al dato angolo G, perche sono eguali all'I A B, & però allo à questo eguale H S A, che è fatto eguale al dato angolo G, si è dunque sopra alla proposta retta A B, formato vn paralellogrãmo ABON, nel dato angolo G, eguale all'assegnato Triangolo C A D, come si è proposto di fare.

Propositione 45. Problema 13.

SI può sopra ad vna proposta linea retta in vn dato angolo rettilineo formare vn Paralellogrammo eguale ad vn'assegnato Rettilineo.

Sia proposta la retta L I, da formarui sopra vn paralellogrammo in vn dato angolo R, eguale al Rettilineo A B E D C, Per farlo, Diuidasi il rettilineo assegnato in Triangoli quanti si voglino ma sara la operatione breuissima se lo diuideremo in quel minor numero di Triangoli che si possa, che sara 2. manco del numero delli suoi lati, cioè hora essendo di 5. lati, il minor numero di Triangoli in che egli si possa diuidere sara 3. sia dunque diuiso in tre Triangoli, & sopra alla L I, proposta si formi (come insegna la antecedente 44. propositione) eguale al primo Triangolo A B D, il paralellogrammo L I G F, nel dato angolo R, cioè hauente l'angolo I, & l'F, oppostoli) eguale al dato R, poi sopra al lato F G, opposto, & però eguale alla proposta L I, si formi eguale al secondo Triangolo B E D, (per la detta antecedente 44. propositione) il paralellogrammo G H, nel dato angolo R, cioè hauente l'angolo F G M, & l'F H M, oppostoli eguale al dato R, che cosi le rette L G, G M, saranno congiunte, ò vogliamo dire accompagnate insieme per il diritto, facẽdo vna retta S M, (perche essendo ciascuno delli dui angoli L I G, F G M, eguale al dato R, essi saranno eguali fra loro, onde giontoli comunemente l'angolo F G I, alla somma delli dui L I G, F G I, (che à quanto dui retti, essendo essi interni da vna istessa banda delle due rette equidistanti L I, F G, sopra alle quali cade la G I) sarà eguale la somma delli dui FGM, F GI, però questa somma sarà anc'ella quanto dui retti, cioè eguale a dui retti, onde (per la 14. propositione) le due rette I G, G M, sono in vna istessa dirittura, & formano vna retta I M, come anco per la medesma causa le due L F, F H, sono similmente congiunte per il diritto, & constituiscono la retta L H, onde li dui paralellogrammi L G, G H, vengono ad essere congiunti insiemi di modo, che si può dire, che formano, ò compongono vn solo paralellogrammo L I M H, quale è eguale al composto delli dui Triang. detti A B D, B E D, cioè al Quadrilatero A B E D; Et seguendo in questo modo sopra al lato M H, opposto, & però eguale alla proposta L I, si formi, eguale al restante terzo Triangolo A D C, il paralellogrammo H N, nel dato angolo R, cioè hauente l'angolo H M N, & l'N D H, oppostoli eguale al dato R, che cosi (per la 14. propositione) la M N, sara congiunta per il diritto con la I M, come anco la H O, con la L H, & il paralellogrammo H N, verrà ad essere congiunto per il diritto con l'L M, talmente, che insieme verranno à comporre il totale paralellogr. L I N O, quale sarà eguale al rettilineo ABEDC, dato (per la prima Comune Concessione) che essendo il primo paralellogrammo partiale L G, eguale al primo Triangolo partiale A B D, (per la Construttione, & il secondo paralellogrammo al secondo Triangolo, la somma delli dui paralellogrammi sarà perciò eguale alla somma delli dui Triangoli, onde se all'vna somma giongeremo il terzo paralellogrammo, & all'altra somma giongeremo il terzo Triangolo, che sono eguali, l'vn composto, che è il paralellogrammo totale L I N O, sara eguale all'altro composto, che è il rettilineo A B E D C. Et cosi sopra ad vna proposta linea retta si può formare vn paralellogrammo eguale ad vn'assegnato rettilineo, Et eguale ancora à quanto contenghino quanti rettilinei si voglino, che diuisi in Triango.

li si andaranno formando sù la proposta retta prima, & poi di mano in mano sù l'altre à lei egua li, Paralellogrammi eguali alli Triangoli, finche si siano adoprati tutti che all'hora il composto di tutti li Paralellogrammi cosi formati, cioè il paralellogrammo totale, che haueremo sarà eguale alla somma, ò composto di tutti i Rettilinei assegnati.

Di qui si può notare, che hauendo dui, ò più Rettilinei si può conoscere, se essi sono eguali, ò ineguali, & essendo ineguali trouare la differenza loro, riducendo ciascuno d'essi à Paralellogrammo sopra ad vna istessa linea retta, ò sopra à rette eguali, che hauendo i dui Rettilinei A, & B, presa qual si vogli retta, ò à beneplacito, ò di misura data, poniamo il piede, ò il braccio, & sia c n, sopra ad essa formaremo vn Paralellogrammo in vn'angolo dato (hor sia retto, che il paralellogrammo sarà rettangolo) eguale al Rettilineo A. Ancora sopra alla istessa c n, ò sopra ad vn'altra c n, à quella eguale formaremo nel medesimo angolo vn'altro paralellogrammo *B*, eguale al Rettilineo B, & hora se questi dui Paralellogrammi hauerãno li lati angolari alla retta c n, eguali fra loro, essi paralellogrammi, & però anco li Rettilinei saranno eguali fra loro, ma se essi lati saranno ineguali, come hora che il c t, nel B, è più lungo del c r, nell'A, anco essi paralellogrammi saranno ineguali, & maggiore sarà il B, di lato più luugo c t, nel quale segnata la c r, eguale alla c r, dell'A, & di li tirata la r s, equidistante alla c u, (ouero t v,) Ouero più facilmente segnato anco nell'altro lato n v, la u s, eguale alla n s, dell'A, & tirata la r s, (che sarà equidistante alla c u, & t v,) all'hora il paralellogrammo c n s r, nel B, sarà eguale all'A, riportatoui, ò copiatoui sopra però nel restante r s v t, il *B*, superare l'A, & cosi sapremo similmente, che il Rettilineo *B*, è maggiore dell'A, in quanto importa il paralellogrammo r s v t.

Da questa Propositione, ò Problema si deriua il modo di misurare come si suol dire le Superficie rettilinee, che è il trouare quanti piedi, ò braccia, ò pertiche, ò Tauole, ò altra sorte di misura sia vna superficie, ò molte giunte insieme. Che proposti li dui rettilinei A, & B, volendo sapere quante pertiche in somma essi siano, noi sù la data misura, ò lunghezza della pertica, & sia la r s, formaremo vn Quadrangolo rettangolo, eguale al rettilineo A, & sia l'A, che all'hora il numero dall'altro, lato r R, (ouero s S,) cioè il numero delle volte, che la lunghezza r s, della pertica entrarà in detto lato r R, sarà il numero delle pertiche della grandezza della superficie A; Et di nuouo sù la lunghezza R S, eguale, & equidistante alla r s, cioè sù la retta pertica seguendo à formare vn Quadrangolo retrangolo, & sia b, eguale al Rettilineo B, il numero delle pertiche dell'altro suo lato R P, mostrarà quanto sia la grandezza d'esso Quadrangolo rettangolo b, cioè quante pertiche, ò vogliamo dire quanti quadretti d'vna pertica di superficie, sia il quadrangolo rettangolo b, & però il rettilineo B, al quale il b, si è fatto eguale. Et il numero della totale linea r P, (ò della à lei aguale S Q,) cioè il numero delle pertiche della lungheaza r P, sara anco il numero delle pertiche Superficiali, ò della grandezza del totale Quadrangolo r Q. & però della somma delli dui Rettilinei A, & B. Et se altri Rettilinei vi fussero si andaria seguendo à formare altri Quadrangoli rettangoli su la linea P Q, & c. lunghezza della pertica, che finalmente il totale Quadrangolo rettangolo, che sarà eguale alla somma di tutti li Rettilinei proposti, mostrarà il numero delle pertiche superficiali d'essa somma.

Propositione 46. Problema 14.

SOpra ad vna data linea retta si può formare vn Quadrato.

Sia data la retta A B, Per formarui sopra vn Quadrato, Dalli estremi A, & *B*, d'essa se li tirino le due perpendicolari A C, B D, eguale ciascuna d'esse alla data A B, & si tiri la C D, che la superficie A B D C, cosi formata sopra alla A B, sarà quadrata. Perche Considerate le due A C, B D, sopra alle quali cade la A B, facendo la somma delli dui angoli interni C A *B*, D *B* A, da vna

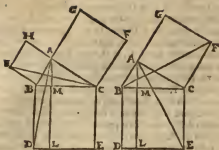
vna medesma banda eguale à dui retti (essendo dalla Construttione ciascun d'essi retto) ne segue (per la 28. propositione) che esse A C, B D, siano equidistanti, & perche di più elle sono eguali (che ciascuna d'esse è fatta eguale alla A B,) ne segue (per la 33.) che anco le due A B, C D, che le congiungono insieme siano anch'elle eguali, & equidistanti fra loro, & però la C D, si come è la A B, sarà eguale à ciascuna delle due A C, B D, onde il parallelogrammo A B D C, è equilatero, & è anco equiangolo, & però d'angoli retti per la 34. onde egli (per la 29. Diffinitione) è quadrado come si voleua fare.

Si può anco in altro modo in Pratica fare il Quadrato sopra alla data A B, & è, che da vn punto d'vno delli dui estremi della data, poniamo dal l'A, erettali vna perpendicolare A C, ad essa A B, eguale, si facci centro il punto C, & con l'interuallo C A, verso la banda del B, si facci vn pezzo d'arco, che si possa intersegare con vn'altro pezzo d'arco, che deriui dal far centro l'altra estremità B, della data con l'interuallo d'essa A B, & nel segamento delli dui archi segnato D, & da esso alli C, & B, tirate le due rette D C, & D B, elle con le C A, & A B, constituiranno il Quadrangolo A B D C, che sarà Quadrato. Per che, Hauendo egli i lati oppositi eguali (dalla Construttione) è di necessità parallelogrammo (come s'è mostrato nella 34. propositione) & per ciò (per essa 34. propositione) essendo l'angolo A, retto, ancora il D, oppostoli sarà retto, ma gl'altri dui C, & B, che sono il residuo di quattro retti (per la 32. propositione) importano dui retti, & sono eguali perche sono contrapositi in esso parallelogrãmo, però ciascun d'essi sara la mità di 2. retti, cioè sarà retto, onde ciascuno delli quattro angoli d'esso parallelogrammo è retto, egli dunque è rettangolo, & Equilatero, pero è Quadrato.

Quello, che si mostrò nella ottaua propositione auuenire alli Triangoli, cioè essi essere eguali quando ciascuno delli 3. lati dell'vno sia eguale à ciascuno delli 3. lati loro corispondenti dell'altro, si puo anco nel medesmo modo mostrare auuenire à tutte l'altre figure paragonate insieme, aggiungendoui pero di più che non solo i lati dell'vna ad vno ad vno siano eguali alli lati loro corispondenti dell'altra ad vno ad vno, ma che anco per ordine gl'angoli dell'vna ad vno ad vno siano eguali à gl'angoli dell'altra ad vno ad vno, che per cio i quadrati fatti sopra à linee eguali saranno eguali fra loro, che imaginati posti l'vno sopra all'altro i lati, & angoli dell'vno copriranno precise i lati, & angoli dell'altro vnendosi insieme, & douentando vna sola figura senza eccedersi in cosa alcuna l'vna l'altra, & per ciò (per la ottaua Comune Concessione) si concluderà chiarissimamente che essi Quadrati siano eguali. Come anco conuersamente, sapendo che dui quadrati siano eguali fra loro, si concluderà, che i lati dell'vno siano eguali à i lati dell'altri, perche per la egualità d'essi quadrati, imaginati, ò posti l'vno sopra all'altro, i lati, & angoli dell'vno si vniranno precise con i lati, & angoli dell'altro senza eccedenza in alcuno, & perciò (per la detta ottaua Comune Concessione) i lati, & angoli dell'vno saranno eguali alli lati, & angoli dell'altro.

Propositione 47. Theorema 33.

NElli Triangoli rettangoli il Quadrato fatto sopra al lato opposto all'angolo retto è eguale alla somma delli dui Quadrati fatti sopra alli dui lati, che contengono esso angolo retto.

Sia il Triangolo rettangolo A B C, sopra à ciascuno delli tre lati del quale sia fatto vn Quadrato, si dice che il solo quadrato B C E D, fatto sopra al lato B C, opposto all'angolo retto A, è eguale alla somma delli dui quadrati A I, & A F, fatti sopra alli dui lati A B, & A C, continenti il suo angolo retto B A C. Per dimostrarlo. Primo diremo, che dal punto A, estremo della retta A C, essendo tirata in due diuerse parti le due rette A G, che con essa A C, forma l'angolo retto G A C, (per essere angolo del Quadrato A F,) & A B, che con la istessa A C, forma l'angolo A, del nostro Triangolo B A C, che è retto dal supposito, & però essendo la somma di detti dui angoli retti G A C, B A C, eguale à dui retti, ne segue (per la 14. propositione) che le due rette dette A G, A B, siano congiunte insieme per il diritto, & che per ciò la B A G, sia vna linea retta, & consequentemente equidistante alla I H, come è la sua parte B A, che sono lati oppositi del quadrato A I. Ancora perche dal punto A, della A B, sono tirate le due rette

A H, A C, in due diuerse parti, & li angoli da essi fatti cõ la AB, sono eguali à dui retti (che l'angolo B A H, è angolo del quadrato A S, & l'angolo B A C, è retto dal supposito) ne segue (per la medesma 14. propositione) che dette due rette A H, A C, siano siano congiunte insieme per il diritto, & che per ciò la (A H, sia vna linea retta, & cõsequentemente equidistante alla I B, come è la sua parte H A, opposita ad essa I B, nel quadrato A I. Ancora dall'angolo ret- A, del detto Triangolo rettangolo B A C, al lato oppostoli B C, si tiri la perpendicolare A M, allungandola finche arriui al lato oppostoli del quadrato B E, & vi si segni il punto L, che questa retta A L, sarà equidistante alle B D, C E, lati del quadrato B E, essendo l'angolo estrinseco M, retto, eguale all'intrinsico M B D, retto anc'egli delle due rette B D, M L, sopra alle quali cade la B M, allungata in C, ò perche la somma delli dui retti interiori M B D, B M L, è eguale à dui retti; Ouero, Perche li dui retti alterni M B D, A M D, sono eguali fra loro; Di questa retta A L, la sua parte M L, diuide il Quadrato B E, in dui Parallelogrammi B L, sinistro, & C L, destro, de' quali il sinistro si prouarà essere eguale al quadrato A I, sinistro, & il destro C L, si prouarà essere eguale al quadrato A F, destro, & cominciando dalla parte sinistra. Dal punto D, inferiore angolare sinistro del parallelogr. B L, all'A. angolare retto del dato Triang. BAC, si tiri la retta DA, considerandola base del Triang. ABD, i lati del quale sono AB, (che è vn lato del Quadrato sinistro) & BD, che è vn lato del Quadrato grãde, & l'angolo da loro cõtenuto è l'ABD, cõposto da vn'angolo retto C B D, del quadrato grãde, & dall'ang. ABC, sinistro acuto del nostro Triang. rettãg. CAB. Ancora tiraremo la retta I C, dall'angolo acuto destro del nostro Triang. C A B, all'ang. I, inferiore sinistro del quadrato sinistro A I, considerandola base del Triangolo I B C, qual Triangolo I B C, è eguale all'A B D, sopradetto, perche i dui lati I B, B C, dell'vno sono eguali alli dui lati AB, BD, dell'altro (che anco l'IB, è lato del quadr. sinistro come l'A B, Et il BC, è lato del quadr. grãde come il B D) & l'ang. IBC, cõtenuto dalli 2. lati I B, B C, dell'vno è eguale all'ang. A B D, contenuto dalli dui lati A B, B D, dell'altro (che anco l'I B C, è cõposto da vn'angolo retto I B A, (del quadrato sinistro) & dell'angolo A B C, sinistro acuto (ad ambidui comune) del nostro Triangolo A B C, come è l'A B D; Ancora consideratele due rette equidistanti H C, I B, fra le quali, & sopra alla istessa base I B, sono formati il parallelogrãmo (ò quadrato) I A, & il Triangolo I B C, ad esso Triangolo (per la 41. propositione) è doppio il parallelogrammo, ò quadrato detto I A. Et consideratele due rette equidistanti A L, B D, fra le quali, & sopra alla istessa base B D, sono formati il parallelogrammo B L, & il Triangolo A B D, ne segue (per la detta 41. propositione) che il parallelogrammo B L, sia doppio al Triangolo A B D, onde per che li dui Triangoli detti I B C, & A B D, sono eguali (come s'è mostrato) ancora i doppij loro (per la 6. Comune Concessione) saranno eguali fra loro, cioè il quadrato I A, sarà eguale al parallelogrammo B L; Nel medesmo modo si mostrarà il quadrato A F, destro essere eguale al parallelogrammo partiale C L, destro. Tirando dall'angolo A, retto del nostro Triangolo B A C, al punto E, angolare inferiore destro del parallelogrammo C L, la retta A E, considerandola base del Triangolo A C E, Et anco tirando dal punto B, angolare sinistro del nostro Triang. B A C, all'F, angolare destro del quadrato A F, la retta B F, considerandola base del Triangolo B C F, nelli quali dui Triangoli A C E, B C F, perche il lato A C, dell'vno è eguale al lato F C, dell'altro (che sono lati d'vn medesmo quadrato A F,) & l'altro lato C E, dell'vno è eguale all'altro lato C B, dell'altro (che sono lati d'vn medesmo quadr. A F, & l'altro lato CE, dell'vno è eguale al lato C B, dell'altro (che sono lati d'vn medesmo quadrato CD,) & l'angolo A C E, cõtenuto dalli dui lati detti dell'vno è eguale all'angolo F C B, contenuto dalli dui lati dell'altro (che ciascun d'essi è composto d'vn'angolo retto, & dall'angolo A C B, acuto destro del nostro Triang. A B C,) ne segue (per la quarta propositione) che essi dui Triangoli A C E, F C B, siano eguali fra loro; Et Perche all'A CE, è doppio il parallelogrãmo L C, (per la 41. propositione) che ambidui sono formati sopra ad vna istessa base C E, & fra due medesme equidistanti C E, A L,) Et all'F C B, è doppio il quadrato A F, (per la medesma 41. propositione) (che ambidui sono formati sopra ad vn'istessa base C F, & fra le medesme equidistanti C F, B G; ne segue (per la 6. Co-

mune Conceſſione) che anco il parallelogrãmo L C, & il quadrato A F, (che ſono doppij à detti dui Triangoli eguali) ſiano eguali fra loro. Si è dunque prouato, che la parte ſiniſtra B L, del quadrato grande C D, è eguale al quadrato ſiniſtro A I, & la reſtante parte deſtra C L, del medeſmo quadrato C D, è eguale al quadrato deſtro A F, però (per la 2. Commune Conceſſione) il total quadrato C D, (sõma delle ſue due parti B L, C L, dette) ſarà eguale alla ſomma delli dui quadrati I A, & A F, cioè il quadrato fatto ſopra al lato oppoſto all'angolo retto nel Triangolo rettangolo eſſere eguale alla ſomma delli dui quadrati fatti ſopra alli dui lati continenti l'angolo retto, che è quanto occorreua moſtrare.

In Pratica, per formar facilmente i dui quadrati A F, & A I, & prima l'A F, fatto centro il pũto A, con l'interuallo del lato A C, ſi deſcriua vn pezzo di circonferenza fino alla quale ſi allunghi la retta B A, & ſia in G, poi fatto cẽtro il punto G, & anco il C, con l'iſteſſo interuallo di A C, (ouero A G) ſi deſcriuano dui pezzi d'archi che ſi interſeghino, & ſia in F, che tirate le rette G F, C E, ſara formato il quadrato A F; Et per formare l'altro quadrato A I, ſimilmente fatto centro il punto A, con l'interuallo del lato A B, ſi deſcriua vn pezzo di circonferenza ſino alla quale ſi allunghi la retta C A, & ſia in H, (accioche A H, ſia eguale al lato A B, & poi fatto centro il punto H, & anco il punto B, con l'iſteſſo interuallo ſi deſcriuano dui pezzi d'arco, che ſi interſeghino, & ſia in I, che tirate le rette H I, B I, ſarà formato l'altro quadrato A I,

Di qui mò ſi conoſce, che quando nel Triangolo dato A B C, l'angolo A, fuſſe ſtato ottuſo, cioè maggiore del retto, ancora la baſe B C, ſaria ſtata più lunga della B C, (come anco ſi manifeſta per la propoſitione 24.) perilche anco il quadrato d'eſſa B C, oppoſta all'angolo ottuſo ſaria ſtato più grande del quadrato della baſe oppoſta all'angolo retto, & conſequentemente ſaria maggiore della ſomma delli dui quadrati fatti ſopra alli dui lati continenti l'angolo ottuſo; Et ſe nel Triangolo dato l'angolo A, fuſſe ſtato acuto, cioè minore del retto, ancora la baſe B C, ſaria ſtata più corta della B C, (come ſi manifeſta anco per la propoſitione 24.) perilche anco il quadrato d'eſſa B C, oppoſta all'angolo acuto ſaria ſtato minore della ſomma delli dui quadrati fatti su i dui lati continenti l'angolo acuto. Onde potiamo deriuarne Regola con la quale mediante la quantità, ò lunghezza per numero delli tre lati del Triangolo ſi saprà la qualità di qual ſi vogli dato delli ſuoi tre angoli, & è che, Dato vn'angolo ſi giungano inſieme i quadrati delli dui lati che contengono eſſo angolo, & ſe alla loro ſomma A, ſia eguale il quadrato B, del lato oppoſto all'angolo dato, all hora l'angolo dato ſara retto, ma ſe il quadrato B, ſia maggiore della sõma A, ancora l'angolo dato ſara maggiore di retto, cioè ſara ottuſo, & quanto piu grande ſarà il quadrato B, tanto più ottuſo ſara l'angolo dato, Che ſe il quadrato B, ſia minore della ſomma A, ancora l'angolo dato ſara minore di retto, cioè ſara acuto, & quanto più piccolo ſara il quadrato B, tanto più acuto ſara l'angolo dato. Per eſempio nel Triangolo A B C, di lati noti, per ſapere la qualità dell'angolo A. Giongaſi inſieme i quadrati di 12, & 15. lati continenti eſſo angolo A, cioè 144. & 225. che la ſommo A, loro è 369. Ancora moltiplichiſi in ſe medeſmo 21. lato B C, oppoſto ad eſſo angolo A, che 21. via 21. fa 441. (che è il quadrato di B C,) qual 441. perche è maggiore di 369. ſomma A, detta, diremo, che l'angolo A, è maggiore del retto, cioè che egli è ottuſo. Et nel Triangolo S R C, di lati noti volendo ſapere la qualità dell'angolo R. giongeremo inſieme i quadrati di 13. & 14. (lati continenti eſſo angolo R,) cioè 169. & 196. che la loro ſomma A, è 365. Ancora quadraremo il 19. lato S C, oppoſto ad eſſo angolo R, cioè moltiplicaremo 19. via 19. che fa 361. B, queſto 361. paragonaremmo hora al 365. ſomma A, detta, & perche è minore di lei diremo, che ancora l'angolo R, è minore di retto, cioè che è acuto.

Vediamo ancora che di qui ſi viene à manifeſtare, che mediante la notitia di dui lati del Triangolo rettangolo ſi può conoſcere la lunghezza dell'altro lato, perche ſe ſapremo ciaſcuno delli dui lati, che contengono l'angolo retto, giungendo inſieme i ſuoi dui quadrati, il numero della ſomma ſara il quadrato dell'altro lato oppoſto all'angolo retto, onde preſa la radice quadra d'eſſo numero ella ſara la lunghezza del lato cercato; Ma ſe ſapremo la lunghezza del lato oppoſto all'angolo retto, che ſi ſuole chiamare ſubtenſa (& è il lato maggiore, o più lũgo delli tre) & la lunghezza, cioè il numero d'vno de gl'altri dui lati, che contengono l'angolo retto, & lo chiamaremo altezza, che l'altro lato poi d'eſſi dui ſi potrà chiamar baſe, noi ſapẽdo, che il quadrato S, della ſubtenſa è quanto li quadrati inſieme della baſe, & altezza conoſciamo, che eſſo quadrato S, è maggiore del quadrato dell'vno, ò baſe in quanto importa il quadrato dell'altro, ò altezza, onde da eſſo quadrato S, della ſubtenſa, cauando il quadrato dell'vno, ò baſe, il reſtante di neceſſità ſarà il quadrato dell'altro, ò altezza, onde potremo dire. Data la ſubtenſa

del

del Triangolo rettangolo, & noto vno delli dui lati continenti l'angolo retto, potiamo trouare la lunghezza dell'altro lato, & la Regola è che si caui il quadrato del lato noto dal quadrato della subtensa, & del restante (che è il quadrato dell'altro lato) si pigli la radice quadra, che ella sarà la lunghezza dell'altro lato cercato. Onde nel Triangolo rettangolo A B C, essendo noti il lato A C, 20. & il B C, 21, che contengono il suo angolo retto, quadraremo, cioè moltiplicaremo in se stesso ciascuno d'essi, & haueremo 400. & 441. & li sommaremo insieme, che la somma è 841, (& è il quadrato della subtensa A G, della quale pigliaremo la radice quadra, che è 29. precise (che 29. via 29. fa 841.) & questo 29. sarà la lunghezza della subtensa A C; Et se nel Triangolo A B C, sia nota la subtensa A C, 25. & l'altezza A B, 20. per trouare la base B C, cauaremo il quadrato di 20. cioè 400. dal quadrato di 25. che è 625. & del restante 225. (che è il quadrato della base) pigliaremo la rad. quadra, che è 15. precise, & però 15. diremo essere l'altro lato, ò base B C,

Et notino li Studenti, che queste Regole sono di continuo vso nelle Operationi Geometriche, però è necessario à sapere estrahere le radici delli numeri, che l'hanno precise, (& sono quelli numeri, che si chiamano quadrati, ò siano intieri, ò rotti, ò misti) & le radici propinque al vero delli numeri, che non l'hanno precise, (& si chiamano numeri non quadrati) che senza l'Aritmetica, ò Dottrina delli numeri non si potria hauere l'vso Pratico della Geometria, poiche il fine della Geometria è il trouare la grandezza, ò quantità delle cose, il che si troua, & si esplica con il numero, però chi prima hauesse imparato l'operare delli numeri, hauerebbe grandissimo vantaggio, & à questi con poche parole si potrebbe insegnar molto. Che io supponendo di trattare con chi non hà esperienza in essi (come occorre in molti che guidati diremo dal poco vtile vso entrano à studiare Euclide senza hauere basteuole cognitione nella pratica delli numeri) hò fatto lungo discorso intorno alle Regole sopradette.

Da questa 47. propositione potiamo deriuarne il modo di Sommare, ò Componere insieme quanti quadrati si voglino delli quali basta ad hauer noti, ò dati i lati di ciascuno, cioè. Dati i lati di quanti quadrati si voglino si può trouare il lato del quadrato, che sia grande quanto tutti i dati, Che dati poniamo a b, b c, c d, d e, lati di quattro quadrati, per trouare il lato del quadrato, che sia grande quanto tutti loro, noi ad vno ad essi, & sia all'a b, accompagnaremo da vno estremo (& sia dal b, ad angolo) retto vno de gl'altri, & sia il b c, cioè dal punto b, all'a b, tiraremo vna perpendicolare eguale al lato b c, & poi dalli estremi a, & c, tiraremo la subtensa a c, ad esso angolo retto b, che il quadrato d'essa subtensa (per questa 47. propositione) sarà eguale alli dui quadrati di a b, & b c; Ancora à questa a c, da vn'estremo d'essa, & sia dal c, accompagnaremo ad angolo retto vno delli altri lati dati, & sia il c d, & dalli estremi a, & d, tirata la a d, subtensa all'angolo retto a c d, il quadrato d'essa a d, sarà eguale alla Somma delli dui quadrati di a c, & c d, & per ciò delli tre quadrati di a b, b c, c d, dipoi alla a d, da vn'estremo, & sia dal d, accompagnaremo ad angolo retto l'altro lato d e, delli dati, & dalli estremi a, & è, si tirarà la subtenza a e, all'angolo retto a d e, che il quadrato d'essa a e, sarà eguale alla somma delli dui quadrati di a d, & d e, però sarà eguale alla somma di tutti li quattro quadrati detti, Et cosi potremo giongere insieme quanti altri quadrati vorremo.

64.
36.
576.
380 $\frac{1}{4}$.
1056 $\frac{1}{4}$.
32 $\frac{1}{2}$.

In numeri, mediante i lati dati trouaremo la grandezza di ciascun quadrato, moltiplicando il lato di ciascuno in se stesso, che ciascun prodotto sarà la grandezza del suo quadrato, quali grandezze sommaremo insieme, che la somma sarà la grandezza del quadrato eguale à tutti loro, onde d'essa somma presa la radice quadra ella sarà il lato del quadrato eguali à tutti li quadrati detti, Che per esempio essendo i lati dati 8. 6. 24. 19 $\frac{1}{2}$. trouaremo i quadrati, che saranno 64. 36. 576. 380 $\frac{1}{4}$. & li sommaremo insieme, che fanno 1056 $\frac{1}{4}$. (quadrato eguale à tutti li quattro detti) del quale 1056 $\frac{1}{4}$. pigliaremo la radice quadra, & è 32 $\frac{1}{2}$. & questo 32 $\frac{1}{2}$. è il lato del quadrato, eguale à tutti i quattro quadrati detti.

Ne potiamo anco deriuare il modo di trouare la differenza di dui quadrati di lati noti, cioè cauando il quadrato minore del quadrato maggiore trouare il lato del quadrato che resta, che

per

per esempio se à giongere il quadrato di a b, 8. con il quadrato di b c, 6. ne resulta il quadrato di a c, 10. vediamo, che à cauare il quadro di a b, 8. dal quadro di a c, 16. restarà il quadro di b c, 6. Ouero à cauare il quadro di b c, 6. dal quadro di a c, 10. il restante sarà il quadro di a b, 8.

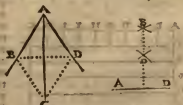
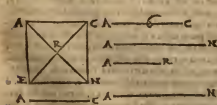
Il modo mò di fare tali sottrattioni potrà essere il seguente. Dati i dui lati a c, maggiore, & a b, minore di dui quadrati, per trouare il lato del quadrato in che questi dui sono differenti. Preso il maggior per semidiametro, & fatto centro vna delle sue due estremità, & sia la a, si formi vn pezzo d'arco, verso l'altro estremo c, & dalla a c, principiando dal centro a, si seghi la a b, eguale al dato lato minore a b, & dal punto b, alla a c, si erga vna perpendicolare fino, che arriui alla circonferenza, & sia in r, che questa b r, sarà il lato del quadrato in che li dui quadrati di a b, & a c, sono differenti; Perche dal centro a, al punto r, imaginato, ò tirato il semidiametro a r, che è eguale alla a c, & inteso il Triangolo rettangolo a b r, il quadrato della subtensa a r, & però di a c, è eguale alli dui quadrari di a b, & b r, per il che il quadro di b r, è quello in che il quadro di a b, è minore del quadro di a c.

Propositione 48. Theorema 34.

SE nel Triangolo il quadrato d'vno delli suoi lati sia eguale alla somma delli dui quadrati de gl'altri dui lati all'hora di necessità l'angolo contenuto da gl'altri dui lati detti è retto.

Nel Triangolo a b c, sia il quadro del lato a c, eguale alla somma delli quadrati delli dui lari a b, b c, si dice che l'angolo contenuto da questi dui lati a b, b c, è retto. Per dimostrarlo. Dal punto b, alla b a, si tiri la perpendicolare b d, eguale al lato b c, & anco dal d, all'a, tirara la retta d a, si consideri il Triangolo a b d, che hauerà (dalla construttione) l'angolo a b d, retto; & perciò (per la antecedente 47. propositione) il quadro della subtensa a d, sarà eguale alla somma delli quadrati delli dui lati a b, b d, continenti l'angolo retto b, ma il lato b d, è eguale alla b c, & però il quadro di b c, è eguale al quadro di b d, onde tanto è la somma delli quadrati di a b, & b c, quanto è la somma delli quadrati di a b, & b d, però il quadro di a d, che è eguale alli dui di a b, b d, sarà anco eguale alli dui di a b, b c, ma à questi dui di a b, b c, è anco eguale (dal supposito) il quadro di a c, perc il quadro di a d, sarà eguale al quadro di a c, onde queste due linee a d, a c, essendo lati di quadrati eguali sarãno anco eguali fra loro. Hora cõsiderati i dui Triangoli a b c, a b d, per che i tre lati dell'vno sono eguali alli tre lati dell'altro (ciascuno al suo corispondenti) ne segue (per la 8. propositione) che anco ciascun'angolo dell'vno sia eguale à ciascun angolo dell'altro per ordine, & per cio l'angolo a b c, dell'vn Triangolo, sarà eguale all'angolo a b d, dell'altro Triangolo, à lui corispondente, ma l'angolo a b d, dalla construttione è retto, per il che ancora l'angolo a b c, sarà retto, che è quanto si voleua mostrare.

Questa Propositione è il conuerso della antecedente propositione 47.

Questa figura và alla seconda Propositione. Questa và alla nona. Questa và alla decima.

Laus Deo semper. Fine del Primo Libro.

DEGL' ELEMENTI D' EVCLIDE

LIBRO SECONDO.

N questo Secondo Libro doppo due Diffinitioni pertinenti ad esso secon-libro, Dimostra molti accidenti, che occorrono alle linee diuise in diuersi modi. Et poi insegna à diuidere vna linea talmente, che il Quadrato d'vna parte sia eguale al Paralellogrammo rettangolo, che per lunghezza habbi detta linea, & per larghezza l'altra parte. Et nelli Triangoli ottus'angoli, & acutangoli considerateui le perpendicolari, che vanno da vn loro angolo alla base oppostoli, ò sua dirittura, le qualità de' quadrati, de' lati, & basi loro. Et poi finalmente come si formi vn Quadrato eguale ad vn Rettilineo proposto.

Diffinitione Prima.

Ogni Paralellogrammo rettangolo si dice essere contenuto dalle due linee, ò sotto alle due linee, che formano, ò comprendono vno delli suoi quattro angoli retti.

Si deue notare che il cercare quanto è la grandezza, ò come altri dice la superficie, ò l'area d'alcun Retttlineo proposto poniamo del Rettilineo a b c d, ò il cercare quanti piedi di superficie egli sia, significa il vedere quanti quadretti superficiali d'vn piede per lato esso Rettilineo contenga, come anco i Misuratori da Terra nel misurare vn Campo, intendono di trouare quante pertiche egli sia, cioè quanti quadri d'vna pertica per lato importi esso Campo, il che fanno mediante le Regole insegnateli dal Geometra. Qui mò in questa Diffinitione si dice, vn Quadrangolo rettangolo dirsi essere contenuto dalle due linee, che constituiscono vno delli suoi quattro angoli retti, perche à moltiplicare queste due linee l'vna in l'altra il prodotto è sempre la grandezza, ò superficie del dato Paralellogrammo rettangolo; perche dato il Rettangolo a r. (che così per breuità lo nominaremo) & intese le due rette a e, a n, che si sogliono chiamare lunghezza, & larghezza d'esso, & misurate ambedue con la misura data, & sia il piede p, vedendo, cioè quante volte la lunghezza d'esso piede entri nella a e, & sia 9. volte, & nella a n, & sia 6. volte, come mostramo nella a e, i segni b o d g h i l m, Et nella a n, li t s q v x, hora imaginato dalli punti della larghezza, ò lato a n, tirate le equidistanti alle lunghezze, ò lati a e, n r, si diuiderà il Rettangolo a r, in 6. parti, ò liste, cioè in tante quanto è il numero 6. della larghezza, (ò vogliamo dire quanto è il numero delli piedi della a n, ò delle volte, che il piede entra nella a n,) & anco inteso dalli punti della lunghezza, ò lato a e, tirate fino alla t f, le lineette equidistanti alle a t, e f, fa lista a e f t, sarà diuisa in 9. quadretti in tanti, cioè quanto è il numero 9. delle misure, ò piedi, della lunghezza, ò linea a e, & così perche ciascuna dell'altre 5. liste è eguale in lunghezza di 9. piedi, & larghezza d'1. piede, & però eguali tutte di grandezza, ò superficie ella detta a e f t; ciascuna d'esse altre 5. liste importarà similmente 9. quadretti d'vn piede superficiale per ciascuno; perilche haueremo 6. liste di 9. quadretti per lista, perche 6. & 9. sono

Piede Lineale. p

Piede Superficiale.

9. sono i numeri delle misure delle a n, & a c, larghezza, & lunghezza del rettangolo dato a r, & perciò egli contenirà 6. volte 9. quadretti, ma 6. volte 9. fa 54. che si troua moltiplicando 9. via 6. (ò 6. via 9. che resulta resulta l'istesso) però vediamo, che il rettangolo a r, contiene 54. quadretti d'vn piede l'vno, & però si dirà, che è 54. piedi. Et conosciamo che in tali paralellogrammi rettangoli à moltiplicare la lunghezza, & larghezza insieme, cioè l'vna via l'altra il prodotto è la grandezza del Rettangolo. Et perciò si dice il Paralellogrammo rettangolo essere contenuto dalle due rette, che constituiscono vno delli suoi quattro angoli retti, che esse due linee sono la lunghezza, & larghezza; Perciò ancora date due linee poniamo a c, a r, il dire il Rettang. di a c, & a r, Ouero il dutto della a c, nella a r, ò quello, che vien fatto dalla a c, nella a r, ò la Moltiplicatione della a c, nella a r, ò il prodotto della a c, nella a r, ò quello, che è contenuto dalla a c, & a r, ò la superfioie rettangolo, ò il rettangolo contenuto dalle a c, a r, tutti questi modi di dire che da diuersi si sogliono vsare significano il paralellogrammo rettangolo, che per lunghezza habbi l'vna, & per larghezza l'altra delle due a c, a r, cioè che ciascuno delli suoi quattro angoli retti sia contenuto, ò constituito da due linee, l'vna eguale alla a c, & l'altra alla a r.

I i Paralellogrammi mo non rettangoli come per esempio il Romboide, ò il Rombo, che non hanno angoli retti non si dicono essere conteuuti dalle due linee che formano vno delli suoi quattro angoli, perche se bene vna d'esse due linee si può pigliare per vera lunghezza della superficie, l'altra poi non è la sua vera larghezza, che nel Romboide a n, la vera larghezza è la distanza breuissima, ò perpendicolare, cioè ad angoli retti, come è la t v, presa doue si vogli, che si troua fra le due rette equidistanti a r, s n, che si possano chiamare, ò l'vna, l'altra essendo eguali la lunghezza d'essa superficie, della quale t v, per che più lunga è la r n, (ouero a s) angolare alla lunghezza a r, perciò la r n, nō si può chiamare larghezza d'essa figura a n, & quanto più acuto fusse l'angolo r, ouero quanto più ottuso l'angolo a, tanto più la s n, si auuicinarià alla opposita a r, stringendosi il paralellogrammo, & douentando più corta la r v, denotante la sua vera larghezza; onde nel Paralellogrammo non rettangolo si và variando la sua vera larghezza, & però la sua grandezza, nel fare i suoi angoli acuti, più, & manco acuti, ò li suoi ottusi, & più, & manco ottusi, cioè variando la loro acutezza, ò ottusità; ma nelli paralellogrammi rettangoli non si possono variare con più, ò manco rettitudine i suoi angoli retti; poiche l'angolo retto non hà se non vna sola positura, ò sito, perilche le sue linee non possono variare positura stando i suoi angoli retti, & però le due linee, che formano vno de' suoi quattro angoli retti, mostrano sempre la sua lunghezza, & larghezza inuariabile, & perciò egli si dice essere contenuto da tali due linee.

Diffinitione Seconda.

IN ciascuna superficie Paralollogramma, ò vogliamo dire di lati equidistanti, la somma, ò composto d'vno qual si vogli delli dui paralellogrammi, che stanno attorno al suo diametro insieme con li dui Supplementi si chiama Gnomone.

Nel Paralellogrammo a d p b, tirato vno de' suoi diametri, & sia il d b, & con vna retta g n dentro al paralellogrammo equidistante alli lati a b, b p, segato in o, & di li passaure, cioè per esso punto, ò tirata la retta c r, equidistante alli altri dui lati a b, d p, sarà il paralellogrammo a d p b, diuiso in quattro paralellogrammi de' quali li dui c d n o, & g o r b, segati per mezo dal diametro si dicono stare attorno al diametro, & gl'altri dui a c o g, n o r p, (che sono eguali come si mostrò nella 43. propositione) si chiamano supplementi. Questi dui Supplementi giunti all'vno delli dui paralellogrammi, che stanno attorno al diametro, poniamo al c d n o, formano la superficie a d p r o g a. Ma essi dui Supplementi giunti all'altro paralellogrammo g o r b, formano la Superficie a c o n p b g. Ciascuna mò di queste due superficie è chiama Gnomone.

Si può hora notare, che ciascuno di questi dui Gnomoni, quale come parte è di grandezza minore del totale paralellogrammo a d p n, è nondimeno quanto al giro, di giro eguale al paralellogrammo totale, & anco il giro dell'vn Gnomone è eguale al giro dell'altro, se bene siano in grandezza di sito, ò di superficie ineguali fra loro (che anco possono essere eguali quando il punto o, fusse in mezo del diametro a p, (ouero d b,) cioè che le rette g n, c r, si segassero insieme, & con il diametro nel mezo del diametro, che anco sariano segati per mezo i quattro lati del paralellogrammo a d p b, come si vede nella figura T, & all'hora i dui paralelligrammi parziali

tiali a c o g, e p n o, che ſtanno attorno al diametro ſono eguali l'vno all'altro, & anco à ciaſcuno delli dui Supplementi c d n o, b r o g,) per che quanto alla Gnomone a d p, r o g a, la parte g a d p r, è la iſteſſa, che nel parallelogrammo totale a d p, b, & le due reſtanti r o, g o, dello Gnomone ſono eguali alle due reſtanti b g b r, del totale, che la r o, è eguale alla b g, eſſendo elle contrapoſite nel paralellogrammo r o g b, & la g o, è eguale alla b r, eſſendo ſimilmente contrapoſiti lati del paralellogrammo iſteſſo r o g b, Et quanto allo Gnomone a b p n o c, la parte c a b p n, è la iſteſſa che nel paralellogrammo totale a d p b, & le due reſtanti n o, o c, dello Gnomone ſono eguali alle due reſtanti d c, n d, del totale, che la n o, è eguale alla d c, eſſendo elle contrapoſite nel paralellogrammo d c o n, & la o c, è eguale alla n d, eſſendo ſimilmente lati contrapoſiti dell'iſteſſo paralellogrammo d c o n; Onde diuidendo il totale paralellogrammo nel medeſmo modo in quali altri quattro paralellogrammi ſi voglino, ſempre li Gnomoni, che ſaranno compoſti dalli dui Supplementi, ò Complimenti d'eſſo, & d'vno delli dui paralellogrammi che ſtanno attorno al diametro del paralellogrammo totale (& pero ſegati da eſſo per mezo) haueranno giro eguale al giro del totale, & pero ſaranno anco di giro eguali fra loro, ſiano eſſi Gnomoni di che grandezza, ò ſuperficie diuerſa ſi vogli.

Doppo le due Diffinitioni ſopraſcritte ſeguono le Propoſitioni di queſto ſecondo libro, che ſono ſolamente 14. nelle quali nondimeno ſi contiene, o ſe ne puo eſtrahere da chi intẽde la Pratica delli numeri, & quãtità irrationali, & Algebratiche ampla, & mirabile Dottrina, con l'inuentione, & cauſe di molte Regole neceſſarie, & di continuo vſo; del qual libro, il Molto Reuerendo, & Eccellentiſs. Padre Clauio ne ſcriue quello, che qui diſotto di parola in parola ſi è notato.

Sed iam ad propoſitiones ſecundi huius Libri veniamus in quibus ſanè operæ pretium fuerit multum laboris in eis exquiſitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vſum cum in rebus Geometricis, tum in humanis comercijs; Nam ex nonnullis harum propoſitionum demonſtrantur Regulæ illæ admirabiles Algebræ quibus vix credo in diſciplinis humanis præſtantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abſtruſa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum ſuperare videatur, tanta nihilominus facilitate, atq; voluptate, vt facilius videatur eſſe nihil. Ex alijs deinde propoſitionibus huius libri eliciuntur demonſtrationes quibus inter ſe adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, atq; diuiduntur numeri ſurdi (quos dicunt) hoc eſt qui nullo modo exprimi poſſunt; cuiuſmodi ſunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neque per Diuinam potentiam in numeris poſſunt exhiberi; quod hæc res contradictionem implicet, vt Philoſophi, atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat per demonſtrationẽ ſciri poſſe quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cum vtraque radix incognita ſit, & nulla ratione exprimi queat, quod illa paulo minor ſit quam 3. hæc vero paulo maior quam 4. Et tamen ſumma quæ ex vtraque fit colligitur ex vi propoſitionis 4. huius libri radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior eſt quam 7. Præterea ex propoſitione 12. & 13. eiuſdem huius libri area, & quantitas cuiuſuis Trianguli exquiſitiſſime cognoſcitur, ex qua cognitione rurſus dimenſio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Poſtremo vltima propoſitio huius libri, omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem ſit perexiguus, vtilitates vero contineat propè infinita.

Quello mo, che quanto alle Regole d'Algebra, Operationi delle radici, & altre dalle Propoſitioni di queſto ſecondo libro ſi dice dimoſtrarſi, noi guidati dalla Dottrina del Diſcorſo naturale (ſenza biſogno di libri d'alcuno Autore) molto facilmente le andiamo inueſtigando, trouando, & dimoſtrando accreſcendo la Scienza di continuo, come ſi vede nella noſtra Opera dell'Algebra diſcorſiua Numerale, & Lineale, & nella Applicata, Nell'Opere dell'Aritmetica Vniuerſale, & in molt'altre, quali fauorendone N. S. Dio ſi andaranno Stampando.

Pro-

Propositione prima, Theorema prima.

SE l'vna di due linee rette date sia diuisa in quante parti si vogli il Rettangolo contenuto da esse due linee sarà eguale alla somma di quelli Rettangoli, che saranno contenuti dalla linea indiuisa, & da ciascuna delle parti della linea diuisa.

Siano le due rette A, & B C, delle quali la B C, sia diuisa in quante, & quali parti si voglino, poniamo nelle tre B D, D E, E C, si dice il Rettangolo contenuto da esse due linee A, (& B C, essere eguale alla somma, ò composto delli tre Rettangoli, che si contenghino della linea A. indiuisa, & da ciascuna delle tre parti B D, D E, & E C, nelle quali la B C, è diuisa. Per dimostrarlo. Facciasi il Rettangolo, o quadrangolo rettangolo contenuto dalle due date, & si potrà operare così. Dalli termini B, & C della diuisa, se li eleuino le perpendicolari B F, C I, eguali ciascuna d'esse alla A, & dalli loro termini F, & I, si tiri la retta F I, che sarà eguale, & equidistante alla oppostali B C, & sarà fatto il Rettangolo B F I C, delle due date; Ouero alla B C, erettali da vno delli suoi termini, & sia dal B, la perpendicolare B F, eguale alla A, & fatto centro il punto F, con l'interuallo B, C si formi vn pezzo d'arco tale, che si seghi con vn'altro arco, che si facci con il centro C, & interuallo della B F, o vogliamo dire A, & dal punto I, del segamento tirate alle C, & F, le due rette I C, I F, sarà formato il Quadrangolo B I F C, quale sarà di lati equidistanti, perche ha i lati contrapositi dalla construttione eguali, & sarà Rettangolo, perche hauendo dalla construttione l'Angolo B, retto, retti anco saranno gli altri tre, & sarà il rettangolo delle due date, perche hauerà la larghezza B F, ouero C I, eguale all'vna A, & per lunghezza la B C, ouero la F I. eguale ad essa B C, che è l'altra delle due date. Ancora dalli punti D, & E, delle diuisioni della B C, si tirino nel rettangolo le due rette D G, E H, equidistanti al lato B F, ouero C I, (che resulta l'istesso) o da detti punti D, & E, alla B C, si tirino sino al lato oppostoli F I, le due perpendicolari D G, E H, che saranno equidistanti alli lati B F, C I, (ouero nella F I, si segni la F G, eguale alla B D, & la G H, eguale alla D E, che la restante H I, sarà eguale alla restante E C, & dal punto G al D, si tiri la G D, & anco dall'H, all'E, la H E,) che così il paralellogrammo rettangolo F D, sarà contenuto dalla B F, & però si può dire dalla A, (eguale alla B F,) & dalla B D, prima parte della B C, Et il paralellogrammo rettangolo G E, sarà contenuto dalla D G, o vogliamo dire dalla A, & dalla D E, seconda parte della B C, & il paralellogrammo rettangolo H C, sarà contenuto dalla E H, o vogliamo dire dalla A, & dalla restante parte E C, della B C, cioè questi tre F D, G E, H C, saranno i rettangoli contenuti dalla linea indiuisa, & da ciascuna delle parti della linea diuisa. Et perche essi 3. rettangoli come parti del totale F C, lo empiono precise, & pero non lo eccedono, ne sono ecceduti da lui, ne segue, che alla somma d'essi Rettangoli partiali sia eguale il Rettangolo totale delle due rette date A, & B C, come si voleua mostrare.

Di piu si può deriuare un modo molte uolte comodissimo di moltiplicare un numero per vn altro, che è diuidere vno d'essi, che piu sià comodo (& sia B C) in quante parti si vuole, & moltiplicare ciascuna di queste parti per l'altro numero, & sia A; & giungere tutti i prodotti insieme, che la somma loro sarà quello, che nasce, o si produce dal moltiplicare insieme A & B C, che per esempio essendo A. 12. & B C, $59\frac{3}{4}$. se diuideremo $59\frac{3}{4}$. poniamo in tre parti 50. 9. & $\frac{3}{4}$. moltiplicando 50. cioè un mezo centenaro) per. 12. farà 12. mezi centenari, cioe cioe 6 centenari, cioe 600 Et 9. per 12. fà 108. & $\frac{3}{4}$. per 12. cioè 3 quarti per 12. fà 36. quarti, che sono 9 interi, & hora sommati insieme questi prodotti 600. 108. & 9. che fanno 717. questo 717. sarà il prodotto di $59\frac{3}{4}$. via 12.

Si può anco dimostrare una Propositione simile, quando non una sola di due rette date, ma ambedue fussero diuise in quante, & quali parti si voglino, dicendo,

Se siano date due linee rette, & ciascuna delle quali sia diuisa in quante, & quali parti si voglino il Rettangolo di queste due rette, sarà eguale alla somma, o composto di tutti i Rettangoli, che si faranno da ciascuna delle parti dell'una in tutte le parti ad una ad una dell'altra.

Siano le due rette A B, & A C; l'una A B, diuisa nelle quattro parti A R, R G, G H, H B, & l'altra A C, diuisa nelle tre parti A P, P V, V C, si dice, che il rettangolo contenuto da queste due rette A B, A C, è eguali alli tre uia quattro, cioè alla somma delli 12. rettangoli contenuti dalla moltiplicatione di ciascuna delle parti della linea A B, in ciascuna delle parti ad una ad una dell'altra linea A C; per dimostrarlo. Fatto il Rettangolo A m, delle due date, cioè poste la A B, & A C, insieme ad angolo retto con il loro termine comune A, & tirate le C, m, B m, eguali, &

equidistanti l'vna alla A B, & l'altra alla A C, noi dalli termini R G H, delle diuisioni della A B, tiraremo le equidistanti alli lati A C B m, ò vogliamo dire le perpendicolari alla A B, fino alla opposita C m, segnando li punti o g l, doue vi arriuano (ouero facilmente segnate le C o, o g, g l, eguali alle A R, R G, G H, tiraremo le o R, g G, l H, che saranno equidistanti fra loro, & alle A C, B m,) ancora dalli punti P, & V, delle diuisioni della A C, tiraremo fino alla B m, le P h, V t, equidistanti alli lati A B, C m. & cosi sarà diuiso il totale paralellogramo A m, nelli 12. Rettangoli cõtenuti da ciascuna delle 3. parti della A C, in ciascuna delle 4. parti della A B, onde perche ogni tutto è eguale alla somma di tutte le sue parti, in che egli e diuiso, & che lo compongono, ne segue che il Rettangolo A m, delle due rette A B, A C, date sia eguale alla somma di tutti i Rettangoli, che sono contenuti, ò si fanno da ciascuna parte dell'vna delle due date in ciascuna parte ad vna ad vna dell'altra d'esse due date.

Di qui mò si deriua, che per trouare il prodotto che deue nascere a moltiplicare dui numeri dati l'vno per l'altro, si può diuidere ciascuno d'essi dui numeri in quante parti si vuole, & moltiplicare ciascuna delle parti dell'vno via ciascuna delle parti dell'altro ad vna ad vna, giongere insieme questi prodotti, che il composto, ò somma loro sarà il prodotto cercato delli dui numeri dati. Per essempio dati 107. & 34. da moltiplicare insieme, se diuideremo il 107. poniamo in due parti 100. & 7. & il 34. poniamo in due parti 30. & 4. & moltiplicaremo il 100. & il 7. per 30. che fanno 30. centenara, cioè 3000. & 210. & anco moltiplicaremo li medesimi 100. & 7. per l'altro 4. che fanno 400. & 28. & sommaremo insieme questi 4. prodotti, la somma loro cioè 3638. sarà il prodotto cercato di 107. via 34.

107. via 34
100 7
30 4
3000
210
400
28
3638.

Propositione 2. Theorema 2.

SE vna linea retta sia diuisa in quante, & quali parti si voglino, il quadrato d'essa linea, sarà eguale alla somma, ò composto di tutti li Rettangoli fatti da essa, & da ciascuna delle sue parti.

Sia la data linea retta A B, diuisa poniamo nelle 3. parti A C, C D, D B, si dice che li tre Rettangoli contenuti dalla data retta A B, & dalle tre sue parti dette, gionti insieme, sono eguali al quadrato d'essa retta A B. Dimostratione. Sopra alla data A B, si formi il quadrato A B E F, & dalli punti C, & D, delle diuisioni in essa si tirino le due rette C G D H, fino all'opposito lato E F, equidistanti alli lati A F, B E, che cosi il quadrato A E, sarà diuiso in tre Rettangoli, de' quali l'vno è cõtenuto dalla A F, eguale alla data A B, & dalla prima parte A C, perilche è il Rettangolo della data nella sua parte A C. Vn'altro è il Rettangolo di C G, eguale alla data, & della C G, seconda parte della A B, cioe è il rettangolo della data nella seconda sua parte, C D, & l'vltimo restante rettangolo D E, è contenuto dalla D H, & D B, & perciò si può dire essere il rettangolo della data A B, nell'vltima restante sua parte D B, & perche essi tre rettangoli empiono precise il quadrato A E, cioe senza eccederlo, ne essere da lui ecceduti è chiaro egli essere eguale alla somma d'essi rettangoli, come si voleua dimostrare.

Questa seconda Propositione non è differente dalla antecedente prima, se non in quanto in quella si consideranno due linee date, come si voglino, & qui si considera vna linea da quadrarsi, ò moltiplicare in se medesima, che è quanto a pigliare due linee eguali vna diuisa in quante parti si vuole, & l'altra indiuisa, onde questa si può dimostrare con il modo medesmo della prima dicendo, Piglisi la retta A F. eguale alla data A B. & perche A B. è diuisa nelle 3. parti A C. C D, D B, sarà il rettangolo contenuto dalle due rette A B. A F. cioè il quadrato di A B. eguale (per la antecedente prima propositione eguale alla somma delli 3. rettangoli fatti dalla A F, nelle 3. parti della A B. cioè dalla A B nelle sue 3. parti A C, C D, D B. come si voleua prouare.

Et

Et cosi si vede, che la sola prima propositione saria a bastanza per essa, & per la seconda proponendola massime cosi.

Se di due linee date eguali, o ineguali l'vna d'esse sia diuisa in quante, & quali parti si voglino il Rettangolo d'esse due rette date, sarà eguale alla somma delli Rettangoli fatti dalla indiuisa in ciascuna delle parti della diuisa.

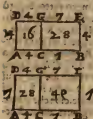
Propositione 3. Theorema 3.

SE vna retta data sia diuisa in due parti come si vogli il Rettangolo d'essa, & d'vna delle sue due parti, sarà eguale al quadrato della medesma parte insieme con il Rettangolo dell'vna parte in l'altra.

Sia la data retta A B. diuisa come si vogli in punto C. si dice, che il Rettangolo d'essa in vna delle sue parti, poniamo nella A C. è eguale al quadrato d'essa parte A C; & al rettangolo delle due parti A C, C B. Per dimostrarlo. Formisi il Rettangolo della A B, & della sua parte detta A C, cioè dalli termini A, & B si ergano alla A B, due perpendicolari A D, B E, eguali ciascuna d'esse alla parte detta A C, & dal punto C, si erga anco la perpendicolare C G, fino al lato opposto D E, che cosi il rettangolo A G, di lati eguali sarà il quadrato di detta parte A C, & il C E. che hauerà per vn lato la C G, eguale alla A C, & per l'altro la C B sarà il rettangolo contenuto dalle due parti della A B, & perche questi dui, cioè il quadrato A G & il rettangolo C E, empiono il precise l'A B E D, che è il rettangolo della totale data A B, & della sua parte detta A C, è chiaro esser dui quadrato A G, & rettangolo C E essere eguali al dutto di A B, nella sua parte A C, come si voleua mostrare.

D 4 G 7 E
4 | 16 | 28 | 4
A 4 C 7 B

	A B.
via 4.	A C.
fà 44.	

D 4 G 7 E
7 | 28 | 49 | 7
A 4 C 7 B

11.	A B.
uia 7.	B C.
fà 77.	

Questa Propositione si può anco dimostrare mediante la prima cosi.

Intesa, o imaginata la retta A C, eguale alla parte presa A C, della data, haueremo due rette A B, & A C, delle quali l'vna A B, è diuisa in due parti, & però il rettangolo delle due rette A B. diuisa, & A C, indiuisa, sarà eguale alla somma delli dui rettangoli fatti dalla indiuisa A C in ciascuna delle due parti A C, C B, della diuisa, ma di essi dui rettãgoli l'vno è il quadrato della parte A C, & l'altro è il rettangolo d'essa parte A C, nell'altra parte C B, pero il rettangolo della totale A B, nella A C, sua parte, è eguale al quadrato d'essa parte A C, & al rettangolo delle parti A C, C B. In numeri è chiaro similmente, che la somma di 16, quadrato di A C, 4. & 28. dutto di A C, 4. in C B, 7. fa 44. quale è il medesimo 44. che nasce a moltiplicare 11. A B, via 4, A C, ouero A D. Et si pigliaremo C B. 7. il suo quadrato 49. cõ 28. dutto di C B. 7. in A C. 4. fà 77. quale è il medesimo 77. che nasce a moltiplicare 11. A B, via 7, C B, sua parte presa.

A 4 C 11 7 B
A 4 C

Propositione 4. Theorema 4.

SE vna retta sia diuisa in due parti come si vogli, il quadrato d'essa linea retta è eguale al composto delli quadrati di ciascuna delle sue due parti, & al doppio del rettangolo dell'vna parte in l'altra.

49
9
21
21
100

Sia la retta A B diuisa come si uogli nel punto C, si dice, che è il quadrato d'essa A B, è eguale al composto del quadr. della parte A C, & quadr. dell'altra parte C B, & rettangolo, o dutto di A C, in C B, due uolte. Per dimostrarlo. Sopra alla A B, formisi il quadr. A B, & in esso si tiri uno delli suoi dui diametri, & sia l'A B, & dal punto C, della diuisione della A B, si eleui ad essa A B, la perpendicolare C R, sino al lato oppostoli G D. & si segui il punto O, nel quale essa sega il diametro A D, per il quale punto O, si tiri la retta S O P, equidistante alli lati opposti A B, D G, segnando S, & P, doue

ella arriua alli lati A G, B D, che cosi il quad. A D, sarà diuiso in quattro paralellìgrammi rettāgoli C S, P R, B O, G O, delli quali li dui C S, P R, stanno attorno al diametro A D, del quad. & li dui B O, G O, sono i dui supplementi quali sono eguali l'vno al l'altro (come si è mostrato nella propositione 43. del primo libro.) Hora considerato il Triangolo rettangolo A B D. che hà l'angolo B, retto, (pche è angolo del quadr. A D,) & i dui lati A B, D B, eguali, (perche sono lati d'vn medesmo quadrato A D,) ne segue (per la quarta propos. del primo libro) che li suoi dui angoli A D B, D A B, sopra alla base A D, siano eguali l'vno all'altro, onde essendo la somma loro (per la 32. del primo) quanto vn retto (cioe il restante di dui retti leuatene il B retto) ne segue che ciascuno d'essi sia la mità di detta somma, & però sarà vn mezo retto. Considerato mò il Triangolo D P O, che hà l'angolo P, retto (essendo la S P, tirata equidistante alla A B,) ouero alla G D, & l'angolo P D O, mezo retto (come si è dimostrato nel Triangolo A B D, alli quali esso angolo P D O, è comune) ne segue che il restante suo angolo P O D, sia il restante a dui retti, cioè sia mezo retto, & però eguale al P O D. perilche (per la 6. del primo) ancora il lato P D, opposto all'vno sarà eguale al lato P O, opposto all'altro, ma al medesmo P O, è eguale la B C, vna delle due parti della A B, (che sono opposite nel rettangolo C P,) però la P D, sarà eguale alla P O, onde nel rettangolo P R, che ha i lati contrapositi eguali la R D, che è eguale alla P O, sarà anco eguale alla P D, & ciascuna d'esse sarà eguale alla R O, perilche esso rettangolo P R, è quadrato, & si può dire essere il quadr. della parte C B, della retta data A B. Similmente considerato il Triangolo A C O, perche il suo angolo C, è retto, & l'O A C, è mezo retto (come si è mostrato nel Triangolo grande A B D) ancora l'altro suo restante angolo C O A, sarà mezo retto, & però il lato C O, eguale al C A, onde il Rettangolo C S, che ha e lati eguali, & gl'angoli retti sarà anch'egli quadrato (come è il P R, & come è il totale B G) & è il quadrato della parte A C, della data A B. Ancora il rettangolo C P, è contenuto dalla parte C B, nella C O, eguale all'altra parte C A, onde egli è vno delli rettangoli delle due parti A C, C B, & vn'altro Rettangolo a questo eguale che si può dire per ciò essere vn'altro rettangolo delle due parti dette A C, C B, è l'altro supplemento S R. Ma questi dui supplementi, ò dui Rettangoli delle due parti insieme con i dui quadrati C S, P R, delle istesse due parti sono precise eguali al quadr. totale A D, della A B, nelli quali esso quadrato A D, è diuiso, perilche è chiaro quello che si voleua mostrare, cioe che il quadrato della retta A B, è eguale al composto delli quadrati delle sue due parti giunti alli dui Rettangoli delle medesime sue due parti.

Corollario.

DI qui è manifesto, che ciascuno delli dui Paralellogrammi, che stanno attorno al diametro del quadrato è similmente quadrato.

Corollario secondo.

ANcora è manifesto che in ciascun quadrato, il diametro, non solo diuide esso quadrato per mezo, ma diuide anco per mezo, cioè in dui angoli semiretti ciascuno delli dui angoli retti oppositi alli quali esso diametro peruiene, essendosi dimostrato l'angolo A D B, (& però anco il restante A D G, del retto B D G,) essere semiretto, & cosi il D A B (& però il restante D A G) essere similmente semiretto.

In altro modo ancora si può dimostrare questa Propositione dicendo. Perche la retta A B, è diuisa in due parti A C, C B, ne segue (per la seconda propositione di questo libro) che al quadr. della totale A B, siano eguali i dui rettangoli d'essa AB, nelle sue due parti A C, B C, ma di questi il Rettāgolo di A B, nella parte A C, è (per la 3. propositione) eguale al quadr. di detta parte A C, & al rettangolo della medesma parte A C, nell'altra parte CB. Et ancora il rettang. di AB, nell'altra parte C B, è similmēte eguale al quad. d'essa parte CB, & al rettang. della medesma parte CB, nell'altra par. A C, perilche medesmamente al quadr. totale della A B. saranno eguali tutte le cose dette, cioè il quadr. della parte AB, il quadr. dell'altra par. CB, & il dutto due volte della parte AB, nella CB. Si potria anco fare la Dimostratione cosi.

Sopra alla retta AB, fatto il quadr. AD, & dall'un lato poniamo AG, segata la parte A s, eguale alla A C (che il restante s G, sarà eguale alla restante C B) & dall's. tirata fino al lato opposto BD. la s p, equidistāte alla A. & ancora dal punto C, sino al lato opposto GD, tirato la CR. equidistante alla AG, o BD, il quadrato A D, sarà diuiso in quattro paralelligrammi, che precise lo reintegrano, delliquali il C s, è il quadrato della parte AC (della retta AB.) il P R, è il

quadr.

quadr. dell'altra parte C B, (che ciascuna delle O P, A R, è eguale alla a loro equidistante C B, & ciascuna P R, delle O D, è eguale alla S G, à loro equidistante. & però alla detta C B, alla quale è eguale la S G) Il C P, è il dutto, ò Rettangolo dell'vna parte A C (alla quale è eguale la C O,) nell'altra parte C B, & l'S R è vn'altro dutto, ò Rettangolo dell'vna parte A C, (alla quale è eguale la S O) nell'altra C B, (alla quale è eguale la S G) perilche è chiaro quanto occorreua mostrare.

Da questa Propositione possono deriuarsi molte Regole facili in diuerse sorti di quantità rationali, & Irrationali delle quali per sodisfare à quelli che hanno cognitione d'esse diuerse sorti di quantità, ne dirò alcune, che sono di molto vso nelle loro operationi, & prima.

Per moltiplicare vna quantità data in se medesima, ella si può diuidere in due parti commode, & moltiplicata l'vna per l'altra al doppio del prodotto giongere il quad. dell'vna parte, & il qu. dell'altra parte, che la somma sarà il quad. della quãtità data. Per essempio. Douendo trouare quello, che resulta à moltiplicare 27. via 27. potremo ponere che il 27. sia diuiso in due parti poniamo in 20. & 7. Et moltiplicare 20. via 7 cioè 2. decine via 7. che fa 14. decine, & questo doppiarlo che fa 280. al quale si giongerà il quad. di 20. cioè il dutto di 20. via 20. che è 400. & il quadrato di 7. cioè di 7. via 7. che è 49. che 280. 400. & 49. fa 729. & questo è il quad. di 27. Che se il 27. fusse diuiso in 25. & 2. Il prodotto di 2. via 25. è 50. il suo doppio è 100. il quadrato di 25. cioè 25. via 25. fa 625. & il quadr. di 2. cioe 2. via 2. fa 4. onde 100. 625. & 4. gionti insieme fanno 729. & questo è il quad. di 27. che 27. via 27 fa 729. Et nelli numeri misti d'intiero, & rotto, volendo sapere quanto fa 12 $\frac{1}{2}$. via 12 $\frac{1}{2}$. fingeremo diuiso il 12 $\frac{1}{2}$. in 12. intiero, & in $\frac{1}{2}$ che $\frac{1}{2}$. via 12. fa 12. mezzi, & doppiato fa 24. mezzi, cioe 12. intieri ancora il 12. via 12. fa 144. & l'$\frac{1}{2}$. via $\frac{1}{2}$. fa $\frac{1}{4}$. che in tutto 12. 144. & $\frac{1}{4}$. fanno 156 $\frac{1}{4}$. che è il quadrato di 12 $\frac{1}{2}$. E cosi 8 $\frac{2}{3}$. via 8 $\frac{2}{3}$. farebbe 32. terzi, cioe 10 $\frac{2}{3}$. & 64. $\frac{4}{9}$. che in tutto è 75 $\frac{1}{9}$.

Nelle quantità irrationali poniamo nel *Binomio* rad. 7 p̃ rad. 3. per quadrarlo, ò vogliamo dire, per moltiplicarlo in se stesso, lo intenderemo diuiso nelle due parti rad. 7. & rad. 3. che il quad. di radice 7. è 7. il quad. di rad. 3. è 3. che con il 7. fa 10. Il dutto di rad. 7. via rad. 3. è rad. 21. che il suo doppio cioe 2 & però rad. 4. (à che si riduce il 2.) via rad. 21. fa rad. 84. quale gionto al 10. detto fa 10. p̃. rad. 84. & questo è il quad. di rad. 7. p̃ rad. 3.

P R 8 R R 18 G
12 | 18
8 | 12
A R 8 C R 18 M

Ancora di qui si può estrahere vn modo di sommare insieme le quantità irrationali di rad. quadrate communicanti fra loro, che è date due rad. quadre da giõgere insieme. Al quad dell'vna si giunga il qu. dell'altra, & il doppio della moltiplicatione dell'vna nell'altra, che il cõposto sarà il qu. della som. delle 2. rad. date, onde d'esso composto presa la rad. quad. ella sarà la somma delle 2. rad. date. Per esempio. Date le 2. quantità a c, rad. 8. & c m, rad. 18. per sapere quanto è la som. loro; Imaginato sop. alla linea retta a c m, da loro cõposta formato il qu. a g, & diuiso nelli 4. rettang. che sono il qu. di a c, cioe di rad. 8. via rad. 8. che fa rad. 64. cioe 8. & il qu. di c m, cioe di rad. 18. via rad. 18. che fa 18. & di rad. 8. via rad. 18. che fa rad. 144. cioe 12. per vn loco rettangolo d r, & anco vn'altro 12. per vn altro loco rettangolo c n, questi 4. rettangoli detti 8. 18. 12. & 12. gionti insieme fanno 50. che è la grandezza del quad. totale a g. fatto sopra alla a m, suo lato, & perche di vn quad. la grandezza nasce a moltiplicare vn suo lato in se medesimo, (cioe d'vn quad. poniamo 64. esso 64. sua grandezza nasce à moltiplicare 8. lato d'esso quad. in se medesmo, che 8. via 8. fa 64. (si conosce che il lato è la rad. quadra del suo quadrato, cioe che 8. è la rad. quadra di 64. suo quad.) onde se il qu. a g, è 50. il suo lato a m, sarà la rad. di 50 cioe sarà r. 50. (che la quantità quale è rad. di 50, numero non quadrato non si può esprimere con num. rationale, ma conuiene esprimerla con la denominatione di radi) ma questa a m, è il composto di a c, rad. 8. & c m, rad. 18 però si vede la somma di rad. 8. con rad. 18. essere rad. 50.

Da questa istessa quarta propositione potiamo anco deriuarne il modo di sottrare delle quantità irrationali di rad. quadre communicanti fra loro, cioe di cauare vna rad. quadra da vn'altra a lei comunicante, che hauendo veduto nel sommare insieme le due rad. 8. & rad. 18. che della somma loro rad. 50. il quadrato 50. è composto dalli dui quadrati 8. & 18. di esse due quantità rad. 8. & rad. 18. & dal doppio del rettangolo loro, che sono dui supplementi rad. 144. & rad. 144. cioe 12. & 12. & essi con l'vn quad. poniamo, con il c d 8. della rad. 8. parte della a m, radice 50 fanno 32. si conosce il restante, douerà essere l'altro quadr. n r, 18. il lato del quale è radice 18. che è l'altra parte della a m, radice 50. Onde se vorremo cauare a c, radice 8. da a m, radice 50. trouaremo quanto è vno delli supplementi d r, ouero c n; che essendo ciascun d'essi quella parte del rettangolo a r, ouero a n, che resta a cauare il quadrato c d, da esso rettangolo, perche il rettangolo poniamo a n, è noto, (che nasce à moltiplicare la totale a m, radice 50. via la sua parte a c, ò vogliamo dire via alla a lei eguale a d,) & anco è noto il quadrato a m, sarà anco il supplemento c n, & però il suo doppio, che gionto al quadrato c d, noto, & la somma nota cauandola dal totale quadrato a g, noto sarà poi noto il restante, che è il quadr. n r, & però sarà anco noto il suo lato cioe la o n, & però la à lei eguale c m,

che è il restante della rad. 50. a m, cauatone rad. 8. a e; Et perche il rettangolo a n, della totale rad. 50. nella sua parte a e, contiene un supplemento, & vn quadrato, di a e, il doppio di questo rettangolo a n, contenirà dui supplementi, & dui quadrati di a e, ma tutto questo è maggiore dello Gnomone r d m, che si hà da cauare dal quadrato, a g, in quanto importa vn quadrato e d, se senza sminuire il detto doppio di a n, giongeremmo il quadrato, e d, al gran quad. a g, & dal composto cauaremmo il doppio del rettangolo a n. il restante sarà l'istesso che restaria a cauare il solo Gnomone r d m, dal solo quadr. a g. onde noi per maggior breuità nell'operare, potremo dire per cauare rad. 8. da rad. 50. elle si moltiplichino insieme che fanno rad. 400. cioè 20. & il suo doppio 40. si caui dal composto de' quadrati di dette rad. 8. & rad. 50. (cioe dal composto di 8. & 50) che è 58. & del restante, 18. (che è il quadrato n r, si pigli la rad. che è rad. 18. (lato del quadr. di c m) & questo è il restante cercato.

Se ne può anco estrahere il Modo di trouare la radice quadra delli numeri, ilche a mostrarlo qui saria lungo, ma si può diffusamente vedere nel nostro Trattato della rad. quadra, doue anco si mostra di esseguire l'istesso con i modi insegnatici dal solo discorso Naturale.

Nell'Algebra anco ci può seruire alla inuentione del Capitolo di ȥ. & +, eguale a numero, della quale equatione se bene hò mostrato nella mia opera dell'Algebra discorsiua numerale, & lineale, come se ne venga in cognitione con la Regola d'essa, & d'altre, inuentandole facilmente con le speculationi del discorso Naturale, nondimeno qui mostrarò anco come da questa quarta Propositione ella se ne deriui. Perilche supponeremo questo Quesito.

Egli è vn sito Quadrangolo rettangolo grande piedi 520. quale è diuiso in due stanze, che sono vna saletta lunga piedi 27. & vna camera quadra, si domanda quanto è la larghezza della saletta, che è l'istesso che la lunghezza, ò larghezza della camera.

Per trouarlo, supponeremo che della saletta e b e d, la larghezza sia e d, & della camera a b e f la larghezza a f, ouero b e, sia 1 + che la grandezza d'essa camera sarà 1 ȥ, (che 1 + lunghezza via 1 + larghezza fa 1 ȥ) & la grandezza della saletta sarà 27 +. (che 27. lunghezza via 1 + larghezza produce 27 +) la somma loro cioè 1 ȥ p̄ 27 + verrà perciò ad essere eguale a 520. Hora considerata la retta b e, 27. diuisa in due parti eguali in r, che ciascuna sarà 13 $\frac{1}{2}$. & la a r, diuisa in due parti a b. ignota, & b r, 13 $\frac{1}{2}$. & sopra ad essa a r. formato il quadrato a g. & allungata la b e, fino al lato oppostoli in t, esso quad. sarà diuiso nelli dui quadrati a e, & e g, & nelli dui supplimenti f t, b n, eguali l'vno all'altro, ma perche il b n, è 13 $\frac{1}{2}$ + mità del b d, 27 +, ancora l'f t sarà 13 $\frac{1}{2}$ +. onde tanto è la somma delli dui supplementi f t. b n, 27 +. quanto il rettangolo (ò saletta) b d 27 +, perilche inteso giontoli comunemente il quad. (ò camera) a e, che è 1 ȥ (essendo 1 + per lato) la somma da vna bãda, che è lo Gnomone t f r. cioe 13 $\frac{1}{2}$ +, & 1 ȥ, & 13 $\frac{1}{2}$ +, che fa 27 + p̄ 1 ȥ sarà eguale alla somma dall'altra bãda, che è il Rettangolo f e, 1 ȥ p̄ 27 +.

ma questo rettangolo f e, sappiamo essere 520. aleh e eguale detto 1 ȥ p̄ 27 +. però anco lo Gnomone t f r, sarà 520. onde giontoli il quadr. t n, che hauendo per ogni lato 13 $\frac{1}{2}$. (come è la lunghezza di b r, mità di b e 27.) è 182 $\frac{1}{4}$. la som. sarà 702 $\frac{1}{4}$. & questa è la grãdezza del quadr. a g, il lato a r, del quale verrà ad essere la rad. di questo 702 $\frac{1}{4}$. cioè 26 $\frac{1}{2}$. ma la sua parte b r, sappiamo essere 13 $\frac{1}{2}$. però la restante a b, sarà il resto sino a 26 $\frac{1}{2}$. cioè sarà 13, & perciò 13. ancora sarà l'altro lato a f. della Camera quadrata, & la larghezza della saletta posta essere 1 +, cioè habbiamo trouato il valore della + essere 13. Et il modo è stato a giongere il quadrato di 13 $\frac{1}{2}$: mità del 27. numero delle + (accompagnate ad 1 ȥ) à 520. numero della equatione (cioè a che si eguaglia l'1 ȥ p̄ 27 +.) & della somma 702 $\frac{1}{4}$. presa la rad. (che è 26 $\frac{1}{2}$. da essa cauarne il 13 $\frac{1}{2}$. mità del numero delle +, & il restante 13. è stato il valore della +; Et cosi potiamo stabilire la Regola all'Equatione, ò Capitolo d'1 ȥ, & +. eguale a numero, dicendo.

QVANDO 1. ȥ. & +, sono eguali a numero, giongasi esso numero al quadr. della mità del numero delle +, & della rad. della somma si caui la mità del num. delle +, che il restante sarà il valore della co.

E se volessimo applicare il superiore quesito a qualche ordinanza di genere militare si potria dire. Con 520. fanti si vuol fare vna ordinanza diuisa in due, per poterle separare quando occorra, talmente, che l'una sia quadra di gente, & l'altra habbi 27. fanti per fronte, o vogliamo dire per fila, si domanda quanti fanti per fronte sarà la quadra di gente, che come di sopra si trouarà ella essere di fanti 13. Et la regola in numero si potrà dare dicendo. Giongasi il numero dato de' fanti, cõ il quadrato della mità A, del numero della fronte dato della quadrangola, & della rad. della somma si caui la mità A, detta, che il restante sarà il numero della fronte della quadrata, che è anco il numero delle file della totale ordinanza composta dalle due.

Propositione 5. Theorema 5.

SE vna data linea retta sia diuisa in due parti eguali, & in due parti ineguali, il Rettangolo delle parti ineguali, insieme con il quadrato della linea, che è trà le settioni è eguale al quadrato della mità della retta data.

Sia la data A B. diuisa in due parti eguali in C, & in due parti ineguali in D, si dice, che il Rettangolo delle parti ineguali, cioè di D B. in A D. insieme con il quadrato della retta CD, che è la differenza delle due parti ineguali alla mità della linea data (cioe quello in che la parte maggiore supera la mita della data, o quello in che la parte minore è superata dalla mita della data) è eguale al quadrato della mità della data AB. Per dimostrarlo. Sopra alla mita B C. della data si formi il quadr. C E, & dall'estremo B, della data al punto F, oppostoli nel quad. si tiri il suo diametro B F. & dal punto D, alla C B, fino al lato oppostoli EF, si tiri la perpendicolare D L, & segnato O, doue ella sega il diametro, per esso O, si tiri la M G, equidistãte alla B C, & si allunghi fino che concorra (& sia in H) con la A H, tirata dall'A, equidistante alla C G, (o perpendicolare alla AC) che cosi il quadr. C E, sara diuiso in 4. rettangoli de' quali li dui D M, & G L, che stanno attorno al diametro BF, sono quadrati (per il primo Corollario della antecedente 4. propositione) che il G L, sara il quadr. della retta CB, che è fra le settioni, o diuisioni della data, & li dui C O, E O, saranno li supplementi eguali fra loro; Ancora il rettangolo AO. che sara contenuto dalla AD, parte maggiore delle due ineguali (& dalla D O (eguale alla D B, parte minore d'esse ineguali sara il rettangolo delle parti ineguali, questo insieme con il rettangolo G L, quadrato della C D, che è fra le settioni si ha da mostrare essere eguale al quadr. C E, il che si fara cosi; Il supplemento M L, è eguale al supplemento C O, onde gionto a ciascuno communemente il quadr. D M. l'vna somma, che è il rettangolo D E, sara eguale all'altra somma, che è il rettangolo C M. ma a questo istesso C M. è anco eguale il rettangolo A G (che sono fatti sopra a basi eguali A C, C B, (mita della data A B) & fra due medesme paralelle H M, AB) però il D E, sara eguale all'A G, onde a ciascuno d'essi gionto commune mente il rettangolo CL, all'una somma, che e il quadr. C E, della CB, mita della data AB, sara eguale l'altra somma, che e il composto del rettangolo AO delle parti ineguali, & del quadr. GL, che e il quadr. della CD linea, che e fra le settioni, Il che e quanto si uoleua mostrare.

Ancora senza tirare il diametro *B* F, fatto il quadr. e E, sopra alla mita e B della data A B, segnando la *B* m eguale alla *B* D, & dall'A, eretta alla AB, la perpendicolare A H, eguale alla *B* M, & tirata la H M, & dal D, alla B C, la perpendicolare D L, sapremo pure che il rettangolo G L, sarà il quadrato della C D, & che il rettangolo C O, sarà eguale all'M L, & concluderemo come di sopra il quadrato C E, essere eguale al composto del rettangolo AO, delle parti ineguali insieme con il quadr. G L, della C D.

In altro modo ancora si può dimostrare questa quinta propositione dicendo.

Intese le due parti ineguali A D, D *B*, della A *B*, come due linee particolari delle quali la B D. 2. è indiuisa, & la D A 8. è diuisa nelle due parti A Ç, 5. C D 3. ne segue (per la prima propositione di questo lib.) che il dutto di B D, 2. nella totale D A, 8. (& è 16.) sia eguale alla somma delli dui dutti della B D, 2. indiuisa nelle due parti D Ç 3. & C A 5. della A D, diuisa (che sono 6. & 10. & fanno 16.) ma perche alla parte C A 5. è eguale la C B 5. dal supposito (essendo diuisa la A *B*, in due parti eguali in Ç) noi in vece della C A, intesa hora la Ç B, diremo, il dutto di B D 2. in D A 8. (parti ineguali della A B) essere eguale al dutto di B D 2, in C D 3. giontoli il dutto di B 2. in B C 5. Et intesa la B C, diuisa in due parti in D, ne segue per la terza propositione) che il dutto della parte B D 2. nella totale B C, 5. (& fa 16.) sia eguale al quadr. d'essa parte *B* D, 2. (qual quad. è 4) giontoli il dutto di essa B D, 2. nell'altra parte C D 3. (qual dutto è 6. & con i quadr. 4. fa 10) onde fino ad hora sappiamo il dutto (10.) delle due parti ineguali *B*D, DA, della l B, essere eguale al quad. 4. di *B* D 2. giontoli dui dutti di *B* D 2. in C D 3. (che sono 4 6 & 6. & fanno in tutto 16) onde cosi da questa banda, come dalla banda del dutto delle parti ineguali B D, D A, posto, ò gionto il quadr. di C D 3. (linea che è intercetta fra li punti C) delle settioni eguali) & D, (delle settioni ineguali, della A *B*) ne segue che la somma da vna banda sia eguale

alla

alla somma dell'altra,& però al quadr.di B D 2,& quadr.9.di C D 3.& dutto 6. di B D 2, in D C 3 due volte(che sono 4.9.6.& 6.& fanno 25)sarà eguale il dutto di BD 2,in DA 8,(ch'è 16.)gion toli il quadr.9.di C D 3.(che 16,& 9.fa 25.(Ma alli medesimi quadrati di B D,& C D,& dui dutti di B D,in DC,due volte(gionti insieme tutti)(e per la quarta propositione)eguale il quadr.di B C 8,però a questo istesso quadr.di B C,mita della data AB,sara eguale il dutto di BD, in DA, parti ineguali della data AB,insieme con il quadr.di CD,intercetta fra li punti C,& D, delle settioni come si voleua mostrare.

Qui si aggiongono,ò denominano cō numeri le linee occorrenti per facilitare la intelligenza della dimostratione Geometrica alli principianti,& accio che a parte a parte la possino ritenere in memoria,perche si scriue a giouamento vniuersale.

Da questa quinta propositione si può deriuare la Regola all'Equatione d'1 cen. & numero eguale a co.che per mostrarla si propone il seguente quesito.

Si vuol fare vna Piazza quadrangola rettangola,che giri 100.pertiche,cioè che fra la lūghezza,& la larghezza sia pertiche 50,& sia grande di superficie pertiche 616. si domanda quanto sara' lunga,& quanto larga. Per trouarlo poneremo, che vno delli suoi dui lati continenti vn angolo retto sia 1 co.che l'altro sara il restante fino a 50,cioè sara 50.me.1 co. il prodotto loro è 50.co.men. 1.cen.che saria la superficie,ma ella deue essere 616.però detta quantità 50.co. me.1 cen.è eguale a 616.& accomodando le parti, leuando il me. cioe giongendo vn cen. a ciascuna banda si hauerà 50.co.eguale a vn cen.più 616.

Hora imaginaremo il parallelogrammo rettangolo a b r d,che sia le 50.co.la lunghezza(ò un lato a b,del quale sia 50.numero delle co.& che per ciò la larghezza , o altro lato angolare a d, sia vna co.(che vna co.via 50.fa 50.co.& si diuida la a b 50.in due parti eguali in n; Et perche questo rettangolo b d,50 co.è eguale,o vogliamo dire è tanto quanto vn cen.più 616.lo fingeremo con una retta s e,(equidistante alli lati a d,b r,)diuiso in due parti d e,er,che l'una sia un cen. & l'altra sia il 616.(che se l'un cen. sara piu di 616. (cioè se la co.valera più di rad.616.)egli sara la parte maggiore,ma se sara manco di 616.egli sara la parte minore, che quando un cen. fusse quanto e il 616.all'hora cosi l'1. cen. come il 616. sariano la mita del parallelogrammo d b,ma essendo il cen. 616 , la co. sua rad.saria rad. 616.& pero la a d,ouero b r,saria rad.616.per il che douendo cosi il Rettangolo d e,come il e r essere 616.conuerria,che cosi l'altro lato a e,del d e,come l'altro lato b e, del e r,fusse medesimamente rad.616,& cosi la a b, saria diuisa per mezo in e,& saria di necessità il doppio di rad.616. cioe radice 2464.essendo equilatero , o quadro ciascuno de' dui Rettangoli d e,e r,& perche la b,mostra il numero delle co.a che esso 1.cen. piu 616.sono eguali,conuerria di necessità, che all'hora il numero delle co.fusse rad.2464. ne potria essere 50. o altro num. cioe conuerria,che si hauesse un cen.più 616 eguale a rad.2464. co.perilche hora che si ha vn cen.piu 616. eguale a 50 co. cioe che il numero delle co.è ueramente 50.si uede che il ualore dell' un cen. non può essere l'istesso,che e il numero 616.ma conuiene,che sia diuerso dal 616. & che percio diuidendo il rettangolo d b,in due parti tali, che l'vna sia un cen. & l'altra 616. esse due parti siano ineguali, & che per cio anco la retta a b.50. sia diuisa in due parti ineguali in e; Questo auuertito per trouare quanto il punto e,sia lontano dall'n,accioche si sappi quanto sia la a e, ouero la e b,ciascuna delle quali puo essere ualore della co. Consideraremo,che per quello,che ci ha insegnato la presente quinta propositione;essendo la retta a b 50.diuisa in due parti eguali in n, & in due parti ineguali in e,il quadr.della mita di essa a b,cioe 625.quadr.di 25.mita di 50.e eguale al dutto di a e,in e b,parti ineguali,giontoli il quadr.di e n,linea intermedia fra le settioni (onde il quadr. di essa mita della a b,uiene a superare il dutto delle due parti a e,e b,nel quadr. di e n, intermedia;o vogliamo dire il dutto delle due parti ineguali è minore del quadr. della mita della a b, nel quadr.della e n,intermedia,& perciò a cauare il dutto delle due parti ineguali dal quadr. della mita della a b,il restante è il quadr.della e n,intermedia,ma il dutto di n e, in e b,è 616. numero dato per compagno ad vn cen.perilche se il cen.sia quadr. d e, il rettangolo e r, 616. hauerà per vn lato e b,& per l'altro e s,eguale ad a e;Et se anco il cen.sia il quadr. s b, il rettangolo e d, hauera per vn lato a e,& per l'altro e s,eguale a e b; Onde in ciascun modo il rettangolo 616. è

sempre

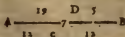
ſempre il dutto delle due parti ineguali a c, c b, della a b, perilche cauatolo da 625.quad.della mità di a b.il reſtante 9.e il quad.di c n,linea intermedia alle ſettioni,onde queſta e n,che ſarà 3. (rad.del 9.)ſe la cauaremo da a n.25 il reſtante a e.22.ſarà il lato del quad. d e,cioè ſarà il valore della ꝶ.quando eſſo quad.ſia minore di 616.rettangolo accompagnatolo per compire l'a r 50. ꝶ.Ouero ſe eſſa e n.3.giõgeremo ad n b.25.mità di a b,il compoſto e b,28.ſarà il lato del quad. e r,cioè il valore della ꝶ.quando eſſo quad. ſia maggiore di 616.rettangolo accomportogli per compire l'a r,50 ꝶ.Auuertendo però,che quando e a,22.ſia il lato del quad.eſſendo egli l'a ſ, all'hora la a d,lato pure del quad. larghezza del Rettangolo a r.50 ꝶ.ſarà ſimilmente 22. & però perche 22. via 50. fà 1100, il Rettangolo a r, cioe le 50.ꝶ. importaranno 1100, quanto è è la ſomma di 484 quad.di 22.& 616. Ma quando e b. 28.ſia il lato del quad. eſſendo egli il e r,all'hora la b r,lato pure del quad.& però la a d, larghezza del rettangolo a r,50.ꝶ, ſarà ſimilmente 28.& però,perche 28.via 50.fà 1400. il rettangolo a r, cioè le 50.ꝶ.importaranno 1400, quanto è la ſomma di 784.quad.di 28.& 616.Di qui dunque ſi conoſce,che nella Equatione d'ȝ & num. eguale à ꝶ.il ȝ può hauere per lato, la mità del num. delle ꝶ. & la ꝶ.vale quanto è eſſa mità del num.delle co.& perciò eſſo ȝ importa tanto quanto è il num.accom pagnatoli,che l'vno,& l'altro,cioè il valore del ȝ, & il num.accompagnatoli all'hora è quanto il quad.della mità del num.delle co. & perciò ſempre che il quad.della mità del num. delle co è eguale al num.accompagnato ad 1.ȝ. è neceſſario che il valore della co. ſia eſſa mità del num. delle co. & perciò ſenz'altra operatione eſſo valore delle co.è noto.Ma quãdo il num.accompagnato ad 1.ȝ è minore del quad.della mità del num.delle co.all'hora la co. (ò lato del ȝ.) hà ſempre due valute, perche il ȝ. può importare più,& anco può importare manco del num. accompagnatoli, come ſi è veduto,& coſi vna valuta della co.ſarà maggiore della mità del num.delle co.& l'altra valuta ſarà minore della mità del nu.delle co. ma fra tutte due farãno in sõma quãto importa il nu. totale delle co. Et per trouare eſſe due valute ſi caui il num.accõpagnato all'1.ȝ.dal quad.della mità del num delle co.& del reſtante preſa la rad. ella ſi giunga alla mità del num. delle co.che il compoſto ò ſomma ſarà la valuta maggiore delle co.Et anco detta rad.ſi caui dalla mità detta del num.delle co.che il reſtante ſarà la valuta minore della co.Onde trouata l'vna valuta cauandola dal totale num delle co.il reſtãte ſarà l'altra valuta. Ma è da auuertire,che nõ può mai il num.accompagnato all'1.ȝ.eſſere maggiore del quad.della mità del num.delle co.che all'hora la Equatione ſaria impoſſibile.cioè poniamo nell'eſempio di ſopra doue il nu. delle co. è 50. & però il quad.di 25. ſua mità è 625. non può il num.da accompagnarſi ad 1.ȝ.eſſere maggiore di detto 625.cioè non potrà eſſere poniamo 676 cioè non potra à 50.co. eſſere eguale 1.ȝ. p̃ 676.che ſe queſta Equatione fuſſe poſſibile,conuerria, che la co.valeſſe, ò la mità di 50. nu. delle co.cioè 25.ò più di 25. ò manco di 25. Ma 25. non può valere, perche all'hora del rettangolo a r,50.co.diuiſo nell'1.ȝ.& num.eſſendo a n,25.ancora a d,che è l'altro lato ſaria pure 25.& coſì b r, & n ſ,& n b, onde coſi n r,come a ſ.ſaria quad. & importaria 625, quad.di 25. & però preſo per l'1.ȝ. l'a ſ, l'altro n r,che ſaria il num.non potria eſſere 676 cioè maggiore di detto 625. Nè meno può la co.valere manco di 25.(mità del 50 a b.)perche dicendoſi ella valere poniamo 24.conuerria che vn lato del ȝ.a ſ ſu la a b, fuſſe poniamo la a t,minore di a n.mità di a b,& però l'altro lato a d. ſaria medeſmente mãco di 25, & coſì la larghezza del rettangolo a r,50 co.ſaria manco di 25 & eguale ad a t,cioè il rettangolo t r. ſaria cõtenuto dalle due parti a t, t b,ineguali della retta a b,50.& perciò(per queſta 5.propoſitione)eſſo rettangolo delle parti ineguali di neceſſità ſaria minore del quad della a n,mità di a b.(& in tanto quanto importa il quad.di t n.intercetta fra le diuiſioni della a b)onde è impoſſibile che eſſo rettangolo t r, che deue eſſere eguale al num.accompagnato all'1 ȝ.ſuperi il 625.quad.della mità del 50.hora num.delle co.Similmente non può la co.valere più di 25.perche dicendoſi ella valere poniamo 26. conuerria che un lato del ȝ.& ſia il quad.t r.fuſſe poniamo la t b, maggiore di b n, mità di a b,onde l'altro lato b r,& però a d, ſaria medeſmamente maggiore di b n, reſtando a t, minore di b n, ò di a n,mità dell'a b, & così il rettangolo a s,accõpagnato all'1.ȝ. haueria per vn lato a d, eguale à t b,& per l'altro a t, perilche ſaria eſtenuto delle due parti ineguali a t,t b, dell'a b, ma il dutto delle parti ineguali dell'a b, è di neceſſità minore del dutto delle due ſue parti eguali,cioè del quad.della mità d'eſſa a b,(& in tanto quanto importa il quad.di t n, intercetta fra le due diuiſioni dell'a b) però è impoſſibile che il numero accompagnato all'1. ȝ. poſſa mai eſſer maggiore del quadrato della mità del numero delle co.alle quali l'1.ȝ & num.ſiano egua-

li; Conoſciamo dunque, che la Equatione d'1. z. & numero eguali à coſe, può eſſere poſſibile, & impoſſibile, & eſſendo poſſibile, può la co. alle volte hauere vna ſola valuta, & alle volte due; Impoſſibile è ſempre, quando il numero accompagato all'1. z. ſuperaſſe il quadrato della mità del numero delle co. Ma poſſibile è ſempre che eſſo numero accompagnato all'1. cen. ſi poſſa cauare dal quadrato della mità del num. delle co. Et la Regola della Equatione ſarà la già trouare di ſopra, & ſi porrà dire. Quando 1 cen. & numero ſono eguali à co. Caueſi il numero dal quadrato della mità del nu. delle co. & la radice del reſtanti ſi giunga, & caui alla, & dalla mità del numero delle co che ciaſcuno delli dui reſultāti ſara il valore della co. E quando a cauare il numero della Equatione accompagnato all'1. cen. dal quad. della mita del num. delle co. non reſtaſſe niente, cioè che eſſi fuſſero eguali, all'hora la valuta della co. ſaria la mità detta del num, delle co. & ella hauerebbe quella ſolo valuta. Auuertendo nondimeno che potendo ſempre deriuare queſta Equatione di 1. cen. & numero eguale a co dal voler diuidere vna quantità in due parti tali che moltiplicate inſieme faccino vn dato prodotto, ſi vede che ò le parti delle quantità da farſi ſaranno ineguali, & così ciaſcuna di loro ſi potra pigliare per valuta della co. ò eſſe due parti ſaranno eguali, & coſi ciaſcuna di loro ſara pure valuta della co. ſe bene eſſendo elle eguali ſe ne nomina vna ſola, & ſi dice all'hora la co. hauere vna valuta ſola.

Onde molto conuenientemente ſi potria dire, queſta Equatione d'1 cen. & numero eguali a co, quando ella è poſſibile hauer ſempre due valute della co. ma elle alle volte eſſere ineguali, & alle volte eguali ſecondo che il numero accompagnato all'1. cen. ſia alle volte minore, & alle volte eguale al quadrato della mita del num. delle co. Et tornando al noſtro queſito nella piazza grande 616. hauendo poſto vn lato eſſere 1. cen. & trouādo la co. valere 28. & anco 22. diremo che vn lato d'eſſa piazza ſara 28. & anco potra eſſere 22. cioè che delli dui lati longhezza, & larghezza d'eſſa Piazza l'vn lato, & ſara la lunghezza è 28. & l'altro, & ſara la largh. è 22. Et così ſi ſara diuiſo 50. in due parti 28. & 22. moſtrate dalle due valute della co. che moltipl. inſieme produc. 616.

Vediamo ancora, che da queſta quinta Propoſitione ſenza ſeruirci dell'Algebra ſe ne può eſtrahere il modo di diuidere vna quantità data in due parti tali, che il prodotto loro ſia vna quantità propoſta, qual prodotto però non ecceda il quadrato della mità della quantita data; perche il prodotto delle due parti ineguali nelle quali ſi diuida vna quantita ſi è veduto eſſere minore del quadrato della mità, ò delle due parti eguali in che eſſa data ſi diuideſſe, & in tanto quanto è il quadrato della quantita in che ciaſcuna delle due parti ineguali è differente dalle due mita della data, che eſſendo. poniamo la data 18. diuiſa in due parti ineguali 7. & 11. ciaſcuna dalle quali è differenti da 9 mita del 18 in 2. il quadrato di queſto 2. cioè 4. è quello in che 77, dutto di 7. via 11 è minore di 81. quad. di 9. mita di 18. & però giunto eſſo 4. al 77. fa l'81. detto; Onde ſe vorremo diuidere 18. in due parti tali che il prodotto loro ſia 77. cauaremo queſto 77. dal quadrato della mita di 18 cioè da 81. & del reſtante pigliaremo la rad quadra che è 2. quale giongeremo, & cauaremo al 9. mita del 18. & i dui reſultanti 11. & 7. ſaranno le due parti del 18. che moltiplicate inſieme fanno 77. Queſta regola nelle operationi Geometriche, & Algebratiche ha molto vſo, & ſi può applicare a molte coſe occorrenti, che per eſſempio ſe voleſſimo applicarla ad ordinanze quadrāgole di Gente d'Arme ſi potria dire; Si hāno 198. fanti, & ſi vogliono ponere in ordinanza quadrangola tale che giunto il numero delle file al numero delli fanti, che ſarāno per fila facci 29. ſi domandano eſſi numeri di file, & fanti per fila; Che operato come di ſopra ſi riſponderebbe li dui numeri cercati eſſere 18. & 11. che ſignificariano 18. file a 11. per fila, ouero 11. file a 18. per fila a noſtro beneplacito. Perche il numero de' fanti d'vn'ordinanza quadrangola ſi troua moltiplicando il numero delli file per il num. delli fanti che ſono in ciaſcuna fila, che è come dire il numero della frōte per il numero del fianco, conoſciamo che eſſendo la ſomma delli dui numeri frōte, & fianco 29. conuien diuidere 29. in due parti tali che il prodotto loro ſia 198. num. delli fanti dell'ordinanza però preſa la mita di queſto 29. che è 14. $\frac{1}{2}$. del ſuo quadrato 310. $\frac{1}{4}$. cauaremo il 198. & del reſtante 12. $\frac{1}{4}$. pigliaremo la rad. quadra che è 3. $\frac{1}{2}$. quale giongeremo, & caueremo al 14. $\frac{1}{2}$. & i dui reſoltanti 18. & 11. ſaranno le due parti del 29. che moltiplicate inſieme fanno 198. & l'vna moſtrara il numero della frōte, & l'altro il numero del fianco a noſtra voglia, & ſi potranno fare 18. file a 11. fanti per fila, & 11. file a 18. fanti per fila.

19 D 5
A ——— 7 ——— B
12 C 12

Da queſta Propoſitione ſi impara vna proprieta di 3. quantita fra loro egualmente diſtāti, cioè tali che in quello in che la prima ſupera la ſeconda, ancora nell'iſteſſo la ſecōda ſuperi la terza (& 3. quantità tali, ſi chiamano propor. Artimeticamente) come ſariano A D. 19. C B. 12. & D B. 5. che A D ſupera A C, in 7. nel qual 7. l'iſteſſa A C, & però la C B. 12. eguale alla A C (inteſa la totale A B, diuiſa per mezo in C, & in due parti ineguali in D) ſupera la D B 5. & la proprietà è, che d'eſſe 3. quantità 19. 12. 5. il

dutto

dutto delle estreme, cioè 5. via 19. che fa 95. insieme con il quadrato della eguale loro differenza 7 qual quadrato è 49. & fanno in somma 144. è sempre eguale al quad. della media 12. che pure è 144. Perche la somma delle due estreme 19. & 5. compone la 24. della quale la media 12. è la mita, essendo d'essa 24. le 19 & 5, le due parti ineguali, & il 7. differenza fra il 19. & 12. ò fra il 12. & 5 è la retta, ò quantità intercetta fra le settioni, il quadrato della quale insieme con il dutto delle due parti ineguali sappiamo (per questa quinta propositione) essere eguale al quadrato della mita del 24. linea diuisa in due parti eguali 12. & 12. Et in due ineguali 19 & 5.

Da questa medesima quinta propositione può deriuare vn modo da trouare vn numero quad. al quale giunto vn dato numero la somma sia numero quadrato; Ouero trouare vn numero quadrato dal quale cauato vn dato numero il restante sia numero quadrato, ò vogliamo dire trouare dui numeri quadrati la differenza de' quali sia vn dato numero. Che hauendo veduto C D 7. & A C, 12. essere dui numeri i quadrati de' quali 49. & 144. sono differenti in 95. dutto di D B 5. (differenza di essi C D 7. & A C 12.) i A D 19, (sõma delli medesimi C D 7. con A C 12, eguale a C B (conosciamo che trouati dui numeri ineguali quali si voglino il dutto de' quali sia 95. (preso hora per numero dato,) & siano poniamo 5. & 19. la mita di 24. somma loro, cioe 12; sarà vn numero, & la mita della differenza loro 14. cioè 7. (Ouero la differenza del 12. a 19. ò a 5. detti, che è 7.) sarà vn'altro num. i quadrati delli quali; cioè 144. & 49. saranno differenti nel 95. dato. Et perche esso 95 può essere prodotto da innumerabili numeri, & quãtità si vede che innumerabili numeri, & quantità si possono trouare a due a due, i quadrati delle quali saranno differenti in esso 95. Che per esempio delli dui producẽti il 95 posto l'vno 95. & l'altro 1. (accioche si habbino numeri intieri) la loro somma à 96. che la mita 48. è il numero maggiore, & esso cauato dal 95. maggiore delli dui producenti, ò da esso cauato l'1. minore delli dui producẽti, ò della differenza 94. de' dui producenti presa la mita che è 47. questo 47. sarà il numero minore delli dui, i quadrati de' quali cioè 2304. & 2209. sono differenti nel 95. dato. Et nelli rotti se delli dui producenti il 95. poneremo l'vno $\frac{1}{2}$. & l'altro 190. (che si troua partendo 95. per $\frac{1}{2}$.) la somma loro sara 190. $\frac{1}{2}$. che la mita è 95. $\frac{1}{4}$. per il maggiore delli dui numeri cercati, la differenza del quale ad $\frac{1}{2}$. ò à 190. $\frac{1}{2}$. è 94 $\frac{3}{4}$. per il minore delli dui numeri cercati, che li quadrati loro 9072. $\frac{9}{16}$. & 8977. $\frac{9}{16}$. sono differenti in 95. numero dato.

	95. $\frac{1}{4}$.
via	95 $\frac{1}{4}$.
	9025. $\frac{1}{16}$
	47. $\frac{1}{2}$.
fa	9072. $\frac{9}{16}$.

	94. $\frac{3}{4}$.
via	94. $\frac{3}{4}$.
	8836. $\frac{9}{16}$
	94.
	47.
fa	8977. $\frac{9}{16}$

rad. 5. in 95. cioè in rad. 9025. entra per rad. 1805.
rad 5. in rad. 1805. entra per rad. 361. che è 19. volte però la somma loro è 20. volte essa rad. 5. che 20. cioè rad. 400. via rad. 5. fa rad. 2000. che è la somma loro la mita è rad 500.

rad. 5. in rad. 1805. entra 19. volte però nella differenza loro entrara vna volta manco cioè 18. volte, onde ella sara 18. cioè rad. 324. via rad. 5. che fa rad. 1620. la mita della quale è radice 405.

Et nelle quantità irrationali posti i dui producenti il 95. rad. 5. & rad. 1805. la loro somma e rad. 2000. che la mita rad. 500. e la quantità maggiore; Ancora la differẽza d'essi dui ꝑducenti cioe rad 5. & rad. 1805 e rad. 1620. che la mita rad. 405. e la quantità minore i quadrati delle quali 500. & 405. sono differenti in 95. numero dato. Il medesmo si può verificare nelli Binomij, Residui, rad. legate, ò altre quantità irrationali composte come si voglino, Et nelle quantità Algebratiche, ò miste; & essendo il dato (differenza de dui quadrati da trouarsi) qual sorte di quãtità si vogli da seruirsene nelle occorrenze da chi sarà esposto nelli Elementi delle quantità diuerse irrationali, & Algebratiche, la diligente Pratica nelle operationi delle quali deue antecedere ad ogn'altra dottrina acciò si renda facile, & di comodo vso.

Questo inteso potiamo anco deriuarne vn modo da formare quanti Triangoli rettangoli voremmo di lati rationali, (& anco di numeri intieri) che posto per base del Triangolo rettangolo vn numero à beneplacito, & sia hora 12, il quadrato del quale e 144. per che sappiamo, per la 47. propositione del primo libro, che il quadrato della subtensa all'angolo retto e quanto la somma delli dui quadrati dell'altezza, & base, & che perciò il quadrato dell'altezza, e differente, cioe minore del quad. della subtensa, in quanto importa il quadrato della base, conosciamo che i dui numeri dell'altezza, & della subtensa sono dui numeri tali che i quadrati loro sono differẽti in 144. quadrato del 12 base presa, Onde ogni Coppia di numeri, cioe ogni dui numeri che moltiplicati insieme produchino il 144. saranno atti nel modo mostrato a darci l'altezza, & la subtensa d'vn Triangolo rettangolo che habbi per base il 12. detto; Che se pigliaremo 1. & 144. che producono 144. la mita di 145. somma loro, cioe 72. $\frac{1}{2}$. sarà la subtensa. Et la

mita

mira di 143. differenza loro, cioe 71.$\frac{1}{2}$. sara l'altezza, perche i quadrati d'essi 72.$\frac{1}{2}$.& 71.$\frac{1}{2}$. cioe 5256.$\frac{1}{4}$.& 5112.$\frac{1}{4}$. sono differenti in 144. quadrato di 12. base, & però al quadrato della base gionto il quad. dell'altezza fa quanto il quadrato della subtensa; Et se per producenti del 144. pigliaremo 2. & 72. la somma de' quali e 74. & la differenza e 70. le mita de' quali sono 37.&35 essi saranno il 37. subtensa, & il 35. altezza del Triangolo rettangolo similmente, che per base habbia il medesimo 12. perche i quadrati di 37. & 35. sono medesmamẽte differẽti nel 144. quad. di 12. base; Et cosi ne potremo trouare quanti altri vorremo.

144. dato

Producenti		Somme	Differenze	mita delle somme che sono le Subtense	mita delle differẽze che sono le Altezze
1.&	144.	145.	143.	73.$\frac{1}{2}$.	71.$\frac{1}{2}$.
2.	72.	174.	70.	37.	35.
3.	48.	51.	45.	25.$\frac{1}{2}$.	22.$\frac{1}{2}$.
4.	36.	40.	32.	20.	16.
5.	28.$\frac{4}{5}$.	33.$\frac{4}{5}$.	23.$\frac{4}{5}$.	16.$\frac{9}{10}$.	11.$\frac{9}{10}$.
6.	24.	30.	18.	15.	9.
7.	20.$\frac{4}{7}$.	27.$\frac{4}{7}$.	13.$\frac{4}{7}$.	13.$\frac{11}{14}$.	6.$\frac{11}{14}$.
8.	18.	26.	10.	13.	5.
9.	16.	25.	7.	12.$\frac{1}{2}$.	3.$\frac{1}{2}$.
10.	14.$\frac{2}{5}$.	24.$\frac{2}{5}$.	4.$\frac{2}{5}$.	12.$\frac{1}{5}$.	2.$\frac{2}{5}$.
11.	13.$\frac{1}{11}$.	24.$\frac{1}{11}$.	2.$\frac{1}{11}$.	12.$\frac{1}{22}$.	1.$\frac{1}{22}$.

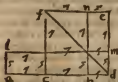
Voglio hora con la occasione dell'hauer mostrato il modo sopradetto del formare li Triangoli rettangoli con lati di numeri rationali, far noto ancora vna particolare proprietà d'essi Triangoli rettangoli, & e che. Il quadrato della subtensa del Triangolo rettangolo e sempre eguale al quadruplo della superficie del Triangolo giontoli il quadrato della differenza de' dui lati, che contengono l'angolo retto; Et perche la superficie del Triangolo rettangolo e il dutto della base, via la mita dell'altezza, ò vogliamo dire e la mita del dutto de' dui lati che contegono, ò formano l'angolo retto; quattro di questi mezzi dutti, cioe dui dutti d'essi dui lati saranno il quadruplo della superficie del Triangolo, si potrà perciò dire; Il doppio del dutto de' dui lati, che contengono l'angolo retto, insieme con il quadrato della differenza d'essi dui lati sono eguali al quad. della subtensa ò lato opposto all'angolo retto, il che si dimostrarà così; Nel Triangolo rettangolo a b c sopra alli dui lati a b, & b c, continenti l'angolo retto b, (& gli nominaremo con numeri per maggior commodità, & sia a b, chiamato 5. & b c, 8.) formaremo i dui lor quad. a d, 25. & e c, 64. & dal lato più lungo b c, 8. segaremo la parte b r, 5. eguale al lato a b, che la restãte r c, 3. sara la differenza d'essi dui lati a b 5. & b c, 8. Ancora dal punto r, nel quadrato e c, tiraremo la retta r n, e qui distante alli lati b e, c g, ò per pendicolare al b c, che così il rettangolo b n, quale hauerà per lunghezza b e, 8. (eguale al lato b c 8. & per larghezza b r, 5.) eguale al lato a b 5. sara il dutto, ò vn dutto delli dui lati a b, b c, continenti l'angolo retto b, in esso Triangolo a b c; Ancora dalla c g, 8. segaremo la parte c u, 3. eguale alla c r, 3. (che la restante v g, 5. sara eguale alla r b, & però al lato a b 5.) & dall'v, lino alla r n, tiraremo la v o, e qui distãte alla c r, che così ella sara eguale alla oppostali c r, 3. & però alla c v; onde il rettangolo C o, sara il quadrato di r c, 3. differẽza de' dui lati a b, 5. & b c 8. detti; Et imaginato su la g v. 5. eguale al lato a b, 5 formato di fuori il quadrato v i, che perciò sara eguale al quad. a d, del lato detto a b; & inteso giõtoli il rettangolo o g. perche la retta n g. 3. è eguale alla r c, & la g i, alla r b, 5. tutta la n i, 8. sara eguale al lato b c, 8. onde il rettãgolo o i (composto del quadrato v i, & rettangolo o g.) che hauera p lunghezza n i, 8. eguale al lato b c, 8. & per larghezza n o, (ouero h i 5.) eguale al lato a b, sara

vn'altro dutto delli dui latti detti A B 5. & b c, 8. perilche la somma delli dui rettangoli b n (40. contenuto da b e. 8. & e n 5.) & n h (40. contenuto da n i, 8. & i h, 5.) sara il doppio del dutto delli dui lati a b, 5. & b c, 8. Et perche a questi dui rettangoli gionto il quadrato o c, (9. di r c, defferenza de dui lati a b, b c,) il composto e il quadrato c e, di b c, & il quadrato g h, di a b, ne segue, che alli dui quadrati detti delli dui lati a b, b c, sia eguale il composto delli dui rettangoli delli medesimi dui lati insieme con il quadrato della differenza r c, d'essi dui lati, Ma alli medesimi dui quadrati di a b, b c, (per la 47. propositione del primo libro) eguale il quadrato di a c, però ne segue (per la prima Comune Eccessione,) che a questo quadrato di a c, siano eguali il doppio del rettangolo delli dui lati a b, b c, continenti l'angolo retto insieme con il quadrato della differenza de' medesimi dui lati; che e quello che si voleua mostrare. Et quãdo i dui lati continenti l'angolo retto nel Triangolo siano eguali fra loro, che perciò il quadr. della loro differenza e niente

all'ho-

all'hora il solo doppio del dutto loro, che e la somma de' dui quadrati loro (poiche il dutto dell'vno nell'altro e quanto il quadrato d'vno d'essi) e eguale al quadrato della subtensa, ò lato opposto all'angolo retto.

Propositione. 6. Theorema. 6.

SE vna proposta linea retta sia diuisa in due parti eguali, & ad essa sia giunto in lungo alcuna retta data; Il rettangolo contenuto dal dutto della totale linea così composta nella aggiunta, insieme con il quadrato della mita della proposta sono eguali al quadrato della linea che è composta dalla mita della proposta, & dall'aggiunta.

Sia la linea a b, proposta diuisa in due parti egua'i in c, & ad'essa sia aggiunto in lungo la retta B D. componendosene la retta a d, si dice che il rettangolo di questa a d, nell'agiunta b d, insieme con il quadrato della mita della proposta a b, cioe con il quadrato di b c; sono eguali al quadrato di e d, composta dalla aggiunta b d, & dalla mita b c, della proposta a b. Per dimostrario, Sopra alla c d, (composto della mita della proposta, & della agiunta) si formi il quadrato c e, & in esso dall'angolo d. all'f. oppostoli si tiri il diametro d f. & dal punto b, (termine comune all'aggiunta, & proposta (si eleui alla c d, la perpendicolare b n, fino al lato oppostoli e f. & segnato o, doue ella sega il diametro d f, per esso o, alla d e, si tiri la equidistante m g, allungandola verso g, finche concorra con vna retta dall'a, eleuata perpendicolarmente alla a d, & sia in l, & così il quadrato c e, sara diuiso in 4. rettangoli de quali, li dui b m, g n, che stãno attorno al diametro d f. sono (per il corollario della quarta di questo) quadrati, il b m, della b d, linea aggiunta, & il g n, della b c, mita della a b, proposta, & li dui c o, m n, sono i dui supplementi eguali l'vno all'altro; Ancora nel Rettãgolo a m, li dui contrapositi lati a l, & d m, sono eguali fra loro, & perche il d m, e eguale al d b, (che sono lati d'vn medesimo quadrato b m,) si vede che il rettangolo a m, e contenuto dalla totale linea a d, (composto della proposta a b, & della aggiunta b d.) & dalla aggiunta b d; Et perche le due rette a c, c b sono egua'i fra loro (essendo mitadi della proposta A B.) il rettangolo a g, sara eguale al c o, (essendo formati sopra ad eguali basi A C, c b. & fra medesme equidistante a b, l o,) ma al c o, è eguale anco il rettangolo, ò supplemento m n. però l'a g, sara eguale all'm n, onde aggiunto così all'a g. come ali m n, comunemente il rettangolo c m l'vna somma che e il rettangolo a m, sara eguale all'altra, che e il Gnomone n m c, Et ancora a ciascheduna di queste; cioe così il rettangolo a m come al Gnomone n m c giunto comunemente il quadrato g n, l'vna somma che e il rettãgo'o di a d, in d b, così il quadrato di c b, sara eguale all'altra che e il quadrato c e, della retta c d; Cioe il rettango'o fatto dal dutto della linea aggiunta, nel composto della aggiunta, & proposta, insieme cõ il quadrato della mitã della proposta; sono eguali al quadrato della linea composta della aggiunta, & mita della proposta, che quanto si voleua dimostrare.

Questa sesta propositione si può anco dimostrare nel modo seguente.

Consideraca la totale a d, diuisa nelle 3. parti a c, c b. b d; ne segue che al dutto di tutta essa a d in alcuna lin. data, & però hora nell'aggiũta b d, sia eguale (per la prima propositione) il cõposto, ò som. delli 3. rettãg. fatti da detta lin. data b d, in ciascuna delle 3. parti della diuisa a d, ma di esse 3. parti la a c, è eguale alla c b, (che la proposta linea a b e diuisa in due parti eguali in c,) onde il dutto della data b d, nella parte a c è eguale al dutto della medesma data b d. nell'altra parte c b; però il composto delli dui rettangoli, ò dutti della data b d. nelle due parti a c, c b. è quanto il doppio del dutto della data b d, nella c b, Et il dutto della data b d, nell'altra parte h d, della a d; è il quadraro della istessa data (ò aggiunta) b d, perilche il dutto di tutta la a d, nella aggiunta b d, è eguale, al quadrato di detta aggiunta b d, insieme con il doppio del dutto di detta b d, nella h c; Onde à ciascuna banda giunto il quadrato di b c, (mita della proposta a b,) ne segue che il dutto della totale A D. insieme con il quadrato di b c, siano eguali al quadrato di b d, con il doppio del dutto di b d, in b c, & con il quadrato di b c; Ma considerata la retta c d. diuisa in due parti in b, sappiamo (per la quarta propositione) che anco a questi, quadrat. di b d, & quadrat. di b c, sue parti; & doppio del dutto dell'vna parte b d, nel-

l'altra parte b c; è eguale il quadrato della detta c d, però (per la prima commune concessione) à questo quadrato di c d, verrà ad'essere eguale il dutto di a d, in d b, insieme cô il quad. di c b, cioè il dutto del composto 19. della proposta a b, 14. cô la aggiunta b d 5. qual dutto è 95. insieme con il quadrato 49. della b c, mita della proposta a b, che fanno in somma 144. sono eguali al quad. di 12. C D. linea composta della c b, 7. mita della proposta a b, & dalla aggiunta 5. b d, che è quello che si voleua mostrare.

Et ancora la istessa sesta propositione, si troua dimostrata mediante la antecedente quinta, così.

Sia pure la proposta a b, diuisa in due parti eguali in C, & ad essa aggiûta la b d; si dice che il dutto della totale a d, così composta nella aggiunta b d, insieme con il quad. di b c, mita della proposta sono eguali al quadrato di c d, composta dalla mita della a b, proposta, & dalla b d, aggiunta. Per dimostrarlo, Fingasi alla proposta a b, dall'altra parte a, aggiunta in retto la a g, eguale alla già aggiunta b d, che così intesa tutta la retta g d, ella verrà ad essere diuisa in due parti eguali in C, (che c a, a g, sono eguali a c b, b d,) & in due parti ineguali in b, onde (per la antecedente quinta propositione) il dutto delle due parti ineguali g b, b d, insieme con il quad. di b c, linea intercetta fra i dui punti c, & b delle diuisioni, saranno eguali al quadrato di c d, mita della totale linea g d, ma perche a d, è quanto g b, (poiche a g, è fatta eguale a b d, onde giontoli communemête la a b, alla somma g a b, è eguale la somma a d.) tanto è dire il dutto di A D. in B D. quanto di G B. in B D. però questo dutto di a d, in d b, insieme con il quadrato di b c, saranno eguali al quadrato di c d, come si voleua mostrare.

Da questa sesta propositione ancora, si può molto comodamente estrahere la Regola alla Equatione di 1. cen. & co. eguale a numero che gia si deriuò dalla quarta propositione, che hauêdo, come iui 1. cen. p̄ 27. co. eguali a 520. supponendolo il rettangolo n d, essere le 27. co. fatto dal dutto d'1 co. in 27. vn lato, & sia n b, sara 27. & l'altro n m, 1. co. onde allungare b n, & d m, in a, & c, che ciascuna delle n a, m c, sia 1. co. & tirata la a c, che sara 1. co. anc'ella eguale alla n m, il quad. c n, sara 1. cen. però tutto il rettangolo a d, sara 1. cen. p̄ 27. co. quale sappiamo importare 520. (dicendosi che 1. cen. p̄ 27. co. sono eguali a 520.) intesa hora la retta n b, 27. diuisa in due parti eguali in r, (che ciascuna delle n r, r b, sara $13.\frac{1}{2}$.) & ad essa n b. aggionta in lungo la n a, (1. co. incognita della quale cerchiamo il valore) sappiamo (per questa sesta propositione,) che il rettangolo di tutta la linea a b, così composta nella aggiûta n a, cioe nella a c, 1. co. qual rettangolo è la a d, 1. cen. p̄ 27. co. che importa 520. insieme con il quad. della mita della linea detta, cioe con il quad. di $13.\frac{1}{2}$. che è $182.\frac{1}{4}$. questi dui cioe 520. & $182.\frac{1}{4}$. che in tutto fanno $702.\frac{1}{4}$. sono tanto quanto è il quadrato della linea composta della mita r n, della a b. & della aggiunta n a, cioe quanto è il quadrato di r a, onde il quad. di r a, sapremo essere $702.\frac{1}{4}$. dunque la rad. di questo $702.\frac{1}{4}$. cioe $26.\frac{1}{2}$. douera essere la r a, suo lato; perilche d'essa r a, essendo la parte r n, $13.\frac{1}{2}$. la restâte n a, sara 13; ma questa fu posta 1. co. però vediamo che 1. co. importa, ò vale 13. onde il rettangolo n d, 17. co sara 13. via 27. cioe 351. & il quadrato a m, sara 13. via 13. cioe 169. che con 351. fa il 520. che si disse essere il rettangolo a d, 1. cen p̄ 27. co. Vediamo dunque la Regola di qui estrahersi dicêdo. Quando 1. cen. & co. sono eguali a oumero; Ad esso numero si giunga il quadrato della mita del num. delle co. & dalla rad. della somma si caui la mita del numero delle co. che il restante sara il valore della co.

Da questa istessa sesta Propositione se ne può ancora estrahere la Regola all'Equatione, ò Capitolo d'1 cen. eguale a co. & numero, che per mostrarlo si proponerà questo quesito.

Ad vn'Edificio la facciata del quale è Canne 42. si vuol far dinanzi vna Piazza che da vna banda habbi vna loggia di grandezza, ò superficie di Canne quadre 520. ma di tal larghezza che accompagnata alla facciata detta, che sara la larghezza della piazza, se ne formi fra la piazza, & loggia vn sito quadro di Terreno, si domâda quanto deue essere la lûghezza della loggia, ò piazza, & quanto la larghezza d'essa loggia. Per trouarlo. Poneremo che la lunghezza della loggia cioe c r, ouero g d, sia 1. co. che perciò 1. co. ancora sara la lunghezza c r, ouero a b, della piazza, onde essendo la sua larghezza a c, (facciata dell'Edefitio) 42. (che non occorre tener conto della denominatione Canne, ò altra misura, se non nel fine rispondendo al quesito) la grandezza, ò superficie a r d'essa sara 1. cosa via 42. cioe 42. co.

42.co. alla quale giongẽdo la grand. r g, della loggia data douere essere 520. fa 42.co. p̃ 520. p la grand. totale a d del sito quad. a b d g, che essendo posto 1.co. p lato, sara grãde 1.ce. Onde rãto doue essere 1.ce quãto 42.co. p̃ 520. però haueremo 1.ce eguale a 42.co. p̃ 520. Hora imaginaremo la tot. ò lin. retta data a c, 42. essere diuisa p mezo in m, (che a m, sara 21. come m c,) & ad essa a c, giũta in lũgo la retta g c, Ignota, & sop. alla totale a g. formato il quad. a g d b, che così g d, sara eguale ad a g, & tirata dal c, alla b d, la retta c r, equidistante alla g d, (ò perpend alla b d) la superficie c d, sara il rettang. della g d, (& però della a g, composta dalla a c, & c g, aggiuntali) nella c g, qua le rettãg. sapiamo essere 520. onde giontoli il quad. di c m, 21. mita della data a c, 42. qual quad. è 441. la somma 961. sara eguale (per quello che dimostra questa sesta propositione) al quadrato di g m. composta dalla m c, mita della data, & c g, aggiũta, perilche il quadrato di g m, sara 961. onde il suo lato m g, sara la rad. di questo 961. qual rad e 31. Hora hauendo trouato che g m, è 31. li giungeremo m a 21. che la somma 52. sara la lunghezza di g a, & però di g d, ouero di a b; lunghezza della loggia, ò della piazza, Et se dalla a g. 52. leuaremo la a c, 42, la restante c g. larghezza della loggia sarra 10. però risponderemo al quesito, che la lunghezza della loggia, ò piazza doverà essere Canne 52. & la larghezza della loggia Canne 10.

Da questo operare vedendo che nell'hauere 1 ce. eguale a 42.co. p̃ 520. Al quadrato 441. mita di 42 numero delle co. aggiuntoli il numero 520. & del cõposto 961. presa la rad. che è 31. a questo giunto il 21. mita del numero delle co. la somma 52. è il valore della co. (che però 42 co. importano 2184. quale con il numero 520. fa 2704. che è bene quanto il quadrato di 52. valore del cen. cioe anco il cen. importa 52. via 52. che fa l'istesso 2704.) conosciamo che si potrà dare la Regola di essa Equatione d'1. cen. eguale a co. & numero dicendo. Quando vn cen. è eguale a co. & numero; Giongasi il numero al quadrato della mita del numero delle co. & alla rad. della somma si giunga la mita del numero delle co. che il resultante, ò somma sara il valore della co.

Et così si vede come da queste 3. facili propos. quarta quinta, & sesta anzi si può dire dalle due sole propositioni quinta, & sesta le ne deriui dal giudicioso Aritmetico i primi Capitoli, ò Equationi della mirabile Dottrina Algebratica il vigore amplissimo, & acutezza della quale è inesplicabile, si come anco sono inesplicabili, quantità innumerabili, le quali ella va speculando, & trouandone il valore, & proprietà con le conuenienze loro giouando a tutte le Scienze, & Arti, & dandole si può dire moto, & lume rendendole vigorose, & lucide, tãto di splendore nelle Scienze, è piaciuto à N.S. Dio concedere all'intelletto humano, quale tanto maggiormente può con somma humiltà amirare, se bene non penetrare alla immensa Sapienza, Potenza, & bontà, dell'Omnipotente eterna sua Diuina Maestà, alla quale siano di continuo date tutte le lodi da tutte le lingue, per tutti i secoli.

Propositione. 7. Theorema. 7.

SE vna linea retta data sia diuisa in due parti, come si vogli, il quadrato d'essa linea insieme con il quadrato d'vna delle sue due parti, sono eguali al doppio del rettangolo della data nella detta sua parte, giontoli il quadrato dell'altra parte.

Sia data la retta a b, diuisa in due parti, come si vogli in c, si dice che il quadrato d'essa a b insieme con il quadrato d'vna delle sue due parti poniamo della a c, sono eguali al dutto d'essa data a b, nella detta sua parte due volte giontoli il quadrato dell'altra parte c b; Per dimostrarlo. Sopra alla a b, formasi il quadrato a d, & dal c, si tiri la c e, equidistante alle a f; b d, & tirato il diametro a d, ouero b f, & sia il b f, che sega la c e, in g, dal punto g, alle f d, & a b, si tiri la equidistante h i, che così il rettangolo f g, sara quadrato, & perche ciascun suo lato è eguale alla a c, egli sara il quadrato di questa parte a c & il rettangolo g b, sara il quadrato dell'altra parte b c. Et perche il rettangolo h d, hà per vn lato la f d, eguale alla data a b, & per l'altro lato f h eguale alla parte detta a c, egli sara il dutto della data a b, nella sua parte detta a c, & perche esso rettangolo h d, è cõposto da vn supplemento g d, & da vn quad. h e di a c, ne segue che vn'altro dutto della data a b, in detta sua parte a c, sia composto da vn'altro supplemento, (& c a g.) & da vn'altro quadrato di a c; & però lo Gnomone d h c. insieme con vn quadrato di a c, sono quãto dui dutti di a b, in a c; onde così à vna banda, come all'altra giunto il quadrato c i, di b c; che è l'altra parte della data a b; ne segue che la somma da vna banda sia eguale alla somma dall'altra banda, cioe che lo Gnomone d h c, con vn quadrato di a c, & con il quadrato di b c, sarano eguali a dui rettãgoli di a b, in a c, con il quadrato di b c; Ma allo Gnomone

mone d h e, cõ un quad. di a c, & cõ il quad. di b c, è eguale il quad. a d, della data a b; da essi cõpo[illegible]onde in vece di detto Gnom. & quad. di b c, posto il solo quad. a d, di a b; haueremo da vna ban[illegible] il quadr. di a b, & vn quadrato di a c, eguali alli dall'altra banda, dui rettangoli di a b, in a c, con il quadrato di c b; cioe il quadrato della data a b, insieme con il quadrato della sua parte a c, saranno eguali al dutto della data a b, in essa sua parte a c, due volte, insieme con il quad. dell'altra parte b c, che è quello che si voleua prouare.

Questa settima propositione si può anco dimostrare nel modo seguente.

Essendo la data retta a b, diuisa in due parti in C, si dice che il quadrato d'essa a b, insieme cõ il quadrato d'vna delle sue parti, poniamo la a c, sono eguali al dutto della detta data a b, nella medesma sua parte a c, due volte giontoli il quadrato dell'altra parte c b, Per dimostrarlo. Considerata la a b, diuisa in a c, & c b, & presa la sua parte a c, detta ne segue (per la terza propositione) che al rettangolo d'essa a b, totale, nella sua parte presa a c, siano eguali, il rettãgolo delle parti a c, c b, giontoli il quadrato della detta parte a c, onde dui dutti della totale a b, nella parte presa a c, saranno quanto dui rettangoli delle parti a c, c b, insieme con dui quadrati della parte presa a c; però gionto à ciascuna banda il quadrato dell'altra parte c b, ne segue, che dui dutti della totale a b, nella parte presa a c, insieme con il quadr. dell'altra parte c b. siano eguali à dui dutti delle parti a c, c b, cõ dui quadrati della parte presa a c, & vn quadrato dell'altra parte c b; Ma (per la quarta propositione) il solo quadrato della totale a b, è eguale a vn quadrato di a c; ad vn quadrato di c b; & dui dutti di a c, in c b, onde a ciascuna banda gionto vn quadrato di a c, ne segue che li dui quadrati cioe di a b, totale, & di a c, parte presa siano eguali. Alli dui dutti di a c, in c b, con dui quadrati di a c, & vn quadrato di c b, Ma à questi medesimi tutti si è mostrato essere anco eguale dui dutti della totale a b, nella parte presa a c, giontoli il quadrato dell'altra parte c b, però (per la prima Comune cõcessione) ne segue che il doppio del dutto della data a b, nella parte a c, presa giontoli il quadrato dell'altra parte a c, siano eguali al quadrato della data a b, insieme con il quadrato della medesma parte presa a c, che è quanto si voleua mostrare.

5. c 3.
a — c — b
64. 40. 15.
25. 40. 25.
9
89. 40.
89. 40.
9.
89.

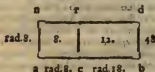
Dalla sopradetta settima propositione, si può molto facilmente estrahere il modo di sottrare nelle radici quadre fra loro comunicanti, come anco si fece nella quarta propositione, che seruẽdoci di quell'essempio per cauare rad. 8. da rad. 50. imaginando, data la retta a m rad. 50. & la sua parte a c, rad. 8. formando sopra alla a m, il quad. a g, egli sara 50. & diuisolo con la c r, equidistante alla a p, & in essa presa la c o, eguale alla c a, rad. 8; & per esso punto, ò tirata equidistante al lato a m, la n o d, & aliũgata in q, finche la esteriore d q, sia eguale alla d o, & però alla a c, rad. 8. & compito il quadrato a q, che sara eguale al quad. a o, 8. sappiamo dalla sopradetta settima propositione, che la somma delli dui quadrati a g, a q. (che sono il quadrato della data a m, & il quadrato della sua parte a c,) sono eguali al dutto della data totale a m, nella detta sua parte a c, due volte giontoli il quadrato dell'altra parte c m, ma vn dutto di a m, nella sua parte a c, è il rettangolo a n, composto dal quadrato a o, & supplemento c n; onde perche à questo c n, è eguale il p o, & al quadrato à o, è eguale il quad. a q, questi dui p o, a q, saranno quanto vn'altro dutto di a m, in a c; quali dui dutti cauati dalla somma delli dui quadr. a q, a g, resta la sola superficie o g; Di questa o g. dunque che è il quadrato dell'altra parte c m, si trouarà la grandezza, cauando i dui dutti di a m, rad. 50. in a c. rad. 8. (cioe il doppio di rad. 50. via rad 8. che è rad 400. cioe 20. due volte, & fa 40.) dalla somma dei quadrati di a m, & di a c, cioe di 50. & 8. qual somma è 58. che il restante 18. sara la grãdezza del quadrato o g; però il suo lato o n, & consequentemente c m, sara la rad. di 18. onde diremo che à cauare a c, rad. 8, da a m, rad. 50. resti c m, rad. 18. Et la Regola si potra dare nel modo istesso che se fece nella quarta Propositione.

Il sommare ancora delle medesime rad. quadre comunicanti fra loro si può deriuare da questa settima propositione, che prese rad. 8. & rad. 18 da giungere insieme, & siano a c, c m, componendola retta a m, sappiamo da questa propositione che il quad. della totale a m, giontoli il quadrato d'vna delle due parti a c. c m, poniamo hora di a c. rad 8. che per suo quadrato hà 8. questi dui quadrati di a m, a c, & però di a m, a s, sono eguali al dutto di tutta la a m. nella parte presa a c, due volte giõtoli il quadrato dell'altra parte c m, rad. 18. che per quadrato hà 18. o g; ma il dutto di a m, nella parte presa a c, si cõpone dal dutto di a c. in c m, & di a c, in se medesma a c, però

molti-

moltiplicando a e rad.8 in e m,rad.18 che fa rad.144.cioe 12.& à questo giõto 8.quadrato di a e, che fa 20.haueremo vn dutto di a m,in a e,essere 20.& dui dutti faranno 40. & questi con il quadrato di e m,rad.18.qual quadrato è 18.fanno 58. il che è il composto del quadrato di a m,con il quadrato della parte presa a e,ma di questa a e, il quadrato è 8 che cauato dal 58.resta 50.onde 50.è il quadrato di a m,però essa a m,sara la rad.di 50.& cosi cõcluderemo la rad.di 8 con la rad. di 18 fare in somma rad.50.

Et senza adoprare il quadrato di a e,da giungere al quadrato di a m,per farne il cõposto d'essi dui quadrati,che hà da essere eguale a quello che ressulta a giungere il medesmo quadrato di a e, due volte,al dutto di a e,in e m,due volte per farne i dui dutti di a e,in a m,& giõgerli anco il quadrato di e m, basta tacendo il quadrato di a e,vna volta da ciascuna banda giungerlo à dui dutti di a e,in e m,& la somma insieme cõ il quadrato di e m,sara il quadrato di a m,onde a e,rad.8 via e m,rad.18.fa rad.144.cioe 12.il suo doppio è 24.che con 8.quadrati di a e,rad.8.& con 18.quad. di e m,rad.18.fanno 50.che è il quadrato di a m,però essa a m, sara la rad.di 50. onde rad.50.sara la somma di radice 8. con radice 18. Et questo modo è l'istesso, che anco si deriuò dalla quarta propositione.

Ma facilmẽte ancora dalla terza propositione si può estrahere il modo di sommare insieme le rad.quadre comunicanti poniamo le due rad.8.& rad.18.(che comunicanti fra loro si chiamano, ò vogliamo dire sono quelle rad.quadre il prodotto delle quali che è rad. quadra si può esplicare per numero,come rad.6.& rad.$13\frac{1}{2}$. il prodotto delle quali rad.81.si può esplicare per numero, & è 9.)Poiche insegnandoci ella che quando vna retta è diuisa in due parti, come si vogli il dutto di tutta la linea in vna delle sue parti è eguale al quadrato della medesima parte giontoli il dutto dell'vna parte nell'altra. Se intesa la retta a e b,cõposta dalla a e,rad.8.& e b,rad.18.& presa vna d'essi parti, poniamo la a e,& fatto il rettãgolo a d, d'essa a e,& della a b, totale, & anco tirata la e r,perpendicolare alla a b, che sara eguale alla a n, & però alla a e,rad.8. formando il quad. a r,questo quad. sara il dutto di rad.8. a e, in se stessa che fa rad.64. cioe 8. & il rettang. e d, sara il dutto di a e,rad.8.in e.b.rad.18.che fa rad.144.cioe 12. onde il loro composto cioe il rettãgolo totale a d,sara 8. & 12.cioe 20. quale è il dutto di tutta la retta a b,nella sua parte a e,rad.8.onde partendo esso 20.superficie cioe rad.400.per il lato,ò larghezza a n, nota rad.8.l'auertimento rad.50.sara l'altro lato,ò lunghezza a b,ma questa a b,è il cõposto,ò somma delle due date a e,rad.8.& e b,rad.18 però la somma loro è rad.50.

Si vede dunque che per sommare insieme due rad.quad.a,&b,si può dire. Al dutto d'esse due R̲ si giunga il quad.d'vna d'esse,& sia della a.& la sõma si parta per la medesima a,che l'auenimento sara la somma loro,Onde hauendo rad.8.& rad.18.da sommare insieme,& intesa per a. poniamo la rad.18 Al suo quadrato che è 18.si grũga rad.144.cioe 12.dutto d'esse rad.8.& rad.18.& fa 30. qual somma 30.si parta per la detta rad.18. che a partire 30.cioe rad.900. per rad.18. ne viene rad.50. & questa cioe rad.50. è la somma cercata di rad.8.& rad.18.

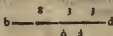
Ancora ne potiamo estrahere il modo di sottrare vna rad. quadra da vn'altra à lei comunicãte,che volendo cauare radice 8.a e,da radice 50. a b; Imaginato il Rettangolo a d,dutto di a b, radice 50.in a e rad.8.che fara rad.400.cioe 20 & da questo cauato il quadrato della rad.8.cioe a r 8.che resta 12.questo 12.sara la superficie del rettãgolo e d;però partito per il lato noto e r,rad. 8 cioe partito rad.144.per rad.8.che ne viene rad.18 questa rad 18.sara l'altro lato e b,d'esso rettangolo e d;ma questa e d,è quello che resta à cauare a e, rad 8. da a b rad.50. però diremo che à cauare rad.8.da rad.50.resta rad 18. Et la Regola sara questa.Per cauare vna rad.quadra a,da vn'altra rad. quadra b. Dal prodotto loro si caui il quad. della a,& il restante si parta per l'istessa a,che l'auenimento sara quello, che resta à cauare la a, dalla b.

Ma senza aiuto,ò bisogno di Propositioni Geometriche,il Discorso naturale ci insegna il modo di sommare insieme,& sottrare,non solo le rad.quadre fra loro comunicanti, ma anco le rad. cube, ò quadre, quadre, ò Relate,ò altre quantita comunicanti fra loro di qual si voglia sorte,ò Binomij,ò Residui.& altre cõ facilita,& chiarezza,per Regole vniuersalissime,come si potrà vedere in particolare nel Trattato de gli Elementi delle quantita irrationali.

Propositione. 8. Theorema. 8.

SE vna linea retta data sia diuisa in due parti come si vogli, Il rettangolo d'essa data in vna delle sue due parti, & sia la prima preso 4. volte insieme con il quadrato dell'altra parte, ò seconda, sono eguali al quadrato della linea composta dalla data, & da detta sua prima parte.

Sia data la retta a b, diuisa in due parti, come si vogli in c, si dice, che il quadruplo del rettangolo contenuto da essa data a b, & da vna delle sue due parti, poniamo dalla a c, che chiamaremo prima, giontoli il quadrato dell'altra parte c b, sono eguali al quadrato della retta b d, che sia composta dalla data a b, & dalla a d, eguale alla detta sua prima parte a c. Per dimostrarlo. Inteso come s'è detto alla data a b, gionta in lungo la a d, eguale, & conterminale alla sua prima parte presa a c, sopra alla totale b d, così cõposta si formi il quadrato d m, & in esso dall'estremo b, della data si tiri il diametro b h, & dalli punti c, & a, termini della sua prima parte presa c a, in esso quadrato fino al lato oppostoli m h, si tirino le rette c f, & a i equidistanti alli lati b m, d h, ò per pendicolari alla b d, & per li punti v, & n, doue elle segano il diametro b h, si tirino le o e, & p q. equidistanti alli lati b d, m h & così il quadrato d m, sara diuiso in noue rettãgoli partiali, de quali il q i, che stà attorno al diametro b h, e quadrato, & così anco il p a, (per il corollario della quarta propositione) che è l'altro, che stà attorno al medesmo diametro b h. & è composto da 4. delli rettangoli partiali; Et perche in questo quadrato p a, attorno al suo diametro b n, si ãno li dui rettangoli v n, & v b, ciascun d'essi similmente è quadrato, & l'vn supplemento p v, è eguale all'altro supplemento c t; Ouero intorno al diametro del quadrato d m, inteso stare attorno li dui rettangoli h v, v b, ciascun d'essi sara quadrato. Et anco inteso nell'h v, stare attorno al suo diametro h v, li dui rettangoli h n, n v, ciascun d'essi sara quadrato, & li dui suoi supplementi s n, n e, saranno eguali fra loro; Ancora ciascuna delle rette b o, c a, t, d c, che sono eguali fra loro è eguale alla b c, lato del quadrato b v, & però anco è ciascuna delle rette o v, p x, m s; Similmẽte perche ciascuna delle s, i, x n, v t, è eguale alla a c, & però alla a d, elle saranno eguali fra loro. & anco a ciascuna delle t e, n q, i h, eguali alla a d; Et perche il rettangolo n h, è quadrato come anco l'v n, cioe di lati eguali, ancora quadrati, & di lati eguali saranno li rettangoli s n, e, & eguali fra loro, & ciascuno delli lati di detti rettangoli n s, n e, & delli dui quadrati v n, h n, sara eguale alla retta c a. & però alla a d, Onde ciascuno di questi 4. rettangoli verrà ad essere il quadrato della parte a c, & il b v, sara il quadrato dell'altra parte b c; Et perche ciascuno delli 4. rettãgoli s p, p v, v a, a e, ha per lunghezza vna linea eguale alla b c, & per larghezza vna linea eguale alla c a, ciascun d'essi sarà il dutto della parte c b, ne la parte c a; Et perche il dutto della data a b, nella sua parte a c, é (per la terza propositione) eguale al dutto d'essa parte a c, nell'altra parte c b, giontoli al quad. d'essa parte a c, ne segue che à 4. dutti della data a b, nella parte presa a c, siano eguali li 4, rettãgoli della a c, nella c b, giontoli 4. quadrati d'essa a c, onde li 4. rettangoli s p, p v, v a, a e, con li 4 quadrati q, q t, t x, x i, contengono, ò sono eguali alli 4. dutti ò rettãgoli della data a b, nella sua presa prima parte a c; Et perche alli 4. rettangoli di a c, in c, b, con li 4. quadrati di a c, giontoli il b v, che è il quadrato della parte b c, se ne forma precise il totale d m, quad. di b d, ne si gue che esso quadrato di b d, sia eguale alli 4. rettangoli di a c, in c b, con i 4. quadrati di a c, giontoli il quadrato di b c; Et che perciò esso quadrato di b d, sia eguale a 4. dutti, ò rettãgoli di b a, data nella sua parte presa a c, giontoli il quadrato dell'altra parte c b, come si voleua mostrare. Questa ottaua Propositione si può anco dimostrare così.

Essendo data la retta b a, & ad essa giunto in lungo la a d, eguale alla sua parte a c, si dice che il quadrato di tutta la linea b d, così composta è eguale al quadruplo del dutto della data b a, nella detta sua parte a c, giontoli il quadrato dell'altra parte c b. Perche considerata la b d, diuisa in due parti in a. ne segue (per la quarta propositione) che il quadrato d'essa totale b d, sia eguale alli quadrati di a b, & a d, sue parti, & al dutto d'esse due parti d a, a b, due volte, & perche a c, è eguale ad a d, diremo il quadrato di b d, essere eguale alli dui quadrati di a b, & a c, giontoli il dutto di a b, in a c, due volte, ma li dui soli quadrati di a b, a c; intesa hora la sola b a, diuisa in due parti in c, sappiamo (per la settima antecedente

pro-

propositione)essere eguali al dutto di essa a b, nella a c, sua parte due volte, insieme con il quad. dell'altra parte b c; onde à questi dui dutti di a b, in a c, & quadrato di b c, gionti li altri dui dutti lassati di sopra di detta a b, in a c, haueremo 4. dutti di a b, in a c, con il quadrato di b c, qual somma pere iò sara eguale al quadrato di b d, come si voleua prouare.

Propositione. 9. Theorema. 9.

SE vna data linea retta sia diuisa in due parti eguali, & in due parti ineguali, la somma delli dui quadrati delle due parti ineguali sarà doppia alla somma delli dui quadrati, che sono l'vno della mita della retta data, & l'altro della linea intrapresa fra le due diuisioni, cioè che è la diffeĉza della mita della data à qual si uoglia delle due parti ineguali.

Sia data la retta a b, diuisa in due parti eguali in c, & in due parti ineguali in d, si dice che i dui quadrati delle parti ineguali a d, d b, gionti insieme sono doppij al quadrato di a c, mita della data gionto li il quadrato di c d, che è fra le due diuisioni. Per dimostrarlo. Dal punto c, doue la data è diuisa in due parti eguali ad essa data si eleui la perpẽdicolare c e, eguale alla mita a c, della data, & dalla sommità e, à ciascuno delli dui termini a, & b, della data si tirino le due rette e a, e b, & dal punto d, doue la data è diuisa in due parti ineguali si eleui alla medesima data vna ppendicolare fino che arriui alla b e, & sia in f. dal quale f. alla c e, si tiri la perpẽdicolare f g, che perciò sara equidistante alla data a b, & anco dal medesmo punto f. all'estremo a, della data si tiri la f a; Hora considerato il Triangolo rettãgolo b c e, perche egli hà il lato c e, eguale al c b, ne segue (per la quinta propositione del primo libro) che ancora l'angolo b, sopra alle base sia eguale al l'angolo c e b, che e l'altro angolo sopra alle base, & perche la somma d'essi dui angoli è vn retto (che nelli Triãg. rettãg. essendone vno

retto, la somma de gl'altri dui e sempre vn'altro retto, poiche tutti trè gl'angoli del Triang. sono quanto dui retti per la 32. del primo) ciascuno d'essi dui angoli b, & b e c, sara vn mezo retto, Et per la medesima causa ancora nel Triangolo rettãgolo a c e, di dui lati eguali, ciascuno delli suoi dui angoli c a e, c e a, sopra alla base sara vn mezo retto, onde essendo l'angolo c e a, mezo retto, & il c e b, anc'egli mezo retto (come s'e mostrato) ne segue che tutto l'angolo b e a, da loro composto sia vn'intiero retto, & perciò il Triangolo a e f, sara rettangolo, perilche il quadrato della subtensa à f, sara eguale alla somma delli quadrati delli dui lati a e, e f, Ancora considerato il Triangolo rettangolo e g f, perche il suo angolo g e f, si è mostrato essere mezo retto, ancora l'altro g f e, restante ad vn retto sara mezo retto, & però eguale al g e f; onde anco (per la sesta propositione del primo libro) il lato e g, opposto all'vn'angolo, sara eguale all'altro lato g f, opposto all'altro angolo; Similmente nel Triangolo rettangolo b d f, perche l'angolo b, è mezo retto, ancora il restante suo angolo d f b, sara mezo retto, & però eguale al b, perilche il lato d f, sara eguale al lato d b; Hora inteso il Triãgolo a c e, rettãgolo equicrure, cioe di dui lati eguali, a c, c e, perche (per la 47. del primo) il quadrato della subtensa a e, è eguale alla somma di dui quadrati de' lati a c, c e, ne segue che detto quadrato di a e, sia doppio à ciascuno delli dui quadrati delli lati a c, c e, cioe sara doppio al quadrato di a c, mita della data a b; Ancora nel Triangolo rettangolo equicrure e g f, similmẽte il quadrato della subtensa e f, sara doppio al quadrato di ciascuno delli dui lati e g, g f, & però doppio al quadrata della retta c d, (eguale alla g f,) intercetta fra le due diuisioni della data a b, perilche essendo il quadrato di a e, doppio al quadrato di a c, & il quad. di e f, doppio al quadrato di c d, ne segue che la somma delli dui quadrati di a e, e f, & però il solo quadrato di a f, à quelli dui eguali, sia doppio alla somma delli dui quadrati di a c, & c d; ma inteso il Triangolo rettangolo a d f, al quadrato di a f. subtensa in esso è eguale la somma delli dui quadrati de' lati a d, d f, & & però di a d, d b, (che d b, è eguale a d f,) onde li dui quadrati di a d, d b, parti ineguali della data a b, gionti insieme (cosi come il solo quadrato di a f,) saranno anc'essi doppij alla somma delli dui quadrati di a c, c d, mita cioe l'vna della data, & l'altra intecetta fra le due diuisioni d'essa data, che è quello che si voleua mostrare.

In altro modo ancora si può dimostrare questa Propositione dicendo.

8 3 d 5
a ——————— b
c

Perche al quadrato di a d, maggior parte delle ineguali sono eguali (per la quarta propositione) il quadrato di a c, (mita della data a b,) & il quadrato di c d, (intercetta fra le settioni) insieme con dui rettangoli di a c, 8. in c d, 3. (che sono 48.) gionto à ciascu-

na

na bãda il quadrato d b,(che è l'altra parte minore delle due ineguali,)ne segue che alli dui quadrati di a d,d b parti ineguali,siano eguali li quadrati di a e, di e d,& di d b; insieme con dui rettangoli di a e 8.in e d 3 ma perche e b,è quanto a e, in cambio di dire li dui rettangoli di a e 8.in e d 3.diremo li dui rettangoli di e b 8. in e d 3. Ma al quadrato di d b,insieme con dui rettangoli di b e 8.in e d 3,sono eguali (per la settima propositione) il quadrato di b e,totale(& però di a e,à lei eguale.)& il quadrato di e d,Onde in vece del quadrato di d b, insieme con dui rettangoli di a e,8.in e d,3. ponendo li à tutto questo eguali dui quadrati di a e. & di e d,haueremo quattro quadrati che sono di a e,e d,a e,e d;cioe dui quadrati di a e,& dui quadrati di e d; cioe il doppio delli quadrati di a e, mita della data, & di e d, intercetta fra le settioni, quali saranno eguali alli sopradetti dui quadrati di a d,d b, parti ineguali della data come si voleua mostrare.

In altro modo ancora si potrà dimostrare essa Propositione, se prima si dimostrarà il seguente Lemma,ò Theorema,quale chiameremo Addittione,ouero Medio,ò Aggiunta.

Se vna linea retta data sia diuisa in due parti ineguali, i quadrati d'esse due parti giõti insieme sono eguali al doppio del dutto dell'vna parte nell'altra giõtoli il quadrato di quella linea in che esse due parti ineguali sono differēti, ò vogliamo dire in che la parte maggiore supera la minore.

Sia data la retta b d, 14.diuisa in due parti ineguali b e,9.& e d,5.la differenza delle quali sia la e a,che cosi la a b,restarà eguale alla parte minore e d,5.& la d a,9.sarà eguale alla parte maggiore b e,9.Si dice che i dui quadrati di b e,9.& e d,5.parti ineguali giunti insieme sono eguali al doppio del dutto delle due istesse parti b e,9.& e d,5.giontoli il quadrato di a e 4 differenza delle due istesse parti. Per dimostrarlo. Sopra alla maggior parte b e,formisi il quadrato e g,& sopra alla minore e d,il quadrato e q,che cosi essendo il lato e p,del quad.grande eguale al la parte maggiore e b,& il lato e o,del quadrato piccolo,eguale alla parte minore e d;la differēza o p,d'essi lati sarà eguale al la differenza e a,di dette parti,ancora dall'a,alla b e,nel quad. grande si eleui la perpendicolare a r, fino al lato opposto g p, & si allunghi la q o; lato del quadrato piccolo fino che arriui à questa perpendicolare, & sia in n, che cosi essendo la o n,eguale alla a,lei opposita e a,& però eguale alla o p, il rettangolo n p,sarà quadrato,& però si potrà dire essere il quadrato della differēza a e,delle due parti b e,e d,& perche il rettangolo b r,hà per lunghezza la b g. eguale a b e; parte maggiore, & per larghezza b a, eguale alla e d,parte minore esso rettangolo b r, sarà vn duto delle due parti ineguali b e,e d; Et perche ancora il rettãgolo a q.hà per lunghezza la a d,eguale alla parte maggiore b e, & per larghezza la d q,eguale alla parte minore e d;esso rettangolo a q,sarà vn'altro dutto delle due parti ineguali b e,e d,quali dui dutti,ò rettangoli a g. a q; perche insieme con l'o r, quadrato di a e, empiono precise i dui quadrati e g, e q;ne segue che siano eguali a detti dui quadrati, perilche è chiaro, che la somma delli dui quadrati delle due parti ineguali della retta data sono eguali al doppio del dutto dell'vna parte nell'altra,giontoli il quad.della differēza d'essi due parti ineguali,come si voleua mostrare.

Hora per dimostrare la detta nona Propositione. Essendo data la retta a b, 16. diuisa in due parti eguali a e,8.e b,8 & in due parti ineguali a d,11.& d b, 5.che la retta fra le settioni sarà la e d,3.diremo, perche la mita e b,della data superè la e d,3.nella d b 5.ancora l'altra mita a e,8.superarà la istessa e d,3.nella medesma d b,5.Onde intesa la a d,11. diuisa in due parti ineguali a e,8.& e d,3. le quali sono differenti fra loro nella d b,5. ne segue per la superiore Addittione, ò Media che la somma delli quadrati delle due parti ineguali a e,8. & e d,3. sia eguale al doppio del dutto d'esse a e,e d;giontoli il quadrato di d b, differenza d'esse parti a e, e d; Onde la somma delli quadrati detti di a e,e d, con il doppio del rettangolo detto d'esse a e,e d. giontoli anco il quadrato di d b, cioe tutte queste superficie insieme vēgono a contenere due volte,cioe essere doppie al composto delli dui soli quadrati di a e,8 e d,3. parti ineguali dette; ma di queste superficie sopradette il solo quadrato di a d,ne contiene, & però è eguale (per la quarta propositione) alli quadrati di a e, & e d,& doppio del rettangolo di esse a e, e d; Onde à questo quadrato di e d, giontoli il restante quadrato detto di d b,ne segue che la somma loro, cioe che il quadrato di a d,11.con il quadrato di d b,5.siano anc'essi doppij(come erano tutte superficie sopradette)alla somma delli dui quadrati di a e,8.e d,3,cioe che la somma de' quadrati delle due parti ineguali a d,d b,della data retta a b,siano doppij alla somma delli quadrati di a e,mita della data,& di e d, intercetta fra le settioni.

Si potrà

Si potrà ancora questa Propositione, dimostrare come le antecedenti con la formatione delli quadrati che vi occorrono, Onde data la retta a b, 16. diuisa in due parti eguali a c, 8. & c b, 8. Et in due parti inegnali a d, 11. & d b, 5. che la differenza delle parti ineguali alla mita, ò parti eguali della data è la c d, 3. Per dimostrare che la somma delli dui quadrati delle parti ineguali a d, 11. d b, 5. è doppio alla somma delli dui quadrati della mita a c, 8. della data, & dalla c d, 3. intermedia fra le settioni, Noi sopra alle due parti ineguali a d, 11. d b, 5. formaremo i dui quadrati a q, 121. d p. 25. & dal punto c, eretta alla a d, la perpendicolare c o, fino al lato oppostoli g q, fino ad essa, c o, allungaremmo il lato p t, del quad. d p; Ancora dal lato a g. 11. del quadrato a q, segata la parte a m, 8. eguale alla a c, 8 mita della data, che così la restante m g, 3. sara eguale alla restante c d, 3. dal punto m, fino al lato d q, tiraremo la m r, equidistāte alli lati a d, g q; che perciò ad essa m g, 3. sarà eguale la r q, oppostali nel rettangolo m q, & però sara anco eguale alla c d, 3. Onde il rettangolo n q, che hauerà i lati eguali alla c d, serà il quadrato d'essa c d, 3. interposta fra le settioni nella data a b, & perche la c n, è eguale alla a c, & però alla c b, & la parte c s. della c n, è eguale alla parte b d, della c b, (che ciascuna d'esse c s. d b, è eguale alla b p,) ancora il rimanente s n, sarà eguale al rimanente c d, Onde ancor la t r, eguale alla oppostoli s n, sarà eguale alla detta c d, perilche il rettangolo s r, sarà anc'egli un quadr. della c d, & eguale all'n q, però tutto il rettangolo s q, composto da essi dui quadrati sarà il doppio del quadrato di c d; Hora intesa la c b, 8. mità della data a b, diuisa in due parti c d, 3. & d b. 5. ne segue che il quadrato d'essa c b, (per la seconda propositione) sia eguale alli dui rettangoli d'essa c b, in ciascuna delle sue due parti c d, d b; ma il rettangolo c p, è contenuto da essa c b, & della b p. eguale alla sua parte d b; & il rettangolo m o, è contenuto dalla m n, eguale alla a c, & però ad essa c b, & dalla m g, eguale al. l'altra parte c d, d'essa c b, però questi dui rettangoli c p, & m o, sono i dutti della c b, nelle sue due parti, onde la somma d'essi dui rettangoli è quanto il quadrato di c b, & però eguale al quadrato a n, fatto sopra alla a c, eguale alla c b; A questo dui rettangoli dunque c p, m o, che sono quanto il quadrato di a c, giuntoli il rettangolo a n, che e vn'altro quadrato di a c, & anco giontoli il rettangolo s q, che contiene dui quadrati di c d, ne segue che tutto questo cōposto. ò somma sia quanto dui quadrati di a c, & dui quadrati di c d, cioe sia doppio alla somma de' quadrati di a c, & c d; Ma al detto composto tutto è anco eguale la somma delli dui quadrati a q, d p, da essi contenuto precisamente, però la somma d'essi dui quadrati, che sono i quadrati delle due parti ineguali a d, d b, della data a b, è similmente doppio alla somma delli quadrati di a c, mità della data a b, & di c d, interposta fra le due settioni, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione. 10. Theorema. 10.

SE vna data linea retta sia diuisa in due parti eguali, & ad essa sia aggiūto in lungo vna retta proposta, il quadrato di tutta la linea cosi composta, insieme con il quad. della aggiunta sono doppij al quadrato della mità della data, giontoli il quadrato della linea composta della mità della data, & della aggiunta.

Sia la retta a b, diuisa in due parti eguali in c, & ad essa sia aggiunta la retta b d; si dice che la somma delli dui quadrati di a d, & d b, è doppia alla somma delli dui quadrati di a c, & c d.

Per dimostrarlo. Dal punto c, alla a b, si erga la perpendicolare c e, eguale alla mità della data a b, & dal punto e, alli termini a. & b, della data si tirino le due rette e a, e b; Ancora dal punto e, si tiri la retta e f, paralella, & eguale alla c d, & dall'f, si tiri la f d, (che sara paralella, & eguale alla e c,) & si allunghi verso d, finche concorra con la e b, allungata, & sia in g, & da esso g, all'a, si tiri la retta g a; Hora nel Triangolo equicrure rettangolo a e c, ciascuno delli suoi dui angoli a, & e, sara semiretto (come si mostrò nella antecedente nona propositione,) Et similmente nell'altro Triangolo rettangolo equicrure e c b, ciascuno delli suoi dui angoli c e b, c b e, sara semiretto, perilche tutto l'angolo a e g, totale sarà retto, & perche l'angolo f e g. è mezo retto (essendo il restante del retto f e c, cauatone il c e g, mezo retto) & l'angolo f, retto nel Triangolo rettangolo e f g, sara perciò il restante angolo f g e, mezo retto, & però eguale all'f e g,

perilche in esso Triangolo,il lato f e, sara eguale all'f g, Et ancora nel Triangolo rettangolo B D G,che hà l'angolo d g b,semiretto,& che perciò semiretto,ancora, & à lui eguale è l'altro angolo d b g;ne segue che il lato d g, sia eguale al d b. Hora nel Triangolo rettangolo equicrure a c e,il quadrato della subtesa a e,che è eguale alla somma delli dui quadrati di a c,& c e,eguali fra loro,sara doppio al solo quadrato di a c, mità della data a b; Ancora nel Triangolo rettangolo equicrure e f g,sara similmente il quadrato della subtensa e g,doppio al solo quadrato di e f, & perciò doppio al quadr. della à lei eguale c d,linea composta della mità c d,della data, & dalla b d,aggiõta,onde la somma delli dui quadr. di a e,& di e g,sara doppio alla sommà delli dui quadrati di A C,& C D,Ma nel Triangolo rettangolo a e g,il solo quadrato della subtensa,a g,è eguale alla somma delli quadrati di A E, & di e g, onde similmente il solo quadrato di a g, sara doppio alla somma delli quadrati di a c,& di c d;Ancora nel Triangolo rettangolo a d g, la somma delli dui quadr. di a d, & d g,& in cambio di d g, posto il quadrato di b d, à quel.o eguale diremo la somma de dui quadrati di a d,d b,è eguale al solo quad.della subtensa a g,onde siccome il quadrato di a g; ancora similmente la somma de' quadrati di a d , & di d b, sara doppia alla somma delli dui quadrati di a c, & c d, cioe il quadrato della totale a b, (composta dalla data a b, & dalla aggiunta b d,)insieme con il quadrato della aggiũta b d,sarãno doppij al quadrato di a c,(mità della data a b,)insieme con il quadrato di c d,composta dalla mità della data a b,& dalla aggiunta b d,che è quanto si voleua mostrare.

In altro modo si dimostrarà questa Propositione dicendo:Il quadrato di a d,intesa diuisa nelle due parti a c,c d, è eguale (per la quarta propositione) alli dui quadrati delle sue due parti a c,c d,& alli dui rettangoli di esse A C,c d,ma perche la retta c b, è eguale alla a c,diciamo,& alli dui rettangoli di c b, in c d, & aggiungendosi à ciascuna banda il quadrato di b d, ne segue che li dui quadrati di a d,& di b d,siano eguali alli tre quadrati di a c,c d, & b d, con il rettangolo due volte di c b,in c d;Hora intesa la c d,diuisa in due parti in b, ne segue (per la settima propositione) che al quadrato d'essa c d, insieme con il quadrato della sua parte b c,(ma diciamo con il quadrato di a c,eguale ad essa b c,siano eguali il rettãgolo due volte d'essa parte b c,in tutta la linea c d,giõtoli il quad.dell'altra parte b d,perilche alli tre quadrati detti a c,c d,b d,in vece delli dui rettãgoli sopradetti di c b,in c d,& vn quadrato di b d,giunto vn quadrato di c d,& vn quadrato di a c, meno vn quadrato di b d,ma leuatone cioe il quadrato di b d;haueremo poi solo dui quadrati di a c,& dui quadrati di c d, alli qua i verranno ad essere eguali li dui quadrati di a d,& di b d; cioe la somma delli dui quadrati di a d,linea totale,& di b d,aggiunta saranno doppij alla somma delli dui quadrati di a c,(mità della data a b,)& di c d,(retta composta dalla mita della data, & dalla aggiunta) che è quanto si voleua mostrare.

Ancora in altro modo si potrà fare la dimostratione dicendo.

a 5 c 5 b 2 d

Perche c d,7.supera la c b,5.in b d,2.la istessa c d, superarà la a c,5. (eguale alla c b,) nella medesima b d,2. onde (per la Aggiunta alla nona propositione) intesa la a d,diuisa in due parti inequali a c,5.c d,7. che sono differenti nella b d,2. ne segue che la somma delli 2. quadr. d'esse due parti inequali a c,c d,è eguale al doppio del dutto di esse a c,c d, giontoli il quadrato di b d,differenza loro,onde posti insieme li dui quadrati di a c,e d,& anco li dui rettangoli d'esse a c,c d,& anco il quadrato di b d,ne segue che tutto il composto sia due volte quanto e la somma delli dui quadrati d'esse a c, c d ; cioe che il composto detto sia doppio alla somma d'essi dui quadrati (25.& 49.che è 74.) di a c, c d, Hora intesa pure la a d, diuisa nelle due parti dette,a c,c d, ne segue (per la quarta propositione) che il quad. d'essa totale a d; sia eguale alli quadrati delle due parti a c, c d, insieme con il doppio del rettangolo delle medesime,a c,c d; perilche il quadrato della a d,insieme con il quadrato di b d, saranno anc'essi doppij alli dui quadrati di a c,c d,come occorreua mostrare.

Facilmente ancora potremo dimostrare questa propositione , mediante la antecedente nona, cosi . Sia data la retta a b,diuisa in due parti eguali in c, & ad essa giunta la b d, si dice che li dui quadrati di tutta la a d,& della aggiunta b d, sono doppij alli dui quadrati di a c,mità della data, & di c d,composta dalla mità della data,& della b d,aggiunta.Per dimostrarlo, Alla a b,imaginisi giunta dalla banda di a,la a e,eguale alla b d,che così la c e, sara eguale alla c d, & la b e, alla a d,perilche il totale composto e d,sara diuiso in due parti eguali in c, & in due parti inequali in b, onde(per la antecedente nona propositione)la somma delli dui quadrati delle due parti inequali

e 2 a 5 c 5 b 2 d

e b,b d,& però di a d,d b, (perche tãto è il quadrato di a d,quanto di è b,à lei eguale) è doppia alla sõma delli dui quad. di c d,mità di tutta la e d,& di c b,interposta fra le settioni,che è quanto à dire di c d, & c a (perche c a, è eguale a. c b,) onde è manifesto il proposto; cioè che nella a d , composta della data a b, & aggiunta b d,

ta b d, il quadrato della totale a d, con il quadrato della aggiunta b d, sono doppij al quadrato di a e, mità della data, insieme con il quadrato di e d, composta della mità della data, & della aggiunta.

Potremo ancora dimostrare questa decima propositione formando li quadrati delle rette nominate, & trouarne il valore nella loro construttione, come segue.

Sia data la retta a b, & ad essa aggiunta la b d, si dice che il composto del quadrato della totale a d, con il quadrato della aggiunta b d, è doppio al composto del quadrato della a c, mità della data a b, con il quadrato della c d, contenuto dalla mita della data, & dalla aggiunta. Per dimostrarlo, Sopra alla totale a d, si formi il quadrato a g, & se li accompagni il quadrato di b d, facendo oltre alla a d, per il diritto la d e, eguale alla d b, & sopra ad essa il quadrato e n, che sara quanto il quadrato di b d; Ancora dal lato d g, si seghi la parte d q, eguale alla d c che il restante q g, sara eguale alla restante c a, & tirata la q l, equidistante, & eguale alla d c, ò perpẽdicolare, & eguale alla d q, si tiri la c l, che sara eguale, & equidistante alla d q & però il rettãgolo c q sara il quad. della retta c d, & allungata la c l, finche arriui alla f g, & sia in e, la l t, sara eguale, & equidistante alla q g; Ancora dalla a f, segata la a p, eguale alla a c, & la p r, eguale à quella p a, & pò sarà eguale alla detta A C, & però alla e b, la restante r f, eguale alla b d, Ancora si tiri la p u, & la r i, equidistanti alla a c, che sarãno anco perciò eguali ad essa a e, onde ciascuno delli dui rettangoli a v, p i, sara quadrato, & della a e, per il che tutto il rettãgolo a i, sara doppio al quadrato di a c, mità della data a e; Hora considerata la retta c d, diuisa nelle due parti c b, b d, al quadrato d'essa c d, saranno eguali i dui rettangoli di essa c d, in c b, & in b d, sue parti, ma il rettangolo di c d, 7 in e b, 5, è eguale il rettangolo l g, che hà per lunghezza l q, 7, eguale alla c d, & per larghezza la q g, eguale alla c b, & il rettangolò di c d, 7, in b d, 2, è eguale al composto del rettãgolo r t, & quadrato e n, (perche considerate le due rette c d, diuisa nel due parti c b, b d, & la b d, indiuisa, sappiamo (per la prima propositione) che al dutto della diuisa c d, nella indiuisa b d, sono eguali i dui rettangoli di b d, indiuisa in ciascuna delle due parti c b, b d della diuisa, ma al rettangolo di b d, nella parte c b, è eguale il rettangolo r r, (che hà per vn lato r i, eguale alla e b, & per l'altro lato r f eguale alla b d,) & al rettangolo di b d, nell'altra parte b d, è eguale il quad. n e, (che hà per ciascun lato le rette eguali alla b d) per il che essendo il rettangolo l g, con il rettangolo r t, & quadrato n e, quanto vn quadrato di c d, à questi giunto il quadrato c q di c d, & i dui quadrati a v, p i, di a c, ne segue che tutto questo composto sia doppio alli quadrati di a e, & c d, ma questo composto è contenuto precise dalli dui quadrati, a g, di a d, & e n, di b d, però i dui quadrati di a d, & b d, sono doppij alli dui quadrati di a e, & c d, come si volcua mostrare.

Propositione. 11. Problema. 1.

DAta una linea retta ella si può diuidere in due parti tali, che il quad. dell'vna parte sia eguale al rettangolo dell'altra parte nella linea data.

Sia data la retta a b, da diuidere in due parti tali, che il quad. dell'vna parte, (& sara la maggiore) sia eguale al rettangolo, ò dutto dell'altra parte (minore) in tutta la data: Per farlo, Sopra alla data a b, si formi il quadrato a c, & vno de' suoi lati angolari alla a b, & sia l'a d, si diuida per mezo in e, dal qual punto e, all'altro estremo b, della data si tiri la e b, & si allunghi la e a, verso a, fin che la e f, sia eguale alla e b, che così l'allungamento a f, sara minore della data a b, perche essendo i dui lati e a, a b, insieme del Triangolo e a b, più lunghi del solo restante lato e b, & però della e f, (ad essa e b fatta eguale) leuando così dalli dui e a, a b, come dall'e f, la comune retta e a, ancora (per la quinta comune concessione) la restante a b, sara maggiore della restante a e: Hora dalla a b, si seghi la parte a g, eguale alla a f, che all'hora la data a b, sara diuisa in G, come si propone, che il quadrato della parte a g, sira eguale al rettangolo dell'altra parte g d, nella data a b. Per dimostrarlo. Alli dui lati a g, a f, si accompagnino li altri dui à loro eguali lati g h, f h, compendo il quadrato a h, di a g, & si allunghi la h g, dentro al quadrato a c, finche peruenga al lato oppostoli d c, & sia in i, Et considerata la retta d a, diuisa in due parti eguali in e, & a quella giunto in lungo la a f, ne segue (per la sesta propositione) che il rettangolo di tutta la d f, così composta nella parte aggiunta a f, cioe il rettangolo d h, (che f h, sua latitudine è egua

le alla

le alla aggiunta a f,) insieme con il quadrato di e a,mita di d a, siano eguali al quadrato della linea composta della mita e a,(della a d,)& della aggiunta a f, cioe siano eguali al quadrato di e f, & però al quadrato di e b,(ad essa e f,eguale)ma al medesmo quadrato di e b,sono eguali il quadrato di e a, & il qnadrato di a b, (per la 47. del 1.lib.) essendo l'angolo e a b, retto, onde il rettangolo d h,con il quadrato di e a, sono eguali al quadrato di e a, con il quadrato di a b, perilche leuato da ciascuna banda il comune quadrato di e a,ne segue che il solo rettangolo d h,sia eguale al solo quadrato di a b,cioe al quadrato a e;Onde così dal rettangolo d h,come dal quadrato a e,leuato il comune rettangolo d g,ne segue che il restante quadrato a h,sia eguale al restante rettangolo i b,ma il quad. a h,è il quad.della par. a g,& il rettang.i b,è il dutto dell'altra parte g b, nella data a b, (che hà per lunghezza la b c, eguale alla data a b, & per larghezza detta parte g h,)perilche è manifesto la data a b,essere diuisa in g,come si propone. In Pratica,se vorremo che la parte maggiore della data a b,cominci dal termine A,noi da esso A, alla A B, eleuaremmo la perpendico are A E,eguale alla mità della data a b,& fatto centro il punto e,& semidiametro la distanza E B,segnaremo vn pezzo d'arco di sotto dalla E A,fino al quale allungaremo la e a,& sia in f,& fatto centro il punto A, presa la distanza A F, eguale ad essa a f,nella data a b, segaremo la A G,che questa A G,sarà la parte maggiore,perche essendo E B,subtensa nel Triāgolo rettangolo E A B,& però la E F,maggiore del lato A B,se così dalla AB,come dalla E F,leuaremo E A, cioe la mita della A B,il restante della E F,cioe la A F,sarà maggiore della restante mità della A B,& però è maggiore della restante parte G B, quale non arriua alla mita d'essa A B,

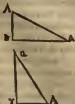
Se poneremo la A B,10.la E A,sarà 5 i qnadrati loro sono 100.& 25.che la somma 125.è il quadrato della E B,& però della E F, onde essa E F, sarà rad.125.(cioe quasi 11.$\frac{}{1}\frac{2}{1}$.ò 11.$\frac{}{5}\frac{9}{0}$.& alquāto più)che leuatone la E A, 5.resta rad.125.m̄ 5.per la A F,& però la a lei eguale A G,parte maggiore della A B,sarà rad.125.m̄ 5. che cauata dalla A B,10. resta 15. m̄ rad.125. che sara la parte minore G B.quale moltiplicata per 10. A B,totale,il prodotto 150.m̄ rad.12500.è quanto il quadrato di rad.125 m̄ 5.A G.parte maggiore,che in numeri propinqui,dicendo noi la E F,essere 11.$\frac{}{5}\frac{9}{0}$. & alquanto più, cauatone 5. mita della A B,resta 6.$\frac{}{1}\frac{8}{0}$. & alquanto più per la A F,& però per la parte maggiore A G,che cauata da 10.A B,rimane quasi 3.$\frac{8}{5}\frac{1}{0}$.per la parte minore G B, quale moltiplicata per la totale A B,10. fa quasi 38.$\frac{1}{5}$. per il dutto,ò rettangolo della parte minore nella linea totale,che ancora il quadrato di 6.$\frac{}{5}\frac{9}{0}$.& alquanto più parte maggiore AG,è 38.$\frac{}{2}\frac{8}{5}\frac{8}{0}\frac{1}{6}$.& alquanto più;Che fra loro viene à contenersi la reale quantità irrationale 150 m̄ rad.12500 inesplicabile per numero rationale. Che quando la data quantità A B, da diuidere è numero rationale (come hora che è 10.) le due sue parti sono sempre irrationali,cioe non si possono esplicare per numero,ò con numero rationale,come si dimostrarà nella 14. propositione del del nono libro.

Et notisi che il diuidere vna quantità A B, in due parte tali, che il quad. della parte maggiore A G, sia eguale al dutto della parte minore G B, nella totale A B,si chiama, ò si dice diuiderla nella propositione hauente il medio, & i dui estremi, che delle trè quantità,che sono A B, totale, A G,parte maggiore,& G A,parte minore, la A B, & la G A, si dicono essere le due estreme prima, & terza,& la A G,la media,ò seconda di 3. quantità continue proportionali, perche qnando 3. quantità sono continue porportionali il qnadrato della media è sempre eguale al dutto delle due estreme; Et conuersamente quando di 3. quantità date occorre che il quadrato dell'vna A è eguale al dutto dell'altre due,elle sono continue porportionali,& la A,è la media,ò secondo d'esse come si vederà à suo luogo, che qui se n'è detto questo poco per far piacere à quelli che intendono li elementi,ò vogiamo dire operationi delle quātità irrationali: Et le qnantità così diuise sono di mirabile vso,nel considerare la conuenienza che hanno frà loro i lati superficie,& grandezze in particolare delli 5. Corpi chiamati regolari, attribuiti al Cielo, & alli 4. elementi, come si vedrà nelli vltimi 3. libri d'Euclide, & in pratica si mostra nell'opera di Frate Luca dal Borgo Sā Sepolcro, intitolata la Diuina proportione.

Propositione. 12. Theorema. 11.

NElli triangoli ottusangoli il quadrato del lato sotto tendente all'angolo ottuso è maggiore delli dui quadrati delli dui lati continenti esso angolo ottuso in tanto, quanto importa due volte il rettangolo fatto da vno delli lati continenti l'angolo ottuso nel quale allūgato,che sia cada la a lui ꝑpēdicolare,che venga dall'ang. oppostoli,& dall'allungamēto d'esso lato, cioe dalla linea fuori del Triang. che arriua fino à d.propend.

Auanti

Auanti che si venga alla dimostratione di questa 12. propositione si può auertire, che nella 47. propositione del primo libro si mostrò come mediante i lati d'alcun Triangolo si venga in cognitione della qualità delli suoi angoli, & è, che quando la somma de quadrati de' duoi lati, che côtengono vn'angolo nel Triangolo è vguale al quadrato del lato opposto, ò sottorendente ad esso angolo, all'hora esso angolo è retto, ma quando tal somma è minore del quadrato di detto lato opposto, è subtensa, all'hora esso angolo è ottuso. Et quando fusse maggiore del quadrato della subtensa all'hora esso angolo è acuto; Hora hauendosi à trattare delle perpẽdicolari d'altezze del Triangolo, che partendosi da qualsiuogli de' suoi angoli (intendendosi egli eretto in aria) peruiene perpendicolarmente al piano del Triangolo, sul lato d'esso preso per base, ò fuori del Triangolo sù l'allungamento d'essa base, consideraremo quali siano i Triangoli dẽtro dalli quali vada ciascuna delle tre perpendicolari, che alli tre lati d'esso presi di mano in mano per base le siano tirate dalli angoli oppostoli; perilche auuertiremo, che essendo la somma delli tre angoli di ciascun Triangolo eguale a dui retti, & perciò d'essi tre angoli essendouene dui necessariamente acuti, l'altro poi, può essere retto, ouero ottuso, ouero anc'egli acuto, & all'hora ciascun d'essi tre sarà acuto, che così si formano le tre sorti de' Triangoli, chiamandosi Rettangoli, Ottusangoli, & Acutangoli. Nelli acutangoli ciascuna delle linee rette, che partendosi dalla cima del Triangolo viene perpendicolarmente al lato oppostoli cade dẽtro al Triangolo, che poniamo nel Triangolo acutangolo a b c, facendo base quale de' suoi tre lati si vogli, ciascuno delli dui angoli alla base sarà acuto, onde la perpendicolare alla base che venga dall'angolo restãte della cima non potrà cadere, ne nel la estremità destra, ne meno nella sinistra d'essa base, che all'hora il lato destro, ò il sinistro saria egli la perpendicolare, & perciò l'angolo d'esso con la base saria retto, & non acuto come si propone, & il Triangolo saria Rettangolo & non Acutangolo. Ne fuori della base sù l'allungamento per il diritto d'essa, ne dalla banda destra, ne dalla sinistra potrà cadere essa perpendicolare che venga dall'angolo detto oppostoli della cima, come saria poniamo in g; perche all'hora considerato il Triangolo esteriore fatto dalla perpendicolare, allungamento della base, & lato del dato, & sia l'o g d, questo haueria il lato g d, allungato verso f. onde l'angolo o d f saria estrinseco di detto Triangolo o g d, & però maggiore dell'angolo o g d vno delli intrinsici oppostoli, ma questo intrinseco o g d, per l'Aduersario saria retto, & l'intrinseco o d f è acuto dal supposito, perilche l'angolo acuto saria maggiore del retto, il che è impossibile, ò vogliamo dire l'angolo o d f, estrinseco del Triangolo o g d; è acuto dal supposito, & di necessità è maggiore dell'angolo o g d, vno delli dui intrinsici oppostoli, però quest'angolo o g d; saria minore dell'o d f. & conseguentemente sarà maggiormente acuto anc'egli, onde nô potrà essere retto, ne perciò alcuna linea o g. fuori del Triãgolo dato o f d, di dui angoli acuti alla base, potrà essere perpendicolare ad essa base, per ilche conuerrà che non potendo la perpendicolare alla base vscire fuori del Triangolo dato, ne meno cadere in alcuna delle sue due estremità, conuiene che ella cada sù la base dentro al Triangolo fra l'vn lato, & l'altro non potendo vnirsi con alcuni d'essi dui lati. Di qui conosciamo che la necessità del cadere la perpendicolare dentro al Triangolo depende tutta dall'essere ciascuno delli dui angoli alla base acuto, che l'altro angolo della cima non importa di che qualità sia, & perciò quando anco egli fusse retto, ouero ottuso l'istesso occorreria, perilche si conosce che similmente nelli Triangoli rettangoli, & nelli Ottusiangoli, quando dall'angolo retto del rettangolo, ouero dall'angolo ottuso dell'Ottusangolo si tira vna perpẽdicolare al lato oppostoli, che chiamiamo base è necessario che essa perpendicolare cada sopra ad essa base dentro al Triangolo fra vn lato, & l'altro. Ma nel Triangolo rettangolo poniamo per essempio l'A r a, hauẽte l'angolo r retto, & perciò ciascuno delli altri dui A & a acuto, se preso per angolo della cima vno delli dui acuti poniamo l'A. & però per base la retta r a, ad essa dall'angolo A tirata vna perpendicolare ella sarà il lato medesmo A r, che con la r a forma il suo angolo retto; Et similmente quando l'angolo della cima si pone essere l'altro angolo acuto a, & però la base la r A. la perpendicolare ad essa base r A. veniente dalla cima a, sarà il lato A r, che con la r A forma il suo angolo retto.

Et nel Triangolo ottusangolo, & sia il c a r, hauente l'angolo a ottuso, & perciò ciascuno de gli altri dui c, & r, acuto, se preso per angolo della cima vno delli dui acuti poniamo il c, & perciò per base la retta a r, oppostali ad essa dall'angolo c, tirando vna perpendicolare ella caderà fuori del Triangolo dalla banda dell'angolo ottuso a; ò del lato minore c a; (che l'altro lato c r, è più lungo sottotendendo all'angolo ottuso a, maggiore dell'r acuto, al quale sottotende detto lato c a) che dentro al Triangolo sù la base a r, ne fuori, oltre al punto r, in alcun luogo non può cadere, perche se p l'Aduersario potesse cadere in f, all'hora considerato il Triangolo c f a, egli hauería l'angolo c f a retto, & il c a f ottuso, & però la somma loro (senza anco il restante angolo a c f acuto) saria maggiore di dui angoli retti, ilche è impossibile, per il che è chiaro la perpendicolare che venga dall'angolo acuto c; alla base r a; douere cadere fuori del Triangolo sù l'allungamento di essa r a, verso a, dalla banda cioe dell'angolo ottuso. Et similmẽte la perpendicolare, che venga dall'altro angolo acuto r, alla base c a, douerà cadere anc'ella fuori del Triangolo sù l'allungamento d'essa c a, verso a, pure cioe dalla banda dell'angolo ottuso. Et così si vede, che nelli Triangoli ottusangoli due perpendicolari cadono di fuori, & vna dentro al Triangolo; Nelli Triangoli rettangoli due perpendicolari cadono nelli lati istessi, ò sono li dui lati istessi, che formano il suo angolo retto, & l'altra perpendicolare cade dentro al Triangolo; Et nelli Triangoli acutangoli è tre perpendicolari cadono tutte dentro al Triangolo.

Nel Triangolo ottusangolo A B C, hauente l'angolo B, ottuso; allungato vno delli suoi duoi lati, che contengono esso angolo ottuso poniamo l'A B, sino che sopra ad esso allungamento dall'angolo C, oppostoli cada la à lui perpendicolare C D. (che verso l'altra banda r, ò termine A. non può essa perpendicolare cadere dentro al Triangolo ne fuori allungando il lato B A, dalla banda dell'A, in alcun pũto r, dicendosi per l'Aduersario la c r, essere perpendicolare alla A B, in r; perche all'hora considerato il Triangolo C r B, in esso l'angolo C r B, saria retto, & il C B r, è ottuso, però essi fariano somma maggiore di dui retti, ilche è impossibile douendo la somma di tutti tre li angoli d'ogni Triangolo essere eguale precise a dui retti (per la 32. del primo, & non maggiore) si dice il quadrato del lato A C, sottotendente all'angolo ottuso B, essere maggiore della somma delli dui quadrati di A B, B C, cõtinente detto angolo B, ottuso, in quanto importa il dutto dell'allungamento B D, (doue arriua la à lui perpendicolare C D;) nell'allungato lato A B, due volte per dimostrarlo. Intesa la retta A D, diuisa in due parti in B ne segue per la 4. propositione) che al quadrato di essa A D. siano eguali il quadrato di A B, con il quadrato di B D, & con il doppio del dutto di A B in B D, onde giunto a ciascenna banda il quadrato di C D, ne segue, che da vna banda li dui quadrati di A D, & C D & perciò (per essere l'angolo D retto) che il solo quadrato di A C, eguale a questi dui di A D, D C, sia eguale dall'altra banda alli tre quadrati di A B, B D, & D C, & al doppio del dutto di AB, in BD. Ma in cambio delli dui quadrati di B D, DC posto il solo quadr. di BC, ad essi dui eguale, per essere la retta BC, opposta all'angolo retto D, cõtenuto dalle due dette BD, DC, nel triangolo rettangolo BDC, haueremo il quadr. di AB, & il quadr. di BC, & dui rettangoli di AB in BD, ale che tutto sara eguale il solo quadrato di AC. questo quadr. dunque di AC, sottotendente all'angolo ottuso B, nel Triangolo ABC, è maggiore delli dui quadrati di AB, & BC, (continente detto angolo ottuso ABC) nelli dui restãti retãgoli di AB in BD, cioè nel dopio del dutto del lato allũgato è base AB, nell'allungamẽto BD, fino alla perpẽdicolare c D. che è quanto occorreua mostrare.

784. quadrato di AB
225. quadrato di B C
336. di A B in B D
336. vn'altra volta
somma 1681. che è il quadr. di A C.

Da questa Propositione impariamo come nelli Triangoli ottusangoli di 3. lati noti, facendo base vno delli suoi dui lati, che cõtengono il suo angolo ottuso si troui l'altezza, ò perpendicolare di esso triangolo, quale di necessità cade fuori nello allungamento della base. che nel triangolo superiore posto per base il lato AB 28 quale con il BC 15. forma l'angolo ottuso *B*. essendo la subtensa, ò lato AC, ad esso angolo opposto 41 sapendo, che il suo quadr 1681. è maggiore della somma 1009. delli dui quadr. 784. & 225. di 28. & di 15. lati contenẽti l'angolo ottuso; nel doppio della base 28. nell'allungamento *BD*, cauando detta somma 1009. dal 1681. che resta 672. sapremo che questo 672 è il doppio del prodotto che nasce a moltiplicare 28. base per *BD*, sino allungamento, onde la mità d'esso 672, cioe 336. partendolo per 28 (ouero partendo il totale 672 per 56

doppio di detta base)l'auenimento 12. sapremo douere essere *BD*. allungamento del 28. fuori del triangolo; Hora perche nel triangolo rettãgolo CD*B*. il quadr. di BC, sottocendente, ò vogliamo dire opposto al l'angolo retto D. e vguale alla somma delli dui quadrati di *BD*, & CD (cõtinenti esso angolo retto D) cauandosi 144. quad. di *BD*, da 225. quad di *B*C, il restante 81. sarà il quad. di CD, però presa la rad. quadra d esso 81. & è 9 questo 9. sarà l'altezza, ò perpẽdicolare CD. del triangolo, quale anco potressimo trouare mediante le due linee, ò numeri di C D, 41. & AD 40. considerando il triãgolo rettangolo ADC, la subtensa all'angolo retto D, del quale è AC, 41. però dal suo quadr. 1681. cauando il quadr. di 40. A D, che è 1600. il restante 81. è il quadr. di C D. però la rad. di 81. cioe 9. è la perpendicolare CD. Se mò trouare la grandezza d'esso triãgo ò ottusangolo A*B*C. moltiplicaremo la perpendicolare 9. via 14. metà di 28. A*B* base, che fa 126. ouero moltiplicaremo la metà di 9 perpendicolare, cioe 4 $\frac{1}{2}$ via 28. base, che fa pure 126. ouero 9. perpendicolare via 28. base, & del prodotto 252. pigliaremo la mità, che è medesmamente 126; & questo 126. sarà la grandezza del proposto triangolo di lati 41. 40. 28.

Et se vorremo far base il lato C*B* 15, che è l'altro delli dui continenti l'angolo ottuso, essendo l'allungamento d'esso lato, ò base C*B*. la *BD*, fuori del triangolo doue peruiene la A D altezza del triangolo dal punto, ò cima A perpendicolare alla CD. noi trouaremo il numero d'essa *B* D. cauando pure la somma di 225, & 784. quadrati delli dui lati continenti l'angolo ottuso da 1681. quadrato del lato opposto all'angolo ottuso, & il restante 672. partiremo per 30. doppio della base C*B*, che l'auenimento 22 $\frac{2}{5}$. sarà l'allungamento *BD*, quale dalli Prattici si suol chiamare caso minore, & tutta la C D. cioè il composito dell'allungamento, & base chiamano caso maggiore, & inteso il triangolo rettangolo A*B*D. cauaremo il quadrato di 22 $\frac{2}{5}$ *BD*, che è 484 $\frac{1}{2}\frac{4}{5}$ dal quadrato della subtensa A*B* 28. che è 784. & del restante 282 $\frac{1}{2}\frac{6}{5}$ pigliaremo la radice quadra, che è 16 $\frac{4}{5}$, & questa è la perpendicolare AD. (ouero inteso il triangolo rettangolo A D C. cauaremo il quadrato di 37 $\frac{2}{5}$. C D, che è 1398. $\frac{1}{2}\frac{9}{5}$. dal quadrato della subtensa A C, 41. che è 1681, & del restante 282 $\frac{1}{2}\frac{6}{5}$. che è il quadrato di A D. pigliaremo la radice quadra, che è 16 $\frac{4}{5}$, & è la perpẽdicolare A D.) Hora moltiplicãdo la base CB 15. del Triãgolo nostro cõ 8 $\frac{2}{5}$ mità della perpẽdicolare, ò altezza A D il prodotto 126. sarà la grandezza d'esso triangolo A*B* C. come anco si è trouato nell'altra positura.

C 41 A
15 *B* 28 22 $\frac{2}{5}$ D

BD 22 $\frac{2}{5}$
via 22 $\frac{2}{5}$
484 $\frac{1}{2}\frac{4}{5}$
17 $\frac{3}{5}$
quadr. di BD 501 $\frac{1}{2}\frac{4}{5}$
da 784
quadr. di AD. 282 $\frac{1}{2}\frac{6}{5}$
7056.
84. 5.
AD. 16 $\frac{4}{5}$
La metà è 8 $\frac{2}{5}$
via 15 base
fa 126.

ouero
CD. 37 $\frac{2}{5}$
via 37 $\frac{2}{5}$
1369 $\frac{1}{2}\frac{4}{5}$
29 $\frac{3}{5}$
1398 $\frac{1}{2}\frac{9}{5}$ quadr. di CD.
da 1681. quadr. di C A
282 $\frac{1}{2}\frac{6}{5}$ quadr. di AD.

Nel triangolo superiore A*B*C, i suoi lati sono numeri tali, che l'allũgamẽto, ò caso minore fuori del triangolo, & anco la perpendicolare, & però la grandezza del triangolo sono num. rõnali, & perche desidero giouare anco, & far cosa grata in particolare alli desiderosi delle ingegnose inuentioni, voglio mostrarli come si possino trouare altri triangoli, i lati delli quali siano numeri tali che anco diano i casi, & perpendicolari in numeri rationali, però nel triangolo ADC, posto vn lato, & sia A *B*, vn numero a beneplacito poniamo 28. lo supponeremo per quello nel termine A, del quale cominci la perpendicolare A D, che ha da cadere sù l'allungamento dell'altro lato CB, che serue per base, & così sapremo che il quad. d'esso 28, cioè 784. deue essere eguale alla somma de dui quad di AD. perpendicolare, & D *B*. allũgamento, onde bisogna diuidere questo 784. num, quad. in dui num. quad. & il modo è questo. Piglinsi dui num quad. a beneplacito, la somma de quali sia num. quad. come sono 16 & 9. che fanno 25. ouero 49. & 576, che fanno 625, ouero 81. & 40, che fanno 481. ò 144. & 256, che fanno 400. ò 25. & 144. che fanno 169. ò 1225. & 144 che fanno 1369. ò 144. & 81. che fanno 225, ò 9801. & 400. che fanno 10201. ò 2304. & 400. che fanno 2704. ò 576, & 100. che fanno 676. ò 441. & 400. che fanno 841. Hor sia, che si piglino 16 & 9, che fãno 25; per il che quãdo il quad. di A B fusse 25. ponendo esso AB 5 all'hora i quad. di BD. & A D potriano essere 16. & 9, & però q̃sti A D B D sariano l'vno di loro qual si uogli 4, & l'altro 3. Ma variãdosi il nu. di A B dal 5. detto, ancora nel medesmo modo si variaranno li 4, & 3. delli dui lati cõtinenti l'ang. lo retto B, pil che volẽdo che A B. subtẽsa sia 28. per trouare gl'altri dui lati diremo; Se 5. douenta 28. che douentarãno 4. & 3. & vedremo che il 4. douẽtarà 22 $\frac{2}{5}$ & il 3 douẽtarà 16. $\frac{4}{5}$. onde B D sarà 22 $\frac{2}{5}$. ouero 16 $\frac{4}{5}$. Et AD sarà 16 $\frac{4}{5}$, ouero 22 $\frac{2}{5}$. Et se non hauessimo questo modo di diuidere il 284. nu. quad. in dui num. quad. noi ci potressimo seruire dell'Algebra, ò Regola della Cosa, Madre, & Inuentrice delle Regole, ponendo che l'vno delli quadrati, ne' quali si diuida il 784. sia 1 cen che l'altro di necessità, sarà il restante fino al 784; cioè sarà 784. m̃ 1 ce, però questo douendo essere quadra-

to

to, lo agguagliaremo ad vna quantità quadrata, il lato della quale sia 28. (radice del 784.) manco vn numero di cose à beneplacito, accioche la quantità quadrata, che ne deriuarà sia tale, che agguagliata a detto 784. m̃ 1 cen. leuandosi il numero 784. da ogni banda resti solo cen. & cosa; & perciò si peruenga à cen. vguale a co. cioè (schifando per 1 co.) à co. eguale a numero, per il che il valore della co. sia di necessità rationale; Hor sia il lato d'essa quãtità quadrata 28. m̃ 3 co. che la quantità quadrata sara 784. m̃ 168 co. p̃. 9 cen. da aguagliare a 784. m̃ 1 cen. che leuato 784. da ciascuna banda, & accommodato il m̃, haueremo 168 co. eguale a 10. cẽ. O schifato per 1 co. sarà 168. eguale a 10 co. & la co. valerà $16\frac{4}{5}$, però 1 cen. sara $282\frac{6}{25}$ & è vna delle due parti del 784. posta 1 cen. però il restante (che importa 784. m̃ 168 co p̃. 9. cen. ò che ha per lato 28. m̃ 3 co. ma bisogna dire 3 co. m̃ 28. cioè $50\frac{2}{5}$ m̃ 28, cioè $22\frac{2}{5}$) che è il vero lato, perche 28. m̃ 3 co. saria manco di niente, cioè 28. m̃ 50. $\frac{2}{5}$, che non è quantità reale) $501\frac{19}{25}$, che ha per lato $22\frac{2}{5}$, sarà l'altra parte del 784. Et così haueremo diuiso il 784. in dui num. quadr. $282\frac{6}{25}$ & $501\frac{19}{25}$ i lati de quali sono $16\frac{4}{5}$ & $22\frac{2}{5}$, però i dui lati A B, B D, del Triãgolo rettangolo esteriore A D B. Et se nel diuidere il 784. quadrato in dui numeri quadrati, hauendo posto l'uno essere 1 co. si fusse posto il lato dell'altro essere 1 co. m̃ 28, ò 28. m̃ 1 co. che il quadrato sarà 1 cen. m̃ 56 co. p̃. 784. Et questo saria eguale a 784. m̃ 1 cen. (che è quello che resta a cauar 1 cen. posto essere l'un numero da 784 somma d'ambidui) onde leuato 784. da ciascuna banda, & accomodaro il m̃ si haueria 2 cen. eguale a 56 co. & schifato per 2 co. si haueria 1 co. eguale a 28; & pero la co. valeria 28. & il cen. saria 784. pero l'un numero quadrato posto 1 cen. saria 784; onde l'altro saria niente, per il che questa positione non saria a proposito; Ma se posto l'vno delli dui numeri quadrati parte del 784, essere 1 cen. si ponesse il lato dell'altro essere 28 m̃ $\frac{1}{2}$ co. il quadrato saria 784. m̃ 28. co. p̃. $\frac{1}{4}$ cen. & quello saria eguale a 784. m̃ 1 cen. che leuato 784. da ciascuna banda, & accommodaro il m̃, si haueria $1\frac{1}{4}$ cen. eguale a 28. co. cioè $1\frac{1}{4}$ co. eguale a 28; & partito 28 per $1\frac{1}{4}$ numero delle co. si vederia la co valere $22\frac{2}{5}$. & però il cen. saria $501\frac{19}{25}$ per l'una parte quadrata del 784. essendo l'altra il restante $282\frac{6}{25}$. Et se posto pure l'vno delli dui quadrati parte del 784. essere 1 cen. (che l'altro saria 784. m̃ 1 cen. da aguagliare ad vna quantità quadrata, si ponesse il lato d'essa essere 28 m̃ 7. cen. (ò 7. co. m̃ 28.) essa quantità quadrata saria 784. m̃ 392 co. p̃ 49 cen. da agguagliare a 784. m̃ 1 cen. onde leuato 784. da ciascuna banda, & accomodato il m̃. si haueria 50 cen eguale a 392. co. & la co. valeria $7\frac{21}{25}$. però 1 cen. saria $61\frac{291}{625}$. per vna parte del 784; che l'altra saria il restante $722\frac{334}{625}$. & li lati d'essi dui quadrati sariano $7\frac{21}{25}$. & $26\frac{22}{25}$. & l'vno qual si vogli di questi saria A D. & l'altro saria B D. Et perche in questa operatione si vede il 49. numero delli cen. della quantità quadrata da agguagliarsi al 784. m̃ 1 cen. essere sempre il quadrato d'vn num. A. preso a beneplacito (purche non sia 1. come si notò di sopra, che all'hora la Equatione non saria a proposito) al quale sempre si giunge 1. (che è l'1. numero delli cen. segnato con il m̃, quale è accompagnato al 784.) & la somma è vn numero B. di cen. che è vguale a tante co. quanto è il prodotto C di 28. (radice di 784. da diuidere) nel doppio dell'A; onde partito questo prodotto C per il B. l'auenimẽto D è il valore della co. & è la radice dell'vno delli dui numeri quadrati nelli quali si diuide il dato quadrato hora 784; si vede, che la Regola del diuidere vn numero quadrato in dui quadrati estrahendola da questo operare d'Algebra potrà essere questa, che segue. Per diuidere vn dato quadrato Q in dui quadrati. Moltiplichisi la radice d'esso dato per vn numero B a beneplacito (ò intiero, ò rotto, ò misto, pure che non sia la vnità). & il doppio del prodotto si parta per il quadrato, & 1. più del B. che l'auenimento sara la radice d'vn numero quadrato, che è l'vna parte del dato, & il restante sara l'altra parte. Per esempio dato 784. quadrati da diuidere in dui quadrati, la sua radice 28. si moltiplichi per vn numero B. a beneplacito, & sia $\frac{1}{14}$, che fa 2. & il suo doppio 4; si parta per il quadrato più 1. delli $\frac{1}{14}$, cioè per $1\frac{1}{196}$, che l'auenimento $3\frac{193}{197}$. sara la radice dell'vno delli dui quadrati, però il quadrato sarà $15\frac{32521}{38809}$. essendo l'altro il restante del 784: cioè $768\frac{6288}{38809}$. la radice del quale è $27\frac{141}{197}$. (che è 28. m̃ $\frac{1}{14}$ co. che l'$\frac{1}{14}$ è il numero delle co. della positione) però valendo la co. $3\frac{193}{197}$, cioè $\frac{784}{197}$. l $\frac{1}{14}$. d'1 co. sarà $\frac{56}{197}$. che cauato da 28. resta $27\frac{141}{197}$. per il lato della quantità quadrata significante l'altra parte quadrata del dato 784.) Et così vediamo potersi diuidere ogni dato numero quadraro in molte diuerse coppie di numeri quadrati.

Et se nel Triangolo superiore A B C, hauendo posto il lato AC, essere 41. che è opposto all'angolo ADC, retto, & perciò il suo quadrato è vguale alla somma delli dui quadrati di A D, D C, per trouare esse A D, D C, conuerria diuidere 1681. quadr. di 41. in dui numeri quadrati, onde adoprando vno delli sopradetti modi, & sia hora la Regola deriuata dall'Algebra; Moltiplicaremo il 41. per vn numero a beneplacito, & sia 3. che fa 123. il doppio del quale cioe 246. partiremo per il quadrato, & 1. più del 3. cioe per 10, che ne viene $24\frac{3}{5}$, ò & questo è la radice ò lato

d'vno

d'vno delli dui numeri quadrati cercati; il lato poi dell'altro si troua moltiplicendo questo 24 $\frac{3}{5}$. per il 3. preso che fa 73 $\frac{4}{5}$ la differenza del quale al 41. cioè 32. $\frac{4}{5}$. sarà il lato dell'altro quadrato, (& essi quadrati saranno 605 $\frac{1}{2}\frac{4}{5}$, & 107 $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$. la somma de quali è 1681. quadr. di 41. come conuiene.) Et se in vece del 3. per moltiplicare il 41. si pigliasse 7. che il prodotto saria 287 & il suo doppio è 574; noi lo partiressimo per 50. quadrato, & 1. più del 7, che l'auenimento 11. $\frac{1}{2}\frac{7}{5}$. saria il lato d'vno delli dui quadrati, quale moltiplicandolo per il 7. fa 80. $\frac{1}{2}\frac{0}{5}$. la differenza del quale al 41. è 39 $\frac{1}{2}\frac{0}{5}$. & questo è il lato dell'altro quadrato (che essi dui quadrati sariano 131 $\frac{4}{6}\frac{0}{2}\frac{4}{5}$. Et 1549. $\frac{1}{6}\frac{4}{2}\frac{1}{5}$. la somma de' quali è 1681 quadrato di 41. come conuiene.) Hora di questi dui numeri 11 $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$. & 39 $\frac{1}{2}\frac{0}{5}$. ouero delli dui primi 24. $\frac{3}{5}$, & 32 $\frac{4}{5}$: potiamo l'vno d'essi qualsiuoglia pigliare per l'altezza perpendicolare A D, & l'altro per la totale C D, composta dalla base C B, & allungamento, o caso minore B D. Nondimeno auertasi, che essendo la base C B 15. non può la somma di essa con l'allungamento B D, ponersi 11 $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ (numero minore di essa base, però questo 11 $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$. douerà essere l'altezza, o perpendicolare A D, essendo la C D caso maggiore il 39 $\frac{1}{6}\frac{0}{5}$. onde leuatone la base C B, il restante 24 $\frac{1}{2}\frac{0}{5}$ sarà il caso minore BD. Ma staremo nelli numeri gia adoprati hauendo posto A D 16 $\frac{4}{5}$, & per B D 22 $\frac{2}{5}$, cioe, & 37 $\frac{2}{5}$ per C D, che se volessimo conoscere, come deriuano supposto A C 41; bisognaria trouare vn numero B, che moltiplicato per 41. & il doppio del prodotto partito per il quadrato, & 1. più d'esso B. l'auenimento fusse il 16 $\frac{4}{5}$, (ouero il 37. $\frac{2}{5}$) che seruendoci dell'Algebra, poneressimo esso B, esse 1 cen. il doppio del suo dutto in 41. è 82. cẽ quale partito per il quadrato di B, & 1 più, cioè per 1 cen. p̃. 1. ne viene 82 co. 1. esimo d'1. æ. p̃. 1. & questo è eguale a 16 $\frac{4}{5}$, ouero a 37 $\frac{2}{5}$,) che leuato il rotto, moltiplicãdo ciascuna parte per il denominatore 1 cen. p̃. 1. si hauerà 82 co. eguale a 16 $\frac{4}{5}$ cen. p. 16 $\frac{4}{5}$. che ridotto a 1 cen. & esequita la Regola di quelta Equatione di vn cen & numero, eguale a co. vedremo la co. valere 4 $\frac{3}{4}$, & anco $\frac{1}{1}\frac{3}{4}$, però il numero B cercato sarà 4 $\frac{3}{4}$, & anco potrà essere $\frac{1}{1}\frac{3}{4}$, che se pigliaremo il 4 $\frac{3}{4}$ moltiplicandolo via 41. fa 191 $\frac{1}{4}$, che il doppio è 382 $\frac{2}{4}$, quale partito per 21 $\frac{7}{0}$, & 1 più. cioe per 22 $\frac{2}{0}$, cioe 3444. per 205. ne viene 16 $\frac{1}{2}\frac{6}{0}\frac{4}{0}$, che è 16 $\frac{4}{5}$ per il lato d'vna delle parti quadrate 1681, del che il lato dell'altra parte quadrata sara 37 $\frac{2}{5}$. Et se per il B hauessimo preso $\frac{1}{1}\frac{3}{4}$, il doppio d'esso cioe $\frac{3}{7}$ via il 41. saria 17 $\frac{4}{7}$ da partire p 1 $\frac{1}{1}\frac{0}{6}\frac{9}{6}$, cioè 3444. per 205. che ne viene 16 $\frac{4}{5}$ come di sopra per il numero B. Et cosi lo studente può accorgersi della mirabile sagacità della dottrina Algebrica, che con dui diuersi numeri B ci troua, & mostra il medesimo 16 $\frac{4}{5}$, cercato, & anco ci mostreria l'altro suo compagno 37 $\frac{2}{5}$.

82 co. eguale a 16 $\frac{4}{5}$ cen. p̃. 16 $\frac{4}{5}$
410 co. 84 cen. p̃, 84.
410. co. eguale a 1 cen. p̃. 1.

84.
205.
via 205.

40205.

con. 2025
7056.
34969.

1 8 7. 84. esimi. si giunge, & caua a 205. 84. esimi, & ciascuno delli dui resultante, cioè $\frac{3}{8}\frac{9}{8}\frac{2}{4}$. & $\frac{1}{8}\frac{8}{4}$ cioè $\frac{1}{1}\frac{2}{4}$, & $\frac{1}{1}\frac{3}{4}$. cioè 4 $\frac{3}{4}$, & $\frac{1}{1}\frac{3}{4}$, sarà il valore della co. per il che il numero B, cercato, potrà essere 4. $\frac{3}{4}$, & anco $\frac{1}{1}\frac{3}{4}$.

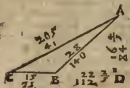
Bene è vero, che sapendo noi, che mediante dui numeri quadrati la somma de quali sia numero quadrato si può diuidere il 1681 quadr. del 41. (o quale altro quadrato si vogli) in dui numeri quadrati, & vedendo che esso 1681. è diuiso in dui quadrati, i lati de quali sono 16 $\frac{4}{5}$, & 37 $\frac{2}{5}$ essendo essi quadrati $\frac{3\cdot 4\,9}{}\frac{6}{2}\frac{9}{5}$, & $\frac{7\,0\,5\,6}{2\,5}$, che fanno in sõma 1681 vediamo quali sono i duoi quadrati cioè 1398 $\frac{1}{2}\frac{9}{5}$, & 282 $\frac{6}{2\,5}$, che si vengono ad essere adoprati per diuidere il 1681. in dui numeri quadrati, ouero per leuare il rotto moltiplicando ciascun d'essi per il loro denominatore 25. numero quadrato saranno 34969, & 7056, alla similitudine de quali si è diuiso in dui simili quadrati il 1681.

Et se nel nostro principal Triangolo C A B, segnata la perpendicolare C D, cadente sull'allungamento del lato, o base A B, & considerato il Triangolo rettangolo C D A. ouero il solo esteriore Triangolo rettangolo C D B, poneremo per noto in l'vno, ò in l'altro vno delli dui lati, che formano l'angolo retto, & sia che nel C D B si pigli per nota la perpendicolare, o altezza C D, ponendola 9. noi per trouare il lato D B, & la subtensa C B conuerrà che cerchiamo dui numeri quadrati, la differenza de quali sia 81. quadrato di C D (perche il quadrato di B D giunto al quadrato di C D, deue fare il quadrato di C B, onde il quadrato di C B è maggiore, o vogliamo dire è differente dal quadrato di B D in 81. quadrato di C D) & perciò notisi che la differenza di dui quadrati è sempre quanto il dutto della somma delli dui lati loro, nella differenza delli medesimi dui lati loro, ilche facilmente si dimostrarà cosi.

Sia il quadrato b g, il lato b d, del quale sia 8. & in esso sia il quadrato b n, che habbi l'angolo b, commune con il grande b g, & il suo lato sia b e, 5. che cosi le differenza d'essi dui quadrati sarà lo Gnamone e d g a r n; si dice questo essere il composto del dutto della somma de dui lati b d 8, & b e 5, cioè di 13. in e d 3. differenza di detti dui lati d'essi quadrati. Perche allugato vno de dui lati interiori r n, ouero e n, del quadrato piccolo, poniamo il c n, sino al lato oppostoli del quadrato grande, & sia in e, il rettangolo e t g d, che haueria per lunghezza il lato 8. del quadrato grande, & per larghezza la c d 3. differenza del lato b e 5. del quadrato piccolo al b d 8. lato del quadrato grande, sarà il dutto del lato 8. nella differenza 3, de dui lati. Et considerato il retrangolo r n t a; che hà per vn lato, ò lunghezza la r n 5. lato del quadrato piccolo, & per larghezza la r a 3. differenza de lati de dui quadrati, esso retrangolo r t, sarà il dutto del lato b e 5. del quadrato piccolo nella medesima differenza 3. de dui lati, onde intesa la t a 5. giunta in lungo alla e t 8. di modo, che la t r 3. si vnisca con la e g 3. tutto il rettangolo e d r a, composto delli dui e g, r t, sarà la differenza de dui quadrati b g, b n, ma esso rettangolo e d r a, hauerà per vn lato la retta c t a, somma de dui lati 8. & 5. de dui quadrati, & per l'altro lato hauerà la c d 3. differenza di detti dui lati, però egli sarà il dutto della somma de lati de dui quadrati nella differenza de medesimi dui lati; onde è chiaro la differenza di dui quadrati essere il dutto della somma de dui lati d'essi quadrati, nella differenza de medesimi dui lati; Perilche, quando data la differenza de dui numeri, ò quantità quadrate, ogni dui numeri, ò quantita, che moltiplicati insieme produchino essa differenza, potranno essere vno cioe il maggiore la somma, & l'altro minore, la differenza de dui lati d'essi quadrati, onde partendo essa differenza di dui quadrati per qualsiuogli numero, ò quantità P, & sia l'auenimento A di questi P, & A, il maggiore sarà la somma, & il minore sara la differenza de lati d'essi dui quadrati. Questo inteso, & posta l'altezza C D 9. per trouare il lato B D & subtensa C B, douendo essi essere tali, che la differenza de quadrati loro sia 81. (quadrato di C D 9.) diuideremo questo 81. per vn numero a beneplacito poniamo per 3. che l'auenimento è 27. de quali il maggiore 27. è la somma, & il 3. minore è la differenza delli dui numeri BD, & CD, da trouarsi, per il che dalla somma 27. cauata la differenza 3. & del restante 24 presa la mità che è 12. questo sarà il minore, & 3. di più, ò il restante fino a 27. loro somma, cioè 15. sarà il maggiore, & cosi il 12. minore daremo alla BD, dando l'altro 15. maggiore alla subtensa CB. Et se ci volessimo seruire del Triangolo retrangolo grande ADC, posto pure CD 9. per trouare le AD, & AC, i quadrati delle quali linee sono differenti in 81. quadr. di AD 9. noi similmente partiremo l'81. per vn numero à beneplacito poniamo per 1. che ne viene 81. de quali dui 1. partitore, & 81. auenimento il maggiore 81. è la somma & il minore 1. è la differenza di dette due rette AC, AD. onde dalla somma 81. cauato la differenza 1. & del restante 80. preso la mità, che è 40. questo sara la minore AD, & 1. di più, o il resto fino ad 81. loro somma, cioe 41. maggiore sara la subtensa AC. Horà dalla base AD 40. cauato la sua parte esteriore BD 12. il restante 28. sara la AB base del triangolo nostro ABC hauente l'angolo B ottuso. Ma se per trouare le AD, & AC, i quadrati delle quali sono differenti in 81. hauessimo partito l'81. per 2. (auertendo che questo 2. partitore per trouare il lato, & subtensa nel triandolo grande sia minore del 3. partitore adoperato nel trouare il lato, & subtensa nel triangolo piccolo, accioche douendo queste due AD, & AC nel grande, essere più lunghe delle due BD, & CB del triangolo piccolo, li auenimento, & partitore nel grande siano più differenti fra loro, che li auenimento, & partitore nel piccolo, che cosi poi conuenientemente li dui numeri, che si trouaranno per il grande saranno fra loro differenti in manco (cioe nel numero piu piccolo adoprato per partitore nel trouarli) che di molte coppie di quadrati che siano differenti in vn medesimo 81. ò altro numero; quelle coppie che hanno i numeri maggiori li hãno poi manco differenti fra loro che non sono quelli delle coppie che li hanno minori. Et ben vediamo 40. & 41. essere differenti solo in 1. ma 12. & 15. piu piccoli delli 40. & 41. essere differẽti in 3. maggiore dell'altra differenza 1. Et la necessità di questo auiene, perche douendo l'1. A moltiplicato via 81. B somma di 40, & 41. produrre quell'istesso 81, che si produce dal 3. A, moltiplicato via 27. b somma di 12, & 15. se il 27. b è minore di 81. B, conuien bene, che conuersamente il moltiplicante a 3. sia poi maggiore del moltiplicante A 1, cioe che il maggiore delli B b, habbi p moltiplicante il minore delli A a, Anzi perche 81. B è triplo 27. b, conuiene, che similmente per conuerso poi il moltiplicante a 3. sia pur triplo al moltiplicante A 1.) l'auenimento saria $40\frac{1}{2}$, de quali 2. partitore, & $40\frac{1}{2}$. auenimento il maggiore $40\frac{1}{2}$ è la somma, & il minore 2. è la differenza delle due rette AC, AD. onde dalla somma $40\frac{1}{2}$ cauato le differẽza 2, & del restãte $38\frac{1}{2}$ presa la mità che è $19\frac{1}{4}$. questo $19\frac{1}{4}$ sarà la minore AD; Et 2. di piu, ouero il resto fino al $41\frac{1}{2}$ som-

ma

ma loro, cioe 21. $\frac{1}{4}$ sarà la maggiore, ò subtensa A C. Hora dalla A D, cauato la parte esteriore B D, stabilito hora essere 12. il restante 7 $\frac{2}{4}$ sara la A B, base d'vn Triangolo A B C, hauente l'angolo B, ottuso, essendo il lato C A, 21 $\frac{1}{4}$, & il C B, il 15. già stabilito.

Et così potremo a voglia nostra formare quanti triangoli vorremo di lati, base, casi, altezze, & grandezze rationali. Et se trouatili in numeri rotti, o misti, vorremo, che si riduchino a semplici intieri, moltiplicaremo essi numeri trouati per vn numero intiero tale, che i prodotti douentino intieri, cioe per vn numero, nel quale entrino per volte intiere i denominatori d'essi rotti, che i prodotti formaranno Triangoli di numeri intieri simile al trouato, come si vede nell'A C B. del margine d'altezza 84. base 75. & lati 205. 140, deriuato dallo a lui simile di altezza 16 $\frac{4}{5}$ base 15. & lati 41. & 28. Et se nel trouare dui numeri quadrati, che siano differenti in vn numero dato non hauessimo modo alcuno, ricorreressimo alla Dottrina Algebratica Grimaldello delle Inuentioni della quale ne estraheremo quanto ci bisogna.

Onde volendo trouare dui numeri quadrati, la differenza de quali sia 81. poneremo a beneplacito che il lato dell'vno sia 1. co. p̄. 1. ò 2. co. p̄. 5. ò 2. co. p̄ 3. ò altro simile composto di cose, & numero, & il lato dell'altro sia il residuo di questo, cioe 1 co. m̄ 1. (che saria 1. m̄ 1 co. quando si trouasse la cosa valere manco di 1.) ò 2. cose m̄ 5. ò 7. cose m̄ 3. &c. hor diciamo il lato dell'vno essere 1. cosa piu 1. Et il lato dell'altro 1 cosa m̄ 1; che le due quantità saranno 1 cen. piu 2 cose piu 1. Et 1 cen, m̄ 2 cose piu 1. la differenza de quali è 4 co. & perciò è eguale a 81; (che così si peruerrà sempre a co. eguali a numero, & perciò il valore della co. sara numero rationale) onde la co. vale 20 $\frac{1}{4}$. perche il lato dell'vno posto 1 co. p̄. 1. sarà 20 $\frac{1}{4}$ piu 1. cioe 21 $\frac{1}{4}$. Et il lato dell'altro posto 1 co. m̄ 1. sara 20 $\frac{1}{4}$ m̄ 1; cioe 19 $\frac{1}{4}$, li loro quadrati sono 451 $\frac{9}{16}$, & 370 $\frac{9}{16}$, che sono differẽti in 81. come si cerca; Et se hauessimo posto il lato dell'vno essere 5 co. p̄ 3. & il lato dell'altro il suo residuo, cioe 5 co. m̄ 3. (accioche la differẽza de quadrati loro sia vn numero di co. che eguagliato al dato numero 81. il valore della co. sia numero rationale) i dui quadrati sariano 25 cen. p. 30 co. p. 9. & 25 cen m̄ 30 co p. 9. la differenza de quali saria 60 co. & è eguale al dato 81. per il che la co. vale 1 $\frac{7}{20}$. onde il lato dell'vno posto 5 co. piu 3. sara 6 $\frac{3}{4}$ p. 3. cioe 9 $\frac{3}{4}$. Et il lato dell'altro posto 5 co. m̄ 3. sara 6 $\frac{3}{4}$ m̄ 3. cioe 3 $\frac{3}{4}$. li quadrati perciò sono 95 $\frac{1}{16}$. & 14 $\frac{1}{16}$, che sono differenti in 81. come si ricerca; Et perche il quadrato 25 m̄ 30 co. p. 9. può ancora hauere per lato 3. m̄ 5 co. che l'altro quadr. all'hora hauera per lato il binomio di questo, cioe 3. p. 5 co hauendo trouato la co. valere 1 $\frac{7}{20}$. le 3. co. p̄. 5. saranno 4 $\frac{1}{20}$. p. 5. cioe 9 $\frac{1}{20}$; ma le 3 co m̄ 5. sariano 4 $\frac{1}{20}$ m̄ 5. cioe m̄ $\frac{19}{20}$, che non è quantità reale (se bene il quadrato di m̄ $\frac{19}{20}$, che si dice essere $\frac{361}{400}$, & si diria essere p. (ma impropriamente perche il m̄ non può stare da se, che conuiene appoggiarlo, ò accompagnarlo a qualche quantità reale, tale che il loro composto sia qualche cosa) e differente da 81 $\frac{361}{400}$. quad. del 9 $\frac{1}{20}$ nel l'81. dato) conosciamo che per numero delle co. nelli lati delli dui quadrati è bene il pigliare sempre il maggiore delli dui numeri hora 5. & 3, quando essi sono ineguali; Et quando questo non basti, cioe che ancor così ne venisse m̄ per il lato del minor quadrato, all'hora mutisi la positione, ponendo il minor numero in essa per numero si, & il maggiore per numero delle co. pure, ma sia m̄ cioe che il lato sia numero m̄ co. ouero, che resultarà l'istesso, quel lato che venisse denominato da m̄, si pigli per più, & sarà accomodato il tutto. Di qual mò potremo deriuar ne la Regola, considerando, che il 60. numero delle cose, che si agguaglia al dato 81. è il doppio del 30, che nasce a moltiplicare 5. numero delle cose della positione per il doppio del 3. numero accompagnato ad esse cose, & poi trouato il valore della cosa, cioè partito l'81. dato per il 60, l'auenimento 1 $\frac{7}{20}$. valore della cosa, si moltiplica con il 5. numero delle cose, della positione, & al prodotto 6 $\frac{3}{4}$. si giunge, & caua il 3. numero accompagnato alle cose, che i dui resultanti 9 $\frac{3}{4}$, & $\frac{3}{4}$ sono i lati delli dui quadrati differenti nell'81. dato. Dalla quale consideratione, che ci mostra il tutto dependere dalli dui numeri 5. & 3. presi a beneplacito ne potremo deriuare la seguente Regola. Per trouare dui numeri quadrati, la differenza de quali sia vn dato numero D. Piglinsi dui numeri A, & B, a beneplacito eguali, ò ineguali, & con il quadruplo del prodotto loro si parta il dato numero D, & l'auenimento C, si moltiplichi per il maggiore delli dui presi, & sia l'A, & al prodotto P si giunga, & caui l'altro numero B, che i dui resultanti saranno i lati delli dui numeri quadrati cercati, & quando il lato del minor quadrato riuscisse m̄, egli si pigli come p̄. Per essempio volendo trouare dui numeri quadrati, che siano differenti in 1 $\frac{1}{2}$. Presi A & B, poniamo 3. & 1. il quadruplo del loro prodotto è

12. con

12. con il quale partito $\frac{1}{2}$, dato ne viene $\frac{1}{4}$. Questo moltiplicato per il maggiore 3. fa $\frac{1}{8}$, al quale si giunga, & caui il minore 1.& ne resultano 1 $\frac{1}{8}$, & m̃ $\frac{7}{8}$. Ma questo meno $\frac{7}{8}$ si pigli come p̃. dicendo i dui lati delli quadr. cercati essere 1 $\frac{1}{8}$, & $\frac{7}{8}$, che essi quadr. sarãno $\frac{8}{1}\frac{1}{4}$, & $\frac{4}{6}\frac{9}{4}$ differenti fra loro in $\frac{8}{6}\frac{2}{4}$, cioè in $\frac{1}{2}$, come si propone. Et quãdo volessimo che il nostro Triãgolo ottusangolo Equicrure, cioe che li dui lati continenti l'angolo ottuso fussero eguali l'vno all'altro, essendo pure i lati, casi, & altezza del Triangolo numeri rationali. Posti a beneplacito la subtensa A C, 41. & l'altezza C D 9, accioche la A D. caso maggiore composto dalla base A B, & caso minore esteriore B D, sia 40. numero rationale anc'egli, per trouare quanto deua essere ciascuna delle due rette, ò lati eguali A B, C B, noi ricorrendo alla Inuentrice Algebra potremo ponere che la B D esteriore sia 1 co. il suo quadrato è 1 cen. che con 81. quadr. di C D 9. fa 1 co. p̃. 81. & questo è il quadr. della BC, subtensa all'angolo retto D nel triangolo rettangolo C D B. Ma questa B C è 40. m̃ 1 co. perche ella si pone eguale alla A B, quale è 40. m̃ 1 co. (cioè A D 40. m̃ B D 1 co.) però il quadrato di 40. m̃ 1 co. cioe 1600. m̃ 80. co. p̃. 1 cen. sarà eguale al trouato 1 cen. p̃. 81. che accomodato il m̃. & leuato 1 co. & 81. da ciascuna parte hauremo 1519 eguale a 80 co. & la co. valerà 18. $\frac{7}{8}\frac{9}{0}$, & questo sarà la A B, esteriore posta 1 co. che cauata dalla totale A D 40 il restante 21. $\frac{1}{8}\frac{1}{0}$, sarà la A B, & perciò la B C. onde la somma delli quadrati di B D, & D C, deue essere il quadrato della subtensa B C, ò vogliamo dire a cauare il quadrato di B D, dal quadrato di B C, il restante deue essere eguale al quadrato di C D, cioe li dui quadrati di B D, & B C. sono differenti fra loro nel quadrato di C D. Ma per cauare il quadrato di B D 18 $\frac{7}{8}\frac{9}{0}$. del quadrato di B C 21 $\frac{1}{8}\frac{1}{0}$, cioe per trouare la differenza d'essi dui quadrati, noi senza formare essi quadrati (che sariano il dutto di 18. $\frac{7}{8}\frac{9}{0}$ in 18 $\frac{7}{8}\frac{9}{0}$ istesso, & il dutto di 21. $\frac{1}{8}\frac{1}{0}$ in 21 $\frac{1}{8}\frac{1}{0}$ istesso) potiamo facilmente seruirci della cognitione, che intorno a ciò habbiamo, & è che la differenza delli quadrati di dui numeri (ò quantità) è quanto quello, che produce a moltiplicare la somma de' dui lati loro, via la differẽza de medesimi dui lati onde sommando essi dui numeri 18 $\frac{7}{8}\frac{9}{0}$, & 21 $\frac{1}{8}\frac{1}{0}$, che fanno 40. lo moltiplicaremo per 2 $\frac{1}{4}\frac{1}{0}$ differenza loro, & se ne produce 81. che è la differenza de quadrati d'essi numeri, & però è il quadrato di CD, però CD è la radice di 81. cioe 9. come conuiene.

Et circa al trouare quanto sia ciascuno delli dui lati A B, C B, quando essi deuano essere eguale vediamo che conuiene diuidere la A D, posta 40. in due parti A B, B D, tali che la differenza de quadrati loro sia il quadrato di C D, cioe sia 81. Et il modo deriuandolo dalla sopradetta operatione Algebrica vediamo essere questo. Cauisi 81. differenza data de dui quadrati da trouarsi da 1600. quadrat. di 40. da diuidere, & il restante 1519. si parta per 80. doppio del 40. dato da diuidere che l'auenimento 18 $\frac{7}{8}\frac{9}{0}$ è la parte minore (B D esteriore) & il restante 21 $\frac{1}{8}\frac{1}{0}$ è la parte maggiore. Se vorremo mò formare vn simile triangolo i numeri occorrenti del quale siano tutti intieri, moltiplicaremo i numeri del sopradetto per 80, & se ne formaranno li posti in margine.

A C 3280. A D 3200. C D 720.
A B 1681. B D 1519. B C 1681

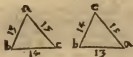
Ma perche il mio principal fine è di giouare, & dilettare alli amatori della scienza, alli quali ogni diligenza, & sottilità può essere di comodo, & di piacere, & io per ciò vò speculãdo intorno alle inuẽtioni, voglio pur anco seguire ad alcune, che in questa occasione mi accenna il discorso naturale d'accorgersi a potere peruenire. Onde preso il nostro Triangolo ottusangolo di base 28. subtensa 41. & lato B C 15. Per trouare il caso esteriore B D. sappiamo che bisogna cauare dal quadrato della subtensa AC 41. cioe da 1681. la somma delli dui quadrati di A B 28. & di C B 15. che sono 784. & 225. la somma de quali è 1009. & il restante 672, partirlo per il doppio della base 28. cioe per 56. ouero partire la mità del 672. cioe 336. per la base 28, ouero partire il 672 per la base 28. & dell'auenimento pigliare la mità, che in ciascun modo il resultante è in 12. & questo è il caso esteriore B D. Hora considerando che la somma di due quantità 28, & 15. insieme con il doppio del dutto dell'vna in l'altra, ò del dopppio dell'vna in l'altra, cioe di 28 in 30, che è 840; sono per la quarta propositione eguali al quadrato del composto di detto 28, & 15. cioe al quadrato di 43. onde de dal quadrato di 43. cioe da 1849. cauato 840 doppio del dutto di 28 in 15. (ò dutto di 30. in 28, ò di 56. in 15.) il restante 1009. sarà la somma de quadrati di 28. & 15. quale si deue cauare dal quadrato della subtensa 41. cioe da 1681. che restarà 672. Ma se in vece di cauare il 1009. dal 1681. quadr. di 41. cauassimo il 1681. da 1849. quadr. di 43. somma di 28. & 15. la somma de' dui quadrati de quali è minore del 1849. in 840. il restante 168. saria minore dell'840. nel 672. detto cioè perche 1009. è minore di 1681. in 672; Et l'istesso 1009. è minore del 1849. in 840. & perciò il 1681. è minore del 1849. nel nel 168. in che sono differenti 672. & 840. ne segue che cauando

do 168. da 840. resti il 672. che restaria a cauare 1009. da 1681. Ma 168. è la differenza de quadrati di 41. & 43. & questa facilmente si troua moltiplicando 84. somma loro per 2. loro differenza, che fa 168 (onde cauando questo 168. da 840. doppio del ducto di 28. in 15. il restante 672. è quello che resta a cauare 1009. somma de quadrati di 28 & 15. da 1681. quadrato di 41. subtensa, cioè conosciamo che a cauare quello in che il quadrato della subtensa è minore del quadrato della somma di dui lati (o vogliamo dire a cauare il ducto della somma de lati, & subtensa, che è il giro del triangolo via la differenza, che è dalla subtensa alla somma di dui lati) dal doppio del ducto de dui lati, cioe 168. da 840. il restante hora 672. è quello che vâ partito per il doppio della base, accioche l'auenimento sia il caso esteriore. Ma l'840. dal quale si caua 168. accioche ne resti il 672. è il ducto del doppio della base nell'altro lato 15. però il doppio di 28. base, cioe 56. in 840. entra 15. volte A. Et perche l'840. si compone da 672. & da 168. a partire ciascuno di questi per 56, & sommare insieme li auenimenti 12. & 3. la somma 15. deue essere il 15. A; trouato ancô a partire 840. per 56. (qual 15. è l'altro lato *C B.*) per il che cauato il terzo auuenimento del 168. partito per 56. da quindici auuenimento dell' 840. partito per 56. il restante dodici deue essere quello, che resulta a partire il 672. per 28. onde per trouare questo 12 *B D.* vediamo, che senza cercare il 672. basta sapere il 168 & questo partitolo per 56. doppio della base (o la mitâ del 168. cioe 84. partitolo per la base) l'auenimento terzo cauarlo dal lato *B C*, 15, che il restante 12. sarâ il caso minore, o esteriore *B D.* Ma il 168. è quello, che si produce a moltiplicare il giro del triangolo via la differenza della subtensa alla somma de dui lati, ô vogliamo dire (adoprando solo la mitâ del 168. cioe 84. da partir poi per la semplice base 28.) Ma l'84. si produce dal moltiplicare la mitâ del giro del triangolo, via la differenza della subtensa alla somma di dui lati, però si può dire breuemente. Dato alcun triangolo ottusangolo, & fatto base vno, delli dui lati minori sopra all' allungamento del quale deuerâ cadere la â lui perpendicolare, che venga dall'angolo oppostoli; per trouare essa perpendicolare, ô altezza del triangolo. Moltiplichisi la mitâ del suo giro, via la differenza, che è dalla subtensa. ô lato maggiore delli tre, alla somma de gli altri dui, & partito poi il prodotto per la base l'auenimento A. si caui dall'altro lato, che con la base contiene l'angolo ottuso, & il restante (che sara il caso esteriore) si giunga ad esso lato detto, & la somma si moltiplichi per l'auenimento R. & del prodotto (che sarà la differenza de quadrati del lato detto, & caso esteriore) si pigli la radice, che ella sara la perpendicolare, o altezza del triangolo, quale moltiplicandola per la mitâ della base (o la mitâ della perpendicolare via la base) il prodotto sara la grandezza del triangolo. Per esempio dato il triangolo ottusangolo di lati 15. 28. 41. posto per base il 15. con esso partiremo 84. ducto di 42. mitâ del suo giro, via 2. differenza di 41. subtensa a 43. somma de gli altri dui lati, che l'auenimento A sara 5. $\frac{3}{5}$, quale cauaremo da 28. (che è l'altro lato continente con la base l'angolo ottuso) & il restante 22. $\frac{2}{5}$, (che è il caso esteriore, o allungamento della base) giongeremo ad esso. 28. & la somma 50 $\frac{4}{5}$. moltiplicaremo con detto auenimento A. 5 $\frac{3}{5}$., che fa 282 $\frac{6}{25}$, del che presa la radice, che è 16 $\frac{4}{5}$. questa è la perpendicolare, o altezza del triangolo. la mitâ del quale, cioe 8 $\frac{2}{5}$. moltiplicandosi per la base 15. il prodotto 126. sara la grandezza del triangolo.

Propositione 13. Theorema 12.

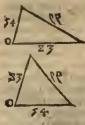
NELLI Triangoli acutangoli il quadrato del lato sottotendente a qual si vogli delli suoi tre angoli acuti è minore della somma delli dui quadrati delli dui lati continenti esso angolo acuto nel doppio del rettangolo fatto dal ducto dell'vno qual si vogli de dui lati continenti esso angolo acuto, & da quella parte d'esso lato, che è verso l'angolo acuto, segata dalla perpendicolare ad esso lato, che li venga sopra dall'angolo oppostoli nel Triangolo.

Sia il Triangolo acutangolo a b c, & inteso vno quali si vogli de suoi angoli acuti poniamo il c; si dice che il quadrato del lato sottotendente (o vogliamo dire opposito) ad esso angolo, cioè il quadrato del lato a b, è minore della somma delli dui quadrati delli dui lati a c, b c continenti detto angolo acuto c. in quanto importa il doppio del ducto d'vno delli dui lati continenti l'angolo c, cioè poniamo del lato b c in quella sua parte verso l'angolo c, cioe nella parte c d, che è segata dalla a lui perpendicolare a d, che le viene dall'angolo oppostoli a, ouero preso l'altro lato a c (delli dui continenti detto angolo c) & dall'angolo b, oppostoli, tiratali la perpendico-

lare b r; si dice che il quadrato del lato a b. opposto all'angolo istesso e, è minore della somma de dui quadrati delli lati a c, b e, continenti esso angolo e, in quanto importa il doppio del dutto del lato a e (hora inteso base) sopra al quale cade la perpendicolare b r, nella sua parte r c, che è verso l'angolo detto e. Per dimostrar lo nel Triangolo a b c, presa per base la retta b c, & intesa diuisa dalla perpendicolare a d. nelle due parti b d. & d c, ne segue per la settima propositione) che il quadrato d'essa b e, insieme con il quadrato della sua parte d e (congiunta, o dalla banda dell'angolo acuto c) sono eguali al doppio del dutto della istessa parte d c, nella totale linea b c, insieme con il quadrato dell'altra par b d, onde a ciascuna banda giungendo comunemente il quadrato della perpendicolare a d, haueremo li tre quadrati di b c, e d, & a d, eguali al doppio del dutto di e d nella b c, insieme con li dui quadrati di b d, & a d; ma da vna banda in vece delli dui quadrati di d c, & d a, posto il solo quadrato di a c, alla somma loro eguale, & dall'altra banda in vece delli dui quadrati di b d a d, posto il solo quadrato di a b, alla somma loro eguale, haueremo poi il quadrato di b c, con il quadrato di a c, eguali al doppio del dutto di d c, nella b c, cō il quad. di b a; onde il solo quadrato di b a. viene ad essere tanto minore della somma delli dui quadrati di b c, & a c, in quanto importa il doppio del dutto della b c, nella sua parte c d, cioe il quadrato del lato a b opposto all'inteso angolo acuto c, è minore della somma delli quadrati delli dui lati continenti esso angolo acuto c, ò vogliamo dire è minore della somma delli quadrati della base b c, & del lato a c, che con essa contiene detto angolo acuto c. in quanto importa il doppio del dutto d'essa base b c, nella sua parte c d, che è dalla banda d'esso angolo acuto c, che e quello che si voleua dimostrare. Et se haueßimo fatto base il lato a c, similmente il doppio del dutto di questa base a c, nella sua parte r c, saria quello in che il quadrato del lato a b opposto a detto angolo acuto c. sarebbe eeceduto dalla somma de quadrati di essa base a c, & lato c b, continenti detto angolo acuto c, il che si dimostraria nel medesmo modo sopradetto. Similmente se haueßimo inteso l'angolo acuto b & fatto base vno de dui lati a b, ouero b c, continenti esso angolo b pure si dimostreria nel medesmo modo che il quadrato del lato a c, opposto ad esso angolo acuto b, è minore della somma de quadrati dell'altro lato sinistro, & della base, nel doppio del dutto della base, nella sua parte b d che è dalla banda dell'istesso angolo acuto b. Et cosi anco se pigliassimo l'altro angolo a, il quadrato del lato b c, oppostoli si dimostreria essere minore della somma de dui quadrati dell'altro lato, & base (presa per base qual si uogli delle due rette continenti detto angolo a) nel doppio del rettangolo della base, & parte d'essa segata dalla à lei perpendicolare nel triangolo, che è dalla banda del detto angolo a.

Di qui si può estrahere il modo di trouare le parti della base segate dalla à lei perpendicolare che dentro del Triangolo le vien sopra dall'angolo opposto. i (sia mò esso angolo oppostoli di Triangolo acut'angolo, cioe anc'egli acuto(come conuiene che sia acuto ciascuno delli dui angoli alla base, acciòche la perpendicolare vicada sopra dentro del Triangolo) ò sia retto essendo il Triangolo rettangolo, ò sia ottuso essendo il Triangolo ottusangolo) & è che si caui il quadrato d'vno delli dui lati poniamo del lato destro dalla somma de quadrati dell'altro lato, & della base, & il restante si parta per il doppio della base, che l'auenimento(ò la mità dell'auenimento, quando il restante detto si partisse per la semplice base, che anco si può partire la mità del restante detto; per la simplice base, & ne risulta l'istesso) sarà la parte d'essa base che è fra la perpendicolare, & l'angolo opposto al lato destro detto, il quadrato del quale si è cauato dalla somma de gli altri dui quadrati. Onde se nel Triangolo a b c, di base b c 14. & lati a b 13. & a c 15. preso il lato a b 13. cauaremo il suo quadrato 169 da 441. somma di 196. quadraro della base, & di 225. quadrato dell'altro lato a c. & il restante 252. partiremo per la base 14 che ne viene 18. la sua mità 9. sara la parte d c della base che è fra la perpendicolare a d. & l'angolo c opposto al preso lato a b. Et se pigliaremo il lato a c 15 cauando il suo quadrato 225. dalla somma 365. di 196. quadrato della base, & 196. quadrato dell'altro lato a c. & il restante 140. partiremo per la base 14 che ne viene 10 la sua mità 5. sara la parte b d della base che è fra la perpẽdicolare a d. & l'angolo a, opposto al preso lato a c. Et nel medesmo modo fatto base quale altro lato si vogli, si potrà trouare ciascuna parte d'essa, cioe il caso destro, & sinistro; benche trouatone vno il restante poi della base è l'altro. Trouati i casi si troua poi la perpendicolare, o altezza del Triangolo come si è detto nella antecedente propositione, cioe si caua il quadrato del calo minore

nore dal quadrato del lato minore, ouero che resulta l'istesso, si caua il quadrato del caso maggiore dal quadrato del lato maggiore, che il restante è il quadrato della perpendicolare; onde la radice d'esso restante è la perpendicolare, ò altezza del Triangolo. Che preso poniamo il triangolo a b c di lati 13.& 15.& base 14. hauendo trouato il caso maggiore vicino al lato maggiore essere 9. Et il caso minore vicino al lato minore essere 5. Cauando noi il quadrato di 5. dal quadrato di 13. cioe 25. da 169. ouero cauando il quadrato di 9 dal quadrato di 15. cioe 81. da 225. il restante 144. sarà il quadrato della perpendicolare a r. però la radice d'esso 144. cioe 12. sarà questa perpendicolare, o altezza a r. Ma se adoprando al nostro solito il discorso naturale vero strumento delle Inuentioni, considereremo che il cauare 25. da 169. ouero 81. da 225. che in ciascun modo resta 144. ci mostra che tanto è differente 25. da 169. quanto 81. da 225; conosceremo anco che permutando tanto è differente 25. da 81. quanto 169. da 225. il che anco vedremo potersi dimostrare così. Inteso l'81. diuiso in 25. *B.* eguale al 25. A. & in 56. che gli resta, se così al 25. *B.* come al 25. A. giongeremo vn medesmo 144. alla somma dall'A. sara eguale la somma dal *B.* & siano R 169. & S 169 se mò non mouendo la somma R 169. dell'A. giungeremo alla somma S 169 dal B il 56. & se ne facci T sapremo il composto T 225. di S 169. & 56. essere anco maggiore del R 169. in questo 56. aggiunto all'S. ma nel medesmo 56. è maggiore l'81. del 25. A. però tanto è maggiore 225. di 169. quanto è 81. di 25. cioe tanto è maggiore il quadrato del caso piu lungo del quadrato del caso piu corto, quanto è anco maggiore il quadrato del lato piu lungo (che e il T 225.) del quadrato del lato piu corto come si voleua mostrare. Questo auertito facilmente trouaremo i casi nel triangolo che preso il triangolo a b c di base 14.& lati 13.& 15. sapendo, che la differenza de quadrati de casi è la istessa, ò vogliamo dire eguale alla differenza de quadrati de dui lati, noi trouata quella de lati, hauetemo anco quella de casi, ma quella de lati si troua facilmente moltiplicando la somma de lati via la differenza loro, cioè hora la somma di 13.& 15. che è 28. via 2. differenza d'essi 13.& 15. che fa 56. che è la differenza di 169. a 225. quadrati de lati 13.& 15. è anco la differenza de quadrati de casi b r, r c, in questo triangolo, & perche questo 56. si produce del moltiplicare la somma de casi, cioe hora 14 base, via la differenza d'essi, partendo noi il 56. per 14. somma l'auenimento 4. sara la differenza de casi, perilche cauata la da 14. somma che resta 10. la sua mità 5. sarà il caso minore b r, contiguo al lato minore 13.& il restante 9 della base sara il caso maggiore r c, continguo al lato maggiore 15. Et perche la somma S di due quantità A, & B è sempre maggiore della differenza loro D. partendo il prodotto P della somma S via la differenza D. per l'vna S ne verrà l'altra D. che partendo esso prodotto P per l'altra D. ne verria l'vna S. Si vede che quando partendo il prodotto P di due quantita per l'vna d'esse producenti l'auenimento che è l'altra, sara minore del partitore, conosceremo l'auenimento minore essere la differenza delle due producenti, & il partitore essere la somma, ma quando l'auenimento fusse maggiore del partitore, conosceremo l'auenimento maggiore essere la somma. & il partitore la differenza delle due quantità producenti; onde quando a partire la differenza de quadrati di dui lati d'alcun Triangolo dato, & però la differenza de quadrati delli dui casi, per la base l'auenimēto sia minore della base partitore (come di necessità sempre auuiene nelli triangoli acut'angoli, perche ciascuna delle tre perpendicolari cade dentro al triangolo fra i dui lati, & anco auuiene nelli triangoli rettangoli, & ottusangoli, quando la base è la retta opposta all'angolo retto, & all'ottuso, che perciò ciascuno delli dui angoli alla base è acuto) all'hora l'auenimento è la differenza de casi, & la base è la somma de casi. Ma quando l'auenimento fosse eguale alla base partitore, & perciò la somma de casi fusse eguale alla loro differenza, che cauata la differenza dalla somma, & del restante niente presa la mità che saria niente, questo niente saria il caso minore (essendo il resto della somma loro il caso maggiore) all'hora si conosceria non vi essere caso minore, & però il maggiore saria eguale alla bae, cioe occuparia la base totale & però il lato minore delli dui sarebbe egli la perpendicolare, & l'angolo fatto da esso lato, & base saria retto. Et quando l'auenimento fusse maggiore della base partitore, all'hora quest'auenimento saria la somma de casi, & il partitore, cioe la base, saria la differenza loro, che cauata dalla somma auenimento detto la mità del restante saria il caso minore, ouero giunto la mità della somma alla mità della differenza il composto saria il caso maggiore; Et così il caso minore saria fuori del Triangolo, & il caso maggiore occuparia tutta la base, & anco il caso minore, cioe saria composto dalla base, & dal caso minore, onde di necessità la perpendicolare caderia fuori del triangolo dalla banda del lato minore delli dui, qual lato minore insieme con la base formaria nel triangolo lo angolo ottuso, & la perpendicolare caderia sull'allungamento della base; doue terminessero da quella banda così il caso minore, che saria l'allungamento della base, come il caso maggiore,

composto

composto da esso caso minore, & dalla base. Di qui anco potiamo hauer modo di conoscere se vn triangolo di lati noti sia acutangolo, o rettangolo, ouero ottusangolo, cercando la qualità dell'angolo opposto al piu lungo lato, che gli altri dui opposti al lato mezano, & al piu corto sono necessariamente acuti; perche essendo il maggiore angolo nel triangolo quello, che è opposto al lato piu lungo, s'egli sara acuto, tanto maggiormente ciascuno delli altri dui minori di lui saranno acuti, ma s'egli sara retto, perche la somma de gli altri dui è vguale ad vn'altro retto (che tutti tre sono eguali a dui retti) ciascuno d'essi sara acuto; Et s'egli sia ottuso la somma de gli altri dui, che è il restante a dui retti sara manco d'vn retto, & perciò ciascun d'essi sarà acuto; Hora per conoscere la qualità di quest'angolo, opposto al piu lungo lato, noi pigliaremo per base, vno de gli altri dui lati a beneplacito, & con essa base intesa partitore, partiremo la differenza de quadrati de gli altri dui lati (che è quel numero che nasce a moltiplicare la somma di essi dui lati via la differenza loro) & l'auenimento se sia minore della base, egli sara la differenza de casi, & però la perpendicolare cadera dentro al Triangolo fra i dui lati, & ciascun d'essi cō la base formara angolo acuto, & perciò quello che è opposto al piu lungo delli tre lati sara angolo acuto, & il triangolo verrà ad essere acutangolo. Ma se l'auenimento detto sia maggiore del partitore base, all'hora esso auenimento sara la somma de casi, & la base sara la differenza loro, & perciò il caso minore sara fuori del triangolo, & la perpendicolare similmente caderà fuori del triangolo, per il che l'angolo fatto dalla base, & dal lato minore delli dui dalla banda della base, doue comincia l'allungamento, ò caso minore sara ottuso, & consequentemente il triangolo sara ottusangolo; Che se l'auenimento detto fusse eguale alla base, all'hora la base istessa saria la somma, & anco la differenza de casi, che cauato la differenza dalla somma restaria niente, la mità del qual niente, cioe pur niente saria il caso minore, onde il lato piu corto saria perpendicolare alla base, che così il quadrato della base saria la differenza de quadrati delli dui lati, cioè la somma del quadrato della base, & quadrato del lato minore saria eguale al quadrato del lato maggiore, però l'angolo contenuto dalla base, & lato minore saria retto, & il triangolo saria rettangolo. Per essempio dati li lati d'vn triangolo 65. 72. 97. per vedere se l'angolo opposto al lato piu lungo 97. sia anc'egli acuto, come sono gli altri dui, ò retto, ò ottuso; Preso per base vno de gli altri dui lati poniamo il 72. con esso partiremo 5184. differenza de quadrati di dui lati, cioe il num. che nasce a moltiplicare 162. somma di 65. & 97. via 32. differenza di detti 65. & 97. che l'auenimento è precise 72. eguale al partitore, onde esso 5184 è il quadrato della base, & però si vede la base essere la somma, & anco la differenza de dui casi, cioe non vi essere caso minore, ma solo il caso maggiore, che è la base istessa, & però il lato 65. essere perpendicolare alla base, & l'angolo r, essere retto; L'istesso si vedrebbe facendo base il lato 65. che la differenza de quadrati de gl'altri dui lati 72. & 97. cioe il dutto di 169. in 25. somma, & differenza loro, che è 4225. partito per 65. base l'auenimento è 65. base istessa, onde il lato 72. è la perpendicolare, & l'angolo R è retto.

Et d'vn'altro triangolo essendo i lati 54. 83. 99. per conoscere la qualità dell'angolo O, opposto al lato piu lungo 99. fatto base vno de gl'altri dui lati, & sia l'83. con esso partiremo 6885. dutto di 153. in 45. (somma, & differenza di 54. a 99.) che ne viene 82 $\frac{7}{8}\,\frac{9}{3}$, il che essendo minore della base, sarà egli la differenza de casi, essendo perciò la base maggiore la somma de casi onde la perpendicolare caderà dentro al triangolo, & perciò l'angolo O, sara anc'egli acuto; & il triangolo sara acutangolo; & qui il caso minore sara $\frac{}{8}\,\frac{2}{3}$. restando il maggiore 82 $\frac{8}{8}\,\frac{1}{3}$. & la perpendicolare sara radice 2915 $\frac{6}{9}\,\frac{8}{8}\,\frac{8}{8}\,\frac{5}{9}$. Et se hauessimo preso per base il 54. con essa partendo 2912. dutto di 182. somma de lati via 16. loro differenza l'auenimento 53 $\frac{2}{2}\,\frac{5}{7}$. perche è minore della base 54. ci mostraria che la base è la somma de casi, & perciò la perpendicolare cade dentro al triangolo, & l'angolo O è acuto; il caso minore saria $\frac{}{2}\,\frac{1}{7}$. & la perpendicolare radice 6888 $\frac{7}{7}\,\frac{2}{2}\,\frac{8}{9}$.

D'vn'altro Triangolo poi essendo i lati 71. 87. 113. per conoscere la qualità dell'angolo r opposto al più lungo lato 113, noi similmente fatto base vno de gl'altri dui lati, poniamo l'87. cō esso partiremo 7728. differenza de quadrati de dui lati, & ne viene 88. $\frac{2}{2}\,\frac{4}{9}$, quale perche è maggiore della base partitore sarà egli la somma de casi, essendo la base la differenza d'essi, & l'angolo r, sarà ottuso cadendo la perpendicolare fuori del triangolo, & essendo 1 $\frac{2}{2}\,\frac{4}{9}$. il caso minore fuori della base. Che se pigliassimo per base il 71. & con esso si partisse 5200. differenza de quadrati de lati 87. & 113, l'auenimento saria 73 $\frac{1}{7}\,\frac{7}{3}$, che è maggiore della base, però essa

sarà

sarà la differenza de casi, essendo l'angolo r ottuso,& cadendo la perpendicolare fuori del triangolo, che il caso minore sara $2 \frac{7}{7}$.

Dalla cognitione de casi, come si è detto si viene in cognitione della perpendicolare, & mediante essa perpendicolare,& base si viene in cognitione della grandezza del triangolo, che essa grandezza è il prodotto,che nasce a moltiplicare la mità della base, con la perpendicolare. Ouero la mità della perpendicolare via la base, ouero è la mita del prodotto,che nasce a moltiplicare la perpendicolare via la base; Perche inteso il triangolo a b e, di base b e, & altezza, ò perpendicolare a n, & dalli estremi b, & e. della base erettcli le perpendicolari b r, e d, eguali ciascuna d'esse alla perpendicolare a n, & tirata la r d,che sara equidistante alla b e, & passarà per la cima a, perche cosi il paralelogrammo r b e d, come il triangolo a b e; faranno constituiti sopra vn istessa base b e, & fra medesme paralelle b e, r d; sappiamo il paralelogrammo essere doppio del triangolo,ma la grãdezza del paralellogrammo rettangolo è il dutto della sua lunghezza b e, che è anco base del triangolo via la sua larghezza b r, che è anco eguale all'altezza a n, del triangolo, però tanto resulta a moltiplicare la base del triangolo via la sua perpendicolare, quanto la lunghezza del paralellogrãmo via la sua larghezza, ma perche il triangolo è la mità del paralelogrammo, conuiene della grandezza del paralellogrammo, cioe del dutto della lunghezza via la larghezza, cioe del dutto della base del triangolo,via la sua perpendicolare pigliando la mità,che ella sara la grandezza del triãgolo,come si è detto. Et perche di due quantità altezza, & base tãto resulta a moltiplicare l'vna via la mità dell'altra,quãto a moltiplicar l'vna via l'altra intieramente,& del pdotto pigliar la mita,di qui è,che anco moltiplicãdo la ppendicolare via la mita della ba, ouero la base via la mita della perpendicolare in ciascuno d'essi modi il prodotto è la grãdezza del triangolo.

Di qui mò si conosce come si possa trouare la grandezza di qual si vogli superficie rettilinea, perche diuidendosi ella in triangoli,& trouando la grandezza di ciascun triangolo, mediante la cognitione della sua base, & della perpendicolare, trouando essa perpendicolare, o mediante la notitia de suoi lati, ò misurandola manualmente; posse poi insieme, o sommate le grandezze di tutti i triangoli,la somma sara la grandezza del rettilineo totale; Del che per non fare maggior scrittura, qui non darò altro essempio, ne meno come in altri modi si possa trouare la grandezza de triangoli; Et in altri modi ancora misurare, ò trouare la grandezza delle figure rettilinee, & di altre considerationi intorno al modo del misurare delli Agrimensori ordinarij, come si vede nella mia opera dell'Algebra applicata.

Si può hora anco notare, che dati dui numeri poniamo 5.& 13. i quadrati 25. & 169. de quali sono differenti in 144. noi mediante questa 13. Propositione potiamo trouare quante altre coppie de numeri vorremo, i quadrati de quali saranno differẽti nel medesmo 144. Et il modo è, che supposto, ò imaginati, li dui numeri dati 5.& 13.essere lati d'vn triangolo a beneplacito, & posto per sua base, qual num. si vogli (purche sia minore della somma 18. de dui num. dati acciò si possa formar vn triangolo) si trouino i suoi dui casi che essi saranno dui numeri quadr. de quali saranno differenti nell'istesso num. 144. che sono differenti i dui dati, perche già sappiamo nelli triangoli auenir sempre che la differenza de quadrati de dui casi è eguale alla differenza de quadrati de dui lati; Auuertendo nondimeno di non pigliar per base del triangolo il numero hora 12. che è rad. del 144.differenza de quadrati del 5.& 13. dati, perche allhora non vi saria caso minore, poiche la base 12.& lato minore 5.formariano angolo retto.

Propositione 14. Problema 2.

Potiamo formare vn quadrato eguale ad vn Rettilineo dato.

Sia dato il Rettilineo A per formare vn quad.ad esso eguale,noi per per la 45. del primo formaremo vn paralellogr. retangolo eguale ad esso rettilineo cioe diuiso il rettilineo in triangoli, che il minor num. d'essi triangoli sara quanto è il numero che resta a cauare 2. del numero delli lati del rettilineo) & ridotto ciascun d'essi triangoli a paralellogr. rettangolo di tutti essi, poi formaremo vn solo paralellogrãmo rettangolo, che habbi per vn lato vno delli lati di qual ei piaccia dalli formati, ouero habbi quale altra linea presa si vogli (per la 47. del 1.) con l'andare giungendo di mano in mano l'vn paralelogrãmo rettangolo all'altro, formandolo sul lato della antecedente somma, che è eguale alla linea presa fin che si habbi ridotto il cõposto di tutti loro in vn solo paralelogrammo rettangolo) & sia tale paralelogrãmo rettangolo, eguale al rettilineo

dato, il è n r ſ. Hora allungato l'vn ſuo lato c ſ fino in R, all'egualità dell'altro ſuo lato angolare ſ r, cioe fatto l'allungamento S R eguale al lato ſ r, ſopra alla totale c R, preſo per diametro ſi formi vn mezo cerchio, cioe ſi diuida la c R, in due parti eguali, & ſia in o, & fatto o centro, & ſemidiametro c o, ouero o R, ſi formi il mezo cerchio c t, R, & dal punto ſ al diametro c R ſ, ſi tiri la perpendicolare ſ t, fino alla circonferenza, ò vogliamo dire ſi allunghi il dato r ſ, dentro al ſemicircolo fino che peruenghi alla circonferenza, & ſia in t, che queſta ſ t, ſarà il lato del quadr. eguale al paralelogrâmo rettâgolo n ſ, & però al retti lineo dato A. Dimoſtratione. Inteſa la retta c R diuiſa in due parti eguali in o, & in due parti ineguali in ſ, il dutto delle due parti ineguali c ſ ſ R, inſieme cô il quad della ſ o poſta fra le ſettioni ſara (per la 5. propoſ.) eguale al quad. della mita d'eſſa retta c R, & però al quadr. della o t, eguale alla mita d'eſſa c R inteſa tirata dal cêtro o, al punto t, ma all'iſteſſo quadrato di o t, ſono eguali ancora, per la 47. del primo, li dui quadrati di ſ o, ſ t, però il dutto di c ſ in S R, cioè il rettangolo n ſ, inſieme con il quadrato di ſ o, ſono eguali alli dui quadrati di ſ o, ſ t, onde leuato da ciaſcuna banda il commune quadrato di ſ o, ne ſegue, che il rimanente rettangolo n ſ ſia eguale al rimanente quadrato di ſ t, ma al rettangolo n ſ è eguale dalla conſtruttione il rettilinio A, però al medeſimo rettilinio A. ſara eguale il quadrato della retta ſ t, come ſi voleua fare.

Di qui ſi conoſce, che nel diametro d'vn cerchio preſo vn punto doue ſi vogli, diuidendo eſſo diametro in due parti, & di li ad eſſo diametro tirato, ò eretta vna perpendicolare, che arriui alla circonferenza del cerchio, il quadrato d'eſſa perpendicolare ſarà eguale al dutto delle due parti, nelle quali eſſo diametro viene ad eſſere diuiſo, che habbiamo veduto, che dal punto ſ. ſegnato nel diametro c R, eretta fino alla circonferenza ſa ſ t, perpendicolare ad eſſo diametro, il quadrato di queſta ſ t è eguale al rettangolo delle due parti c ſ, S R, nelle quali eſſo diametro in detto punto S viene diuiſo.

Con minor figura ancora potremo trouare il lato del quadrato eguale al noſtro rettangolo n ſ, coſi, Preſa la ſola lunghezza c ſ del rettangolo come diametro ſe li formi ſopra vn mezo cerchio, & inteſo vno delli dui eſtremi del diametro, & ſia S da eſſo ſi ſegni in detto diametro la S R eguale alla lunghezza ſ r, del rettangolo, & da queſto punto R ſi erga al diametro c ſ fino alla circonferenza la perpendicolare R t, & dal punto t, doue ella peruiene alla circonferenza ſi tiri fino all'inteſo punto ſ. la retta t ſ. che eſſa ſara il lato del quadrato eguale al noſtro rettangolo n ſ; ò vogliamo dire il rettangolo di c ſ in S R. Perche inteſa la retta, o diametro, c ſ diuiſo in due parti in R, ſappiamo per la terza propoſitione, che il dutto di tutta eſſa c ſ, nella ſua parte R ſ è eguale al quadrato della iſteſſa parte R ſ giunto al dutto della medeſma parte R ſ nell'altra parte R c, ma al dutto di eſſe parti R ſ, R c è eguale, come ſi è dimoſtrato di ſopra, il quadrato di R t, onde in vece del dutto d'eſſe parti R ſ, R c poſto il quadrato di R t. ſapremo che al quadrato di R t, inſieme con il quadrato di R ſ, è eguale il rettangolo, o dutto di tutta la c S, nella parte R ſ; ma alli medeſimi dui quadrati di R t, R ſ, è eguale (per la 47. del primo) il ſolo quadrato di ſ t, però ne ſegue che queſto quadrato di ſ t ſia anc'egli eguale al rettangolo di c ſ, in R ſ, che è il noſtro rettangolo n ſ fatto eguale al dato Rettilineo A.

In pratica d'vn rettangolo dato, moltiplicando la lunghezza via la larghezza, & del prodotto pigliando la radice quadra, ella ſara il lato del quadrato eguale a detto rettangolo dato, che ſe la lunghezza ſara 18. & la larghezza 8, il prodotto è 144. la radice del quale è 12. però 12. è il lato de quadr. eguale al rettangolo, che ſia lungo 18. & largo 8. che ciaſcun d'eſſi è di ſuperficie 144. Et ſe la lunghezza ſia 12. & la larghezza 9. la ſuperficie, o dutto di 12. in 9. ſarà 108. che la ſua radice è radice 108. ne ſi può eſplicare preciſe in humero rationale, ma ſi bene propinquo al vero che ſara $10\frac{4}{10}$, ma nô arriuarà a $10\frac{4}{10}$, ò vogliamo dire $10\frac{2}{5}$, potiamo bene trouare altri numeri in infinito, che ſarâno manco ſcarſi di $10\frac{4}{10}$, & altri che ſarâno manco eccedenti del $8\frac{1}{2}$, ſe vorremo accoſtarci di mano in mano più al vero che peruenire alla preciſione è impoſſibile che (perche 108 è numero non quadrato) vſando modi facilliſſimi moſtrati nel noſtro particolare trattato della radice quadra. Si potria anco formare vn quadrato, ò trouare il lato del quadrato

drato eguale ad vn rettilineo dato cosi. Diuiso il rettilineo dato in Triangoli, trouisi il lato del quadrato eguale di mano in mano a ciascuno di loro, cioe ridotto il Triangolo a paralellogrammo rettangolo, si troui il lato del quadrato eguale ad esso paralelogrammo rettangolo, nel modo mostrato di sopra, che cosi hauendo tanti lati di quadrati quanto sara il numero delli triangoli, nelli quali sia diuiso il rettilineo dato, noi poi trouaremo il lato Q del quadrato, che sia eguale a tutti li quadrati d'essi lati (nel modo mostrato doppo la propositione 47. del primo libro) che esso lato Q sara anco il lato del quadrato eguale al dato rettilineo A.

In alcuni Comentatori si troua nel fine di questo secondo Libro vna propositione operatiua, cioe vn problema, che dice. Proposti dui quadrati come si voglino intorno all'vno d'essi si può descriuere vno Gnomone eguale all'altro; Ma noi generalmente diremo.

eguale al rettilineo dato.

Proposto vn quadrato, si può intorno ad esso discriuere vno Gnomone eguale ad vn rettilineo dato.

Per farlo. Riduceasi il rettilineo dato a quadrato, cioe si formi vn quadrato eguale ad esso rettilineo, per l'antecedente propositione, & sia il suo lato la retta r f. poi si troui il lato del quadrato eguale alla somma di questo, & del quadrato proposto, cioe allungato vn lato del proposto, & sia l'a r, fino che l'allungamento sia eguale alla r f. (lato del trouato eguale al rettilineo dato) si tiri poi dal superior punto n, del lato del proposto, che fa angolo, & è retto, con l'allungato a r, in r, principio dell'allungamento al punto f, che è l'altro estremo dall'allungamento la retta n f, che ella sara il lato del quadrato eguale alli dui proposto, cioe, & R, di lati n r, r f, (per la 47. del primo) & perciò essa retta n f. sarà piu lunga di ciascuna delle due r f, r n; hora allungato il lato r a. In g. & l'r n, in b, si che r g, & anco r b, sia eguale alla n f, & compito il quadrato r g i b, intorno al proposto a n, esso quadrato sara eguale alli dui, che sono il proposto, & l'R, cioe al proposto, & al rettilineo dato, onde inteso cauatone il quadrato proposto il restante Gnomone a e n b i g sara eguale al rettilineo dato, & cosi intorno al quadrato proposto si sarà descritto lo Gnomone detto eguale al rettilineo dato, come si voleua fare.

Il fine del Secondo Libro.

DEGLI ELEMENTI DI EVCLIDE

Libro Terzo.

N questo Terzo Libro trattando delli Cercoli doppo le Diffinitioni pertinenti ad essi. & parti loro con gli angoli loro, & formati dentro a loro, & della contingentia de Cerchi fra loro, & con linee rette, & della equale, ò ineguale distanza del centro delle rette poste nel Cerchio; si vien poi a mostrare come si troui il centro d'vn Cerchio; Della diuersa lunghezza delle line, che da vn punto preso nel diametro del Cerchio peruengono alla circonferenza, & di quelle, che vi peruengono da vn punto segato fuori del Cerchio; Del segarsi, & toccarsi i Cercoli fra loro, Della qualità de gli angoli fatti dalla circonferēza del Cerchio con il suo diametro, & linea contingente il Cerchio, che è perpendicolare ad esso diametro; Come si tiri da vn punto dato vna retta contingente, ò toccāte vn cerchio proposto; Della qualità de gli angoli del centro, & della circōferenza, & delli fatti nelle portioni del Cerchio; De gl'angoli delli Quadrilateri descritti nel Cerchio, Come mediante vna data portione di Cerchio si troui il Cerchio totale, Come si diuide vn dato arco in due parti eguali, Della qualità de gl'angoli fatti in diuerse portioni del Cerchio, Come si formi vna portione di Cerchio sopra ad vna data retta, che riceua i angoli eguali ad vn'angolo dato, Et anco come da vn cerchio si seghi vna portione, che riceua angoli eguali ad vn'angolo dato; Della egualità delli rettangoli delle due parti delle linee, che si segano fra loro nel Cerchio; Et finalmente della egualità del quadrato della toccante il Cerchio al rettangolo della segante, & sua parte esteriore.

Diffinitione Prima.

LI Cerchi si dicono essere eguali tra loro, quando li diametri, ò semidiametri loro sono eguali, ma maggiori quelli, che hanno i diametri, ò semidiametri più lunghi, & minori quelli, che gli hanno piu corti.

Diffinitione Seconda.

VNA linea retta si dice toccare vn cerchio quando lo tocca in tal luogo, o vogliamo dire in tal modo che allungādola da qual si uogli parte ella prolungata non sega il cerchio, come la retta a b. che toccando il cerchio R nel punto b, & prolungandola in c, ò doue si vogli essa a c, resta tutta fuori del cerchio, si dice ella toccare il cerchio. Ma la d o, che arriuando alla circonferenza in o, perche prolungata in n, questa d n, sega il cerchio ella non si dice toccante, ma si chiamarà segante, o che sega il cerchio.

Diffinitione Terza.

QVelli cerchi si dicono toccarsi insieme, quali toccandosi fra loro non si segano.

Come li dui cerchi a, & b, si dicono toccarsi insieme in c; perche in alcun luogo non si possono segare, & così li o, & B in r. Ma li dui cerchi r, & s, che si segano in t, & u, non si dice, che si tocchino insieme, ma sì bene, che si segano.

Diffinitione Quarta.

DElle linee rette in vn cerchio, tirando le perpendicolari ad esse dal centro quelle le perpendicolari, delle quali siano eguali fra loro si dicono egualmente distare, ò essere lontane dal centro, ma quella che hauesse, maggiore, ò piu lunga perpendicolare si dirà essere

pendicolari ad esse dal centro quelle le perpendicolari, delle quali siano eguali fra loro si dicono egualmente distare, è essere lontane dal centro, ma quella che hauesse maggiore, ò piu lunga perpendicolare si dirà essere piu lontana dal centro che quella, della quale la perpendicolare fosse piu corta, che questa si dirà essere manco lontana dal centro.

La distanza, che è da vn punto dato ad vna linea proposta si dice essere quella linea, che viene alla proposta perpendicolarmente partendosi dal pũto dato, perche ella è la piu breue linea, che partendosi dal punto dato possa arriuare alla linea proposta, come per esempio dal punto a, alla retta b e, tirando le rette a r, a s, a t, a n, fra le quali la a r, sia perpendicolare ad essa b e, questa a r, si dirà essere la distanza, che è del punto a, alla retta b e, & essa a r è piu corta di qual si uogli dell'altre, quali anco vengono ad essere di mano in mano più lunghe, si come di mano in mano (o da vna banda della a r, verso b, ò dall'altra verso e (ella si venghino allontanando dal punto r. della perpendicolarità, che considerato il triangolo a r s, il lato a s, opposto all'angolo retto r, è maggiore che il lato a r; opposto all'angolo s, acuto minore del retto, & considerato il triangolo rettangolo a r t, & anco l'a r s, che la base r t, dell'vno è piu lunga della base r s. dell'altro ancora il quadrato di r t sara piu grande, o maggiore del quadrato di r s, per il che a ciascuno d'essi, giunto il quadrato dell'altezza, o perpendicolare a r, ancora la somma delli dui quadrati di r t, & r a; cioe il quadrato di a t, sara maggior della somma delli dui quadrati di r s, r a; cioe del quadrato di a s. onde ancora la retta, o lato a t, sara piu lunga della retta, o lato a s. Et nell'istesso modo concluderemo, che la a r, è piu lunga della a t; & cosi seguendo se oltre alla a n, si tirasseio altre linee su la r b, allungata quanto occorresse. Hora nel Cerchio essendo intese le rette a b, & m g; & ad esse dal centro e, tirate le perpendicolari e n, e o, quando queste e n, e o; siano eguali fra loro si dice le rette dette a b, m g; essere egualmente distanti, ò egualmente distare dal centro, perche le loro distanze dal centro sono le a loro perpendicolari e n, e o. Et intesa nel medesimo cerchio la retta r s. & dal centro tiratiui la perpendicolare e u, che è la sua distanza dal centro, quando ella sia piu lunga della e n (o della e o,) si dirà detta r s distare più dal centro che non fa la a b, ouero la m g.

Diffinitione Quinta.

Segmento, o parte di Cerchio, o portione di Cerchio si chiama quella figura, che è contenuta da vna linea retta, che sega il Cerchio, & da vna parte della circonferenza da lei segata o sia maggiore, o minore della mità della circonferenza, qual parte della circonferenza si chiama arco, & la retta detta si chiama corda.

Come nel Cerchio a c b d, tirata la retta a b, che sega esso Cerchio, & la circonferenza in due parti ineguali (che se fossero eguali ciascuna d'esse si diria mezocerchio, & la retta segante saria diametro del Cerchio) ciascuna d'esse due parti si chiama segmento, o portione di Cerchio, la più grande portione maggiore, & la più piccola portione minore ciascuna delle quali è contenuta da due linee che sono la retta a b. che si chiama corda, & la curua a c b in l'vna portione che si chiama arco, come anco l'altra curua circonferentiale a d b nell'altra portione, che similmente si chiama arco.

Diffinitione Sesta.

Angolo della portione si chiama in essa portione quello, che è cõtenuto dalla corda, & dall'arco, come nella portione a c b, angolo della portione, si chiama l'angolo c a b, ouer il c b a, cõtenuto dall'arco d'essa, & dalla corda a b, per il che esso angolo della portione, o del segmento è curuilineo essendo contenuto da vna linea curua, & da vna retta.

Diffinitine Settima.

Angolo nel segmento, o nella portione è quell'angolo rettilineo che è fatto da due rette, quali partendosi dalli dui termini della corda d'esso si congiungono insieme in qualsiuogli punto segnato nell'arco di essa portione. Come nell'arco della portione a c b segnato il punto c, &

ad esso dalli dui termini a, & b della corda tirate le due rette a c, b c l'angolo a c b da loro formato si chiama angolo nella portione, ò vogliamo dire angolo in essa portione a c b.

Diffinitione Ottaua.

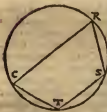
NEl cerchio preso vn pezzo d'arco, & dalli dui termini d'esso ad vn punto segnato, doue si vogli nella circonferenza opposta tirando due linee rette, l'angolo da loro formato nel punto segnato si dice stare sopra all'arco, ò hauere per base l'arco preso. Come nel Cerchio a b c n, preso l'arco a n b, & dalli suoi dui termini a. & b al punto c, segnato nella opposta circonferenza a c b, tirare le due rette a c, c b, che formano nel punto c. l'angolo a c b, egli si dice stare sopra all'arco a n b, ò hauer per base l'arco a n b, sopra i termini a, & b, del quale egli posa.

Diffinitioni Nona.

QVando dal centro del cerchio a dui punti segnati nella circonferenza si tirino due rette, ò semidiametri, che nel centro faccino angolo, esso angolo si dice, ò si chiama angolo del cētro, ò nel centro, & ha per base l'arco, ò parte di circonferēza che è fra i dui punti segnati; Et quel pezzo di cerchio ò arco che è contenuto fra i dui semidiametri angolari, & l'arco che esso angolo ha per base si chiama Settore del cerchio.

Come nel cerchio r t s n, dal centro c alli dui punti r, & s. segnati nella circonferenza tiratii dui semidiametri c r, c s, che formano l'angolo r c s, nel centro quale ha per base l'arco r t s, esso angolo si dice angolo nel centro, ò del cētro & il pezzo di cerchio contenuto da essi semidiametri c r, c s, & arco r t s si chiama Settore; Auertendo che Settore si può anco nominare l'altro pezzo di cerchio restante, che è serrato, ò cōtenuto dalli medesimi dui semidiametri c r, c r, & dall'arco r n s, quale arco si potrà dire essere base dello spatio angolare r c s, superiore verso n, che è quello spatio, che resta a cauare l'angolo r c s. inferiore da 4. retti.

Diffinitione Decima.

SImili portioni de cerchi si chiamano quelle, che riceuono angoli eguali, cioe quelle, che li angoli fatti in esse sono eguali; Et archi simili si chiamano quelli, che sostengono, ò sono basi d'angoli eguali.

Nel cerchio O. prese le due portioni b a d, B A D. & in esse fatti i dui angoli b a d B A D. quādo essi angoli siano eguali l'vno all'altro, all'hora le dette due portioni si chiamano simili, il che vuole inferiore, che tal parte è l'vna portione del suo cerchio, qual parte è anco l'altra del suo cerchio, cioe del medesimo cerchio, quando elle siano intese in vn'istesso cerchio, che anco in diuersi cerchi, ò eguali, ò di diuerse grandezze s'intende, ò dice l'istesso, cioe che le portioni quali riceuono, ò nelle quali gli angoli, che vi si facessero siano eguali, all'hora esse portioni si chiamano simili, che se intese le due portioni c r s. C R S di diuersi cerchi. & in esse fatti li dui angoli r, & R, essi angoli siano eguali, tali due portioni si dicono essere simili, ouer se intese le due portioni c t s. C T S. & in esse fatti i dui angoli t. & T eglino siano fra loro eguali tali dui portioni si dicono essere simili. Di piu essendo l'angolo r eguale all'R, la base circonferētiale t, arco c t s, sopra la quale posai, o dal quale è sostentato l'vno r, si chiama simile all'arco C T S, sopra al quale come sopra à base si sostenta l'altro R. Similmente intesi i dui angoli t. & T. che hanno per base gl'archi c r s. C R S. questi dui archi si chiamano simili, quando i dui angoli t, & T, da loro sostenuti siano egnali l'vno all'altro.

Propositione 1. Problema 1.

Dato un cerchio si può trouare il suo centro.

Sia dato il cerchio o d n a, da trouarne il centro, Per farlo. In esso come si uogli si tiri vna retta a d, quale si diuida per mezo in r ad angoli retti con la à lei perpendicolare o r n, che arriui alla circonferenza da ciascuna parte, & sia in o, & n, questa o n, hora si diuida per mezo nel pun-

to c, qual pūto e, sarà il cētro d'esso cerc. Per dimostrarlo, Si dice che il centro del cerc. nō può essere in altro pūto che nel detto perche se potesse essere altroue, ò saria nella retta o n, ò fuori d'essa o n, in alcun luogo, ma fuori non può essere, che se per l'Aduersario si dicesse potere essere poniamo in f. all'hora da questo punto f, alli tre a r, & d tirate le tre rette f a, f r, f d; & considerati li dui triangoli f r a, f r d, perche il primo lato a r. dell'vno è eguale al primo lato r d, dell'altro (che ciascuna d'esse a r, r d, è la mità della a d) & il secondo lato r f, dell'vno è eguale al secondo lato f r (che è vna istessa linea) & di piu il terzo lato f a dell'vno saria eguale al terzo lato f d. dell'altro (perche per l'aduersario saria ciascun d'essi semidiametro dell'istesso cerchio ne seguiria (per la ottaua propositione del primo libro) che gli angoli dell'vno fariano eguali à gli angoli dell'altro ciascuno allo à lui corrispondente, & però l'angolo f r a, dell'vno saria eguale all'angolo f r d, dell'altro, perilche per la diffinitione ciascun d'essi dui angoli saria retto, & perciò ciascun d'essi saria anco eguale a ciascuno delli dui c r a, e r d, che sono retti dalla construttione, onde l'angolo f r d, saria eguale al c r d, che lo contiene in se, o il c r a, all'f r a; cioe la parte saria eguale al tutto, il che è impossibile, però impossibile è anco che il centro del cerchio sia in alcun luogo fuori della linea o n, ne meno può essere il centro del cerchio in essa o n, in altro luogo, che nel punto c, doue ella è diuisa per mezo, ò vogliamo dire in due parti eguali, perche se fusse per l'aduersario, poniamo in c la t o, saria eguale alla t n, andando ciascuna d'esse dal supposto centro t, alla circonferenza, ma la t n è maggiore della c n, sua parte, però essa t n, saria ancor maggiore della c o alla tn eguale (dalla construttione, essendo diuisa la o n per mezo in c n) onde se la t n è maggiore della c o, ancora la t o, eguale (per l'aduersario) alla t n; sara maggiore della medesma c o, il che è impossibile, perche la t o, è parte della c o, & la parte non può essere maggiore del tutto, ò il tutto non può essere minore della sua parte, per ilche il centro del cerchio non può essere nella linea o n, fuori del punto c, ne può manco essere in altro luogo del cerchio fuori della n o, come si è mostrato, onde resta che di necessità egli sia il punto c, come si voleua mostrare.

Corollario, ò Deriuatione.

DI qui si manifesta, che se in vn cerchio vna linea retta sia segata da vn'altra per mezo, & ad angoli retti, o vogliamo dire sia segata perpendicolarmente in due parti eguali, si manifesta dico, che nella segante sara il centro del cerchio, cioe che essa segante sara diametro del cerchio. Perche dall'essere segata la a b in r. in due parti eguali ad angoli retti dalla n o, si è concluso che il punto c, nel mezo della segante n o è il centro del cerchio.

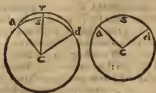
In Pratica per trouare facilmēte il diametro ò larghezza della bocca tonda d'vn pozzo, o altro cerchio simile, sapendo noi il diametro del cerchio essere la maggiore, o piu lunga linea retta, che vi si possa tirare, potremo preso vn filo a r dentro al quale sia vna cosa busa, come vn Pater nostro, o Auemaria mobilè, fermatone il capo a in vn punto della circonferenza doue si vogli, andar sul cerchio con il paternostro fuori, su la circonferenza, che possa scorrere, spinto da essa curuità nell'andar passando da l'f, all'n, finche peruiene in luogo doue non sia spinto, & che anzi passando auanti senza mouerlo egli restasse di continuo piu lontano dalla circonferenza; che questo occorrendo nel punto n, all'hora la a n, saria il diametro, o larghezza del cerchio, & però nel mezo d'esso diametro a n, saria il centro.

Propositione 2. Theorema 1.

SE nella circonferenza del cerchio si segnino dui punti, & dall'vno all'altro si tiri vna linea retta, ella di necessità passarà dētro al cerchio, ò vogliamo dire segarà il cerchio.

Nella circonferenza del cerchio dato siano segnati i dui punti a, & d, doue si vogli, si dice che dall'vno a, all'altro d, tirandosi vna linea retta ella passarà dentro al cerchio (cioe segarà esso cerchio) perche di fuori non può passare, che se per l'Auersario, ella si dicesse passar di fuori, & essere la a r d, allhora dal centro c, tirate le due c a, c d, semidiametri elle saranno eguali fra loro, & considerato il triangolo a c d, per base del quale sia presa la a r d, retta per l'aduersario,

perche

perche in esso li dui lati c a, a d, sono eguali ancora li dui angoli c d a, c a d, sopra alla base fariano (per la quinta propositione del primo libro) eguali l'vno all'altro; Ancora dal centro c, ad vn punto segnato nella a r d (retta per l'Aduersario) & sia r, si tiri la c r, & cõsiderato vno delli dui triangoli a c r, ouero d c r, poniamo l'a c r, & inteso il lato a r, allungato in d, l'angolo c r d sara suo estrinseco, & perciò (per la 16. del primo) sara maggiore dell'angolo c a r, vno delli dui intrinsici oppositi, perilche esso angolo c r d, estrinseco sara ancor maggiore dell'angolo c d r, al c a r eguale, onde nel triangolo c r d, perche l'angolo c r d saria maggiore dell'angolo c d r: ancora (per la 19. del primo) il lato c d opposto all'angolo c r d maggiore saria piu lungo del lato c r, opposto all'angolo c d r minore, ma la retta c f è eguale alla c d, che ambidui sono semidiamerri d'esso, per il che ancora la c f, saria piu lunga della medesima c r, ma la c f, è parte della c r, però la parte saria maggiore del tutto, il che è impossibile, onde impossibile è anco quello da che essa impossibilità, si dedurria, cioe che la retta tirata dall'a al d, possa passare fuori del cerchio; Ne meno puo andare su l'arco, ò circonferenza del cerchio, si perche allhora la linea retta, & la curua fariano vna istessa, il che è impossibile, si anco perche nel medesimo modo sopradetto si dedurria la impossibilità, che allhora vn semidiametro conuerria, che fusse maggiore dell'altro; perche dicendosi la retta tirata dall'a al d, essere la istessa che l'arco, ò circonferenza à d, allhora inteso il triangolo a c d, & presa la retta per l'aduersario a d, per base; essendo i suoi dui lati c a, c d eguali, ancora li dui angoli sopra alla base saranno eguali, cioe il c d a al c a d. Hora dal centro c, alla base doue si vogli tirata vna retta, & sia la c f, & considerato vno delli dui triangoli partiali c f a, c f d; poniamo il c f a, & inteso la a f allungata in d, l'angolo c f d, sara angolo estrinseco d'esso triangolo c a f, & però maggiore dell'angolo c a f, vno delli dui intrinsici oppositi, per ilche sara anco maggiore dell'angolo c d a, à detto c a f, eguali, onde nel triangolo c f d, essendo l'angolo c f d maggiore del c d f. ancora il lato c d, opposto all'angolo c f d, maggiore sara piu lungo del lato c f, opposto all'angolo c d f minore, ma cosi la c d, come la c f, sono semidiametri del medesimo cerchio dato, pero l'vn semidiametro saria piu lungo dell'altro, il che è contro la proprietà del cerchio, & pero è impossibile, onde è impossibile che la retta tirata dall'a al d, vada su la circonferenza del Cerchio, ne meno puo andar di sopra fuori del Cerchio, come si è mostrato, pero andarà di dentro dal Cerchio segandolo, che è quello che si voleua mostrare.

Propositione 3. Theorema 2.

SE nel cerchio una linea retta, che uenga dal centro seghi un'altra retta, che non passi per il centro in due parti eguali, ella di necessità la segarà ad angoli retti; Et se la retta che uien dal centro seghi l'altra non passante per il centro ad angoli retti, ella di necessità la segarà in due parti eguali.

Sia che nel Cerchio la retta a n, passante, o la c n, veniente dal centro segando la b d, non passante per il centro la seghi in due parti eguali in r, si dice che ella sarà anco segara ad angoli retti, cioè che li 4. angoli all'r, saranno retti ciascun d'essi; Et se la d n, dal cẽtro segando la b d (che non passa per il centro) la seghi ad angoli retti, ella segarà anco essa b d, in due parti eguali. Per dimostrarlo. Dal centro c, alli dui punti b, & d, si tirino le due rette, ò semidiametri c b, c d; che perciò saranno eguali l'vno all'altro & intesi i dui Triangoli c b r, c d r, i tre lati dell'vno saranno eguali alli tre lati dell'altro, ciascuno allo à lui corrispondente, cioe il primo c b, al primo c d, il secondo b r, al secondo d r (per essere la b d, dal supposito diuisa in due parti eguali) & il terzo c r, al terzo c r, per essere vna istessa linea commune ad ambidui li triangoli; (onde per la 4. propositione del primo libro) li angoli dell'vno saranno anco eguali a gli angoli dell'altro ciascuno al suo relatiuo, o corrispondente, cioè l'angolo c r b dell'vno sara eguale all'angolo c r d dell'altro, & perciò ciascuno d'essi angoli sara retto, onde la b d, sarà segata ad angoli retti, che è vna delle due parti della propositione,

che

che si voleua mostrare. Et seguendo all'altra; Posto che la b d, sia segata dalla a b, che viene dal centro ad angoli retti in r. si dice che di necessità ella sarà segata in due parti eguali. Per dimostrarlo. Tirate pure, o imaginate dal centro alli punti b, & d, le due rette, o semidiametri c b. c d, & considerato il triangolo b c d, di dui lati c b, c d, eguali sarà (per la 5. propositione del 1. lib.) ancora l'angolo b, eguale all'angolo d; & intesi i dui triangoli c r b, c r d; perche l'angolo b, dell'vno è eguale all'angolo d, dell'altro, & l'r dell'vno all'r dell'altro (essēdo ciascun d'essi retto dal supposito) & di più il lato c b dell'vno eguale al lato c d suo corrispōdente dell'altro (ouero il c r al c r) ne segue (per la 26. del 1.) che ancora il lato b r. dell'vno sia eguale al lato d r, à lui corrispondente dell'altro; Ouero perche l'angolo b. è eguale al d, & l'r all'r. ancora (per la 31. del 1.) il restante angolo c, dell'vn triangolo sara eguale al restante angolo c, dell'altro. Onde perche dui lati b c, c r dell'vn triangolo con l'angolo b c r da loro contenuto, sono eguali alli dui lati d c, c r, dell'altro triangolo, con l'angolo d c r, da loro contenuto ne segue (per la 4. propositione del 1.) che ancora la base b r, dell'vno sia eguale alla base d r dell'altro. Ouero perche nelli dui triangoli rettangoli b c r, d r c, il quadrato del lato b c, opposto all'angolo retto in l'vno è eguale alli dui quadrati di b r, r c; Et il quadrato del lato d c, opposto all'angolo retto in l'altro è similmente eguale alli dui quadrati di d r, c r, ne segue, che essendo il quadrato di b c, eguale al quadrato di d c; (che b c, & d c semidiametri sono eguali) ancora la somma delli dui quadrati di b r, r c sara eguale alla somma delli dui quadrati di d r, r c. perilche leuato da ciascuna somma il quadrato di r c, à loro comune restarà il solo quadrato di b r, eguale al solo quadrato di d r, & però la linea b r, sara eguale alla d r, ma queste sono le due parti in che è diuisa la totale retta b d, però ella è diuisa in due parti eguali, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 4. Theorema 3.

SE nel Cerchio due linee rette si seghino l'una l'altra, se ambedue non passino per il centro elle non si potranno segare scambieuolmente l'una l'altra in due parti eguali.

Quando due rette passano ambedue per il centro necessariamente la prima, sega la seconda, & è segata scambieuolmente dalla seconda in due parti eguali, poiche ciascuna delle due parti dell'vna, & ciascuna delle due parti dell'altra è semidiametro del Cerchio, & però eguali fra loro; Ma se la prima passa per il centro, & la seconda non vi passi, può bene la seconda essere diuisa dalla prima in due parti eguali, & questo occorre come si è mostrato nella antecedente propositione, quando detta seconda sia segata ad angoli retti dalla prima, cioe che l'vna sia perpendicolare all'altra, ma non può gia la prima essere segata in due parti eguali dalla seconda, che non passa per il centro, poiche essa prima solo nel centro si diuide in due parti eguali; Quando mò ne la prima, ne la seconda passa per il centro, può bene vna di esse, poniamo la prima essere segata dall'altra seconda in due parti eguali, ma non già poi potrà ancora la seconda essere segata dalla prima medesimamente in due parti eguali; Che essendo nel Cerchio le due rette r t, b n, che si seghino in s, elle non si potranno segare scambieuolmente in due parti eguali, che se per l'auersario ciò potesse auuenire, cioe che b n, fusse diuisa per mezo in s, come può essere la r t; all'hora noi dal centro c, al punto s, del segamento tiraremo la retta c s, quale perche vien dal centro, & sega la r t, in due parti eguali in detto punto s, (che si suppone essa r t, essere diuisa dalla b n, in due parti eguali) essa c s sara perpendicolare a questa r t, & ciascuno delli dui angoli r s c, t s c, sarà retto. Ancora perche la istessa c s, che vien dal centro, segaria la b n, in s, in due parti eguali per l'auersario, essa c s, saria perpendicolare alla detta a n, (per la antecedente propositione) & per ciò ciascuno delli dui angoli n s c, b s c saria retto, onde perche tutti gl'angoli retti sono eguali fra loro, ciascuno delli dui r s c, t s c, saria eguale a ciascuno delli dui n s c, b s c, cioe l'angolo c s t, saria eguale all'angolo c s b sua parte, o il c s n al c s r, il che è impossibile, però impossibile è anco quello da che questa impossibiltà si deduria, cioe che le rette b n, & r t non passanti ambedue per il centro, si possino segare scambieuolmente, cioe l'vna l'altra l'vna in due parti eguali.

Propositione 5. Theorema 4.

SE dui Circoli fra loro si seghino, li centri loro di necessità sono diuersi, cioè essi non possino hauere vn'istesso centro.

I dui circoli a r f, & a o f, si seghino fra loro in a, & f, si dice essi nō potere hauere vn centro istesso, che se per l'aduersario lo potesero hauere, sia egli poniamo il punto c (quale necessariamente douerà essere nella superficie a o f t, comune ad ambidui i Cerchi, che fuori d'essa potria bene essere dentro l'vno de Cerchi, ma saria fuori dell'altro, ne può il centro d'vn Cerchio esser fuori di esso cerchio, douendo egli esserui dentro.) Da questo punto c, al punto d'vno de segamenti, & sia all'a. si tiri la retta c a, & anco si tiri vn'altra retta che arriui alla circonferenza di ciascuno de dui Cerchi, doue si vogli, purche non vada pel punto f. dell'altro segamento, hor sia la retta c o r; Perche mò si dice il punto c, essere centro del circolo a r f, la c r sarà eguale alla c a, andando ciascuna di loro dal centro c, alla circonferenza del suo circolo a r f; Et perche il punto c si dice essere ancor centro del Cerchio a o f, la retta c o, sara eguale anc'ella alla c a, andando ciascuna di loro dal centro c, alla circonferēza del suo istesso Cerchio a o f. onde perche cosi la c o, come la c r, fariano eguali ad vna istessa c a, elle anco fariano eguali fra loro, cioe la c r, faria eguale alla c o suo parte, ilche è impossibile, però anco è impossibile quello da che questa impossibilità si dedurria, cioe che il punto c, possa essere cētro comune ad ambidui essi cerchi detti, non potendo dunque essi dui cerchi hauere vn centro medesmo ne segue che gli habbino diuersi, che è quanto occorreua mostrare.

Propositione 6. Theorema 5.

SE dui Circoli si tocchino insieme di dentro essi di necessità haueranno dui centri diuersi.

Siano i dui circoli a f, a r, che si tocchino insieme di dentro nel punto a, si dice che i dui centri loro sono diuersi, cioè che non possono hauere vn centro comune, che se per l'auersario potessero hauere vn'istesso centro fin che si dica egli essere il punto c, & all'hora da esso c all'a del toccamento si tiri la retta c a, & anco vn'altra retta, doue si vogli, che arriui alla circonferenza d'ambidui i cerchi, & sia la c r f, che cosi la c r. faria eguale alla c a, perche andariano ambedue dal centro c, alla circonferenza dell'vn cerchio; Et di piu la c f. faria eguale alla istessa c a, detta, perche cosi la c f, come la c a, andariano dal medesimo centro c, alla circonferenza dell'altro cerchio; per ilche ne seguiria che la c r. fusse eguale alla c f (essendo ciascuna d'esse eguale ad vna medesma c a) ma la c r è parte della c f, però la parte saria eguale al tutto. il che è impossibile, onde impossibile è anco, che vn'istesso punto possa essere centro d'ambidui li Cerchij, che si tocchino insieme di dentro, haueranno dunque ciascun d'essi il suo cētro diuerso dal l'altro, come si voleua mostrare. Delli cerchi che si tocchino por di fuori, essendo l'vno tutto fuori dell'altro è chiarissimo i centri loro essere diuersi, poiche il centro di ciascun cerchio conuiene, che sia dētro ad esso cerchio, ne può esser fuori del proprio cerchio

Propositione 7. Theorema 6.

SE nel diametro d'un Cerchio si segni un pūto, doue si uogli, che non sia il centro, & da esso nel circolo si tirino quante linee rette si uoglino, che arriuino alla circonferenza, la più lunga di tutte sarà quella che passa per il centro, & la più corta sarà il restante del diametro. Et dell'altre le più uicine alla linea che passa per il centro saranno di mano in mano più lunghe di quelle che più se gli allontanano; Due sole linee, che siano eguali si potranno tirare da esso punto fino alla circonferenza, l'una da una banda, & l'altra dall'altra della minima, che siano egualmente lontane dalla massima, ò dalla minima delle dette tirate.

Nel diametro a n sia segnato vn punto f, doue si vogli, che non sia il centro, & da esso per il centro e sia tirata le retta f a, & allungata dalla banda del punto f, fino alla circonferenza in n, che n a sarà il diametro del cerchio; Ancora dal detto punto f, si tirino fino alla circonferenza quant'altre linee si voglino, poniamo f b, f g, f d, & f e; Si dice, che di tutte queste linee la f a, passante per il centro è la massima, & la f n, restante del diametro e la minima; & dell'altre la f b, che piu si auicina alla f a, è la piu lunga, & cosi la f g è piu lunga della f d, & la f d, piu lunga della f e, che è piu lontana della f a, ò vogliamo dire che nella circonferenza termina in punto piu lontano

lontano dall'a, termine della ſ a. Per dimoſtrarlo. Dal centro c, è ciaſcuno delli termini nella
circonferenza delle linee dette ſi tirino, ò ſi intendano, ò ſi imaginino tirate le rette, ò ſemidia-
metri c b, c g, c d, c e, & conſiderato il triangolo c ſ b, la ſomma, o compoſto delli ſuoi dui lati

c ſ, c b, è (per la 20. del primo) maggiore del ſolo
reſtante lato ſ b; ma tanto importa la ſ a, quanto i
dui lati ſ c, c b detti (perche c b è eguale à c a, onde
giuntoli comunemente c ſ. la ſomma b c, c ſ è egua-
le alla ſomma ſ a) perilche la ſ a, anc'ella è maggio-
re della ſ b, Et per la medeſima cauſa, o nel medeſmo
modo, ſi prouarà la iſteſſa ſ a eſſere piu lũga di qual
ſi vogli dell'altre ſ g, ſ d, ſ e; Che poi detta b ſ, ſia
piu lunga della à lei ſeguente g ſ, ſi conoſce conſide-
rando i dui triangoli b c ſ, g c ſ, nelli quali i dui la-
ti b c, c ſ. dell'vno ſono eguali alli dui lati g c, c ſ,
dell'altro, ma l'angolo b c ſ, contenuto dalli dui la-
ti detti dell'vno è maggiore dell'angolo g c ſ, conte-
nuto dalli dui lati detti dell'altro, perilche (per la
24. del primo) la baſe b ſ. dell'vno è maggiore del-
la baſe g ſ, dell'altro, & coſi ſi moſtrarà la g ſ. eſſere
maggiore della d ſ, & la d ſ, della e ſ. Et che la e ſ.
(ò quale altra retta ſi tiraſſe dal punto ſ. fra li e, & n) ſia maggiore della ſ n, ſi conoſce conſide-
rando il triangolo c ſ e, nel quale la ſomma delli dui lati c ſ, ſ e, è maggiore che il ſolo lato c e,
ſemidiametro del Cerchio, & perciò ſarà anco maggiore del ſemidiametro c n; onde coſi dalli
dui lati c ſ, ſ e, come dal ſemidiametro c n, leuato comunemente la c ſ. ne ſegue, che anco il re-
ſtante ſ e, delli dui lati ſia maggiore del reſtante ſ n, del ſemidiametro, onde è chiaro la ſ n, re-
ſtante del diametro a n, leuatone la maſſima a ſ eſſere la minima di tutte le linee, che tirate dal
punto ſ, arriuino alla circonferenza in qual punto ſi vogli. Ancora ſi dice, che dal punto ſ, ſi po-
tranno tirare due ſole linee fino alla circonferenza che ſiano eguali fra loro, l'vna da vna ban-
da, & l'altra dall'altra della minima ſ n, ò della maſſima ſ a; Per dimoſtrarlo. Dal punto c, ſi tiri
il ſemidiametro c o, che con la c ſ, formi l'angolo ſ c o eguale all'ſ c e, & ſi tiri la ſ o, quale ſarà
eguale alla ſ e, perche conſiderati i dui triangoli e c ſ, o c ſ, alli dui lati c e, c ſ. dell'vno ſono e-
guali li dui lati o c, c ſ dell'altro, & l'angolo e c ſ, contenuto dalli dui lati detti dell'vno è egua-
le (dalla conſtruttione) all'angolo o c ſ contenuto dalli dui lati detto dell'altro, perilche (per
la 4. del primo) ancora la baſe ſ e dell'uno ſara eguale alla baſe ſ o dell'altro. Et che alcun'altra
linea tirata dal punto ſ, alla circonferenza non poſſa eſſere eguale alla detta ſ e, oltre la ſ o, coſi
conſtrutta ſi moſtrerà coſi. Se alcun'altra linea ſi poteſſe tirare dal punto ſ, alla circonferenza
eguale alla ſ e, oltre alla ſ o; ella per l'aduerſario ſi dica eſſere la ſ t, onde eſſendo anco la ſ o, e-
guale alla ſ e, ciaſcuna delle due ſ o, ſ t, ſaria eguale ad vna iſteſſa ſ e, perilche eſſe due ſ o, ſ t,
ſariano eguali fra loro, cioe la piu propinqua alla minima ſ n, ſaria eguale alla manco propin-
qua, il che è impoſſibile (hauendo già moſtrato la più propinqua douere eſſere neceſſariamente
minore di ciaſcun'altra manco propinqua. Ouero del centro c al termine r, imaginato, ò tira-
to il ſemidiametro c r, & conſierati i dui triangoli ſ c t, ſ o r, perche li dui lati ſ c, c t, dell'vno ſo-
no eguali alli dui lati ſ c. c o. dall'altro, & la baſe ſ t, dell'vno ſaria anco per l'aduerſario eguale
alla baſe ſ o, dell'altro, ne ſeguiria (per la ottaua del primo) che ciaſcuno de gli angoli dell'vn
triãgolo, foſſe eguale a ciaſcuno de gl'angoli corriſpondenteli dell'altro triangolo; & perciò l'an
golo ſ c t, contenuto dalli dui lati dell'vno ſaria eguale all'angolo ſ c r, contenuto dalli dui lati
dell'altro, ma l'ſ c t è parte dell'ſ c o, però la parte ſaria eguale al tutto, il che è impoſſibile, per-
il che impoſſibile è anco che la retta ſ t, ò altra diuerſa dalla ſ o, poſſa eſſere eguale alla ſ c, che è
quanto ſi voleua moſtrare.

Et ſe dal punto ſ. ſi tiraſſero anco dall'altra banda deſtra del diametro altre linee paragonan-
dole poi alle ſiniſtre quelle deſtre che foſſero piu propinque alla maſſima, che le ſiniſtre, cioe che
formaſſero con la ſ a angolo piu piccolo ſarebbono piu lunghe delle ſiniſtre, che foſſero piu lon-
tane dalla maſſima, o formaſſero con eſſa maſſima angolo piu grande. Onde ſe l'angolo r ſ a, ſia
piu piccolo del b ſ a (cioe che la ſ r ſi auicini piu alla ſ a, cioe al centro c, ò al punto a) ancora la
ſ r ſara piu lunga della ſ b, perche dall'ſ. dalla banda deſtra tirata, o imaginata la ſ t, che con
la maſſima facci l'angolo t ſ a eguale al b ſ a, & però maggiore dell'r ſ a, che perciò queſta ſ t, ſi
allontanarà piu dalla maſſima che non è la ſ r, ſapremo che eſſa ſ r ſara piu lunga di detta ſ t, &
perciò anco dell'a b ſ a detta ſ t eguale (allontanandoſi eſſe due t ſ, & b ſ egualmente dal ſuppo
ſito)

ſito) dalla maſſima a ſ. Ouero ſe dell'ſ, haueſſimo tirata, ò imaginata dalla banda ſiniſtra la retta x, quale con maſſima ſ a formaſſe l'angolo x ſ a eguale all'r ſ a (che percio quella ſ x ſaria eguale alla ſ r) perche l'r ſ a è minore del b ſ a, ancora l'x ſ a, ſaria minure del b ſ a. & contenuto come parte in eſſo b ſ a, onde la ſ x ſaria fra la b ſ, & la maſſima ſ a, cioe ſaria piu vicina alla maſſima ſ a, & però maggiore della b ſ, per il che ancora la r ſ (à queſta x ſ eguale) ſaria maggiore della medeſma b ſ, quale b ſ auuicinandoſi piu alla maſſima, che la p ſ, dall'altra banda (eſſendo l'angolo b ſ a, minore del p ſ a) ſaria bene maggiore della p ſ. coſi come è maggiore della d ſ, eguale alla p ſ. ſe ſia fatto l'angolo p ſ a eguale al d ſ a, (ò il p ſ n eguale al d ſ n) & la o ſ, che è minore della p ſ, ſaria anco minore della d ſ.

Propoſitione 8. Theorema 7.

SE fuori del Cerchio ſia ſegnato un punto, doue ſi uogli, & da eſſo al Cerchio ſiano tirate quante linee rette ſi uoglino, delle quali una paſſi per il centro, arriuando alla circonferenza concaua, cioè di dentro, come anco tutte l'altre, ſegando il Cerchio. allhora di tutte queſte linee lunghiſſima, ò maggiore ſarà quella, che paſſa per il centro, & dell'altre quella, che più ſi auicinarà alla paſſante per il centro ſarà più lunga di quelle, che gli ſaranno più lontane. Ma di quelle parti delle rette dette, che arriuaranno ſolo al conueſſo della circonferenza, cioè che reſtaranno fuori del Cerchio, quella che ſarà fra il punto ſegnato, & il diametro del Cerchio, cioè la parte di fuori della paſſante per il centro, ſarà la più corta di tutte l'altre, & di mano in mano quelle che ſaranno più lontane da queſta minima ſaranno più lunghe delle manco lontane; & dal punto ſegnato due ſole linee tirate una da una banda, & l'altra dall'altra della minima, ò maſſime egualmente lontane da eſſa minima, ò maſſima ſaranno eguali fra loro.

Dal punto a ſegnato fuori del cerchio d x n. il centro del quale è il punto c, ſiano tirate molte linee ſeganti il cerchio, delle quali la a g. paſſi per il centro, & l'altre a p, a q, a ſ, doue ſi uogli; ſi dice la a g paſſante per il centro eſſere lunghiſſima fra tutte, & dell'altre la a p. eſſere piu lunga della a q, che è piu diſtante della maſſima a g, & coſi la a q, eſſere piu lunga delle a ſ. Ma delle eſteriori a n, a m, a t, breuiſſima, eſſere la a n, che è per il diritto del centro ò parte della a g, lunghiſſima, & coſi la a m, eſſere piu lunga di eſſa a n, la a t, piu lunga della a m, & la a r, piu lunga della a t; Et dal punto a, poterſi tirare ſolo due linee vna da vna banda della lunghiſſima. ò breuiſſima, & l'altra dall'altra banda, che ſiano eguali fra loro.

Per dimoſtrarlo. Dal centro c, à ciaſcuno delli punti nella circonferenza, m t r ſ, q, p. ſi tirino, ò imaginino le rette, ò ſemidiametri c m, c t, c r, c ſ, c q, c p, & conſiderato il triangolo p c a, alla ſomma di cui lati p c, c a, compoſta dalla a c, & ſemidiametro c p del cerchio è eguale la ſola retta a g, compoſta ſimilmente dalla a c, & da vn ſemidiametro c g. del cerchio, ma la ſōma d'eſſi dui lati è maggiore del ſolo lato a p, però anco la a g. è maggiore di detta a p, Et nel medeſimo modo ſi concluderà la iſteſſa a g. eſſere piu lunga di qualſiuogli altra delle tirate, o imaginate dal punto a, peruenire (ò da vna banda, ò dall'altra) alla concaua circonferenza, ſegante il cerchio. Ancora conſiderati i dui triangoli a c p, a c q, perche li dui lati a c, c p, dell'vno ſono eguali alli dui lati a c, c q, dell'altro (che c p, & c q ſono ſemidiametri del medeſimo cerchio. & però

però eguali, ma l'angolo a c p contenuto dalli dui lati detti dell'vno è maggiore dell'angolo a c q sua parte contenuto dalli dui lati detti dell'altro, ne segue (per la 24. del 1.) che la base a p, dell'vno sia piu lunga della base a q dell'altro; Et così si mostrerà che essa a p, piu vicina dell'altre alla lunghissima a g, è anco piu lunga di ciascuna dell'altre, & nell'istesso modo anco si conosce, che la a q è piu lunga della a f. (essendo l'angolo a e q, maggiore dell'angolo a e f.) Di poi considerato il triangolo e m a, perche la somma delli suoi dui lati e m, m a, è maggiore del solo lato, ò base e a, leuando da vna banda la e m, & dall'altra la e n, semidiemetri eguali, ne segue, che il rimanente m a, sia maggiore del rimanente n a, & nel medesmo modo si prouarà ciascuna dell'altre esteriori o t, a r, essere maggiore della n a, & però è chiaro essa n a (esterior parte della lunghissima a g) essere la breuissima delle esteriori. Ancora perche nel triangolo e t a, inteso dalli termini e, & a, della base tirate le due rette e m, m a, la somma loro (per la 21 del 1.) è minore della somma delli dui lati e t, t a, del detto triangolo; dall'vna somma leuando la e m, & dall'altra de dui lati detti, la e t, semidiametri eguali, ne segue, che il rimanente m a, dell'vna, sia minore del rimanente t a, dell'altra, & così è chiaro la m a, che piu si auicina alla breuissima a n, essere piu corta della a t, che gli è piu lontana, & nel medesmo modo si conosce la a t, essere piu corta della a r. Et se anco si tirasse dall'a, la a x, che toccasse il Cerchio, non lo potendo segare allungata che ella fosse, pure nel medesmo modo si vederia ella lontanissima dalla breuissima essere anco la lunghissima fra tutte le esteriori, così come conuenientemente ella saria la breuissima fra tutte le seganti tirate dal punto a. Finalmente faccisi l'angolo a e d, eguale all'a e m, & tirata al d, la a d, & allungata in b, considerati i dui triangoli a e d, a e m, perche i dui lati a e, e d, dell'vno sono eguali alli dui lati a e, e m dell'altro, & l'angolo a e d, dell'vno è eguale all'angolo a e m de i lati dell'altro, ne segue (per la quarta del primo) che ancora la base a d, dell'vno si eguale alla base a m dell'altro, & così habbiamo le due rette esteriori a m, da vna banda, & a d, dall'altra eguali fra loro: Ancora vedremo essere eguali le due totali a b, a p, fra loro considerando i dui triangoli a e b, a e p, nelli quali li dui lati a e, e b, dell'vno sono eguali alli dui lati a e, e p, dell'altro, & l'angolo a e b, contenuto dalli dui lati detti dell'vno è eguale all'angolo a e p, contenuto dalli dui lati detti dell'altro, perche nelli dui triangoli a e d, a e m, essendo non solo la base a d, dell'vno eguale alla base a m, dell'altro, ma anco li dui restanti angoli dell'vno eguali alli dui restanti angoli dell'altro, ciascuno al suo corrispondente, & però l'angolo a d e, eguale all'a m e; ancora il restante e d b, delli dui e d a, e d b, eguali in somma a dui retti (per la 13. del primo) sarà eguale al restante e m p, delli dui e m a, e m p, eguali anch'essi in somma a dui retti; Et perche il triangolo e d b, è equicrure, cioè di dui lati e d, e b, semidiametri eguali; l'angolo e b d, sara anco eguale all'angolo e d b (per la quinta del primo.) Et similmente nel triangolo equicrure m e p, l'angolo m p e, sara eguale all'angolo e m p; onde perche l'vno e m p, è eguale all'angolo e d b, del triangolo e d b, ancora l'altro m p e, sarà eguale all'altro e b d, del detto triangolo e d b, perilche ancora il restante angolo m e p, dell'vno triangolo equicrure, sara eguale al restante angolo d e b dell'altro, onde all'vno m e p, giunto l'angolo a e m; & all'altro d e b giunto l'angolo a e d (quali aggiunti sono eguali fra loro dalla construttione ne segue, che le due somme a e p, & a e b, saranno eguali l'vna all'altra) per ilche ancora la base a b dell'vno sarà eguale alla base a p, dell'altro: Dal punto a ad non si potrà tirare dalla banda destra fino al conuesso esteriore della circonferenza alcun'altra linea eguale alla a m, che non sia la a d, ò fino al concauo di dentro eguale alla a p, che non sia la a b, perche se si tirassero fra la a b, & a g; la esteriore saria piu corta della a d, & però anco piu corta della a m; Et la totale restante saria piu lunga della a b, & però anco piu lunga della a p. Che se si tirasse oltre alla a b, piu dalla banda destra, cioè piu lontano dalla a g, come saria poniamo la retta n z u, all'hora la parte esteriore n z, saria piu lunga della a d, & però anco piu lunga della a m. Ma la totale a u, saria piu corta della a b, & però anco più corta della a p, che è quanto si voleua dimostrare.

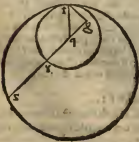
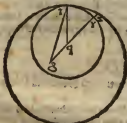
Propositione 9. Theorema 8.

SE nel Circolo preso un punto, & da esso alla circonferenza, tirando più di due linee, elle siano fra loro eguali, il punto preso è necessario essere il centro d'esso Cerchio.

verria ad essere centro del primo cerchio, & del secondo, cioe essi dui cerchi che si segano haueriano vn'istesso centro, il che è impossibile (per la 5. propositione) impossibile dunque anco è che dui cerchi segādosi si possino segare se nō in dui punti, il che è quanto si volena mostrare.

In altro modo ancora si potrà dimostrare la presente propositione dicendo. Se per l'Aduersario i dui cerchi, che si segano si potessero segare in piu di dui punti, cioe per lui ne li tre a, b, d, Trouato il centro del primo cerchio, & sia o, da esso alli tre punti a, b, d, si tirino, o imaginino le tre rette, o a, o b, o d, quali (per la diffinitione del cerchio) sariano equali fra loro, andando dal centro del primo cerchio alla sua istessa circonferenza; Hora perche il punto o, è anco dentro al secondo cerchio, & da esso o, alla circonferenza d'esso secondo cerchio nelli pūti a, b, d; sariano tirate tre rette o a, o b, o d, quali sariano equali fra loro, come si è concluso, ne seguiria (per l'antecedente nona propositione) che il punto o, fusse centro d'esso secondo cerchio, ma è anco trouato essere centro del primo; però i dui cerchi detti primo, & secondo, che si segano fra loro haueriano vn'istesso centro o, il che è impossibile (per la 5. propositione) onde è anco impossibile che si possino segare in piu di dui punti, si segaranno dunque solo in dui punti, come si volena mostrare.

Propositione 11. Theorema 10.

SE vn cerchio toccarà un'altro cerchio, che sia dētro ad esso, & dal centro dell'uno al centro dell'altro è, tiri una linea retta, allungandosi essa linea retta uerso doue essi cerchi si toccano, ella di necessità, passarà per il punto del toccamento.

Sia il cerchio t s, che tocchi in t il cerchio t r, postoui dentro si dice che dal centro dell'vno al centro dell'altro tirando vna linea retta, & allungandolà dalla banda del toccamento ella di necessità passarà per il pūto t, del toccamento; che se per l'aduersario ella non vi passasse, conuerria che i centri d'essi dui cerchi non fussero per la dirittura del punto t, ma in altro modo; hor sia che si dica il centro del cerchio grāde essere il punto g, & del piccolo il punto p, & tirando dal g, del grande al p, dal piccolo la retta g p, & allungandola dalla banda del toccamento, ò dalla banda del centro del piccolo fino alla circonferenza de cerchi ella vi arriui in r, & s; & dalli centri g. & p, al punto t, del toccamento tirate le rette g t, p t. si cōsideri il triangolo g t p, nel quale perche la somma delli dui lati g p, p t è maggiore del restante lato g t, ella sarà anco maggiore della retta g s, equale al lato g t (andando ambedue dette g t, g s dal centro g, alla circonferenza del suo cerchio grande.) onde cosi dalle g p, g t, come dalla g s, leuato la comune g p, la restante p t sara medesimamente maggiore della restante p s. ma alla p t è equale la p r (andando ambedue dal centro p, del cerchio piccolo alla sua istessa circonferenza) però anco la p r, saria maggiore della detta p s, cioe la parte faria maggiore del tutto (che p r è parte di p s) il che è impossibile, onde impossibile è anco quello da che questa impossibilità si dedurria, cioe che li centri di questi cerchi non siano in linea retta con il punto del loro toccamento; saranno dunque in linea retta con esso punto, & perciò la linea retta, che andarà dall'vn centro all'altro, allungata dalla banda

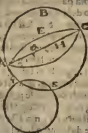
da

da del toccamento di neceſſità paſſare per eſſo punto del toccamento.

Propoſitione, 12. Theorema 11.

SE dui cerchi ſi tocchino fra loro dalla parte di fuori, tirando una linea retta dal centro dell'uno al centro dell'altro; ella di neceſſità paſſarà per il punto del toccamēto.
Siano a & b li centri di dui cerchi, che ſi tocchino di fuori nel punto c, ſi dice che dall'a al b, tirando vna linea retta ella di neceſſità paſſarà per il punto c, doue ſi toccano. Che ſe ella non vi paſſaſſe; cioe che tirando dalli a, & b, al c, due rette elle non ſi vniſſero inſieme per il diritto, ma che foſſero due rette diuerſe, all'hora ſia che dall'a, al b, tirata vna retta per l'aduerſario ſi dica ella eſſere la a n o b, (non paſſante per il toccamento c) & coſi le tre linee rette a c, b c, & a n o b; formariano un triangolo, & perche a n, parte della a n o b; è eguale alla a c (andando elle dal centro a, alla ſua circonferenza) & anco la b o, parte della detta retta a n o b, è eguale alla b c, (andando elle dal centro b, alla ſua circonferenza) le due a n, b o, parti della a n o b, sariano eguali alla ſomma de dui lati a c, b c del triangolo; & perche la totale a n o b, è maggiore del compoſto delle ſue due parti a n, b o, contenendo anco di più la reſtante parte n o, ne ſegue che eſſa retta, ò lato totale a n o b, ſia anco maggiore della ſomma delli dui lati a c, b c; onde vn lato ſolo a n o b, del triangolo saria maggiore della ſomma delli altri dui lati a c, b c, del medeſmo triangolo, il che è impoſſibile, perilche impoſsibile è anco che i dui centri de i cerchi non ſieno in vna iſteſſa linea retta, con il punto doue eſsi cerchi ſi toccano. Onde dal centro dell'vno al centro dell'altro, tirando vna linea retta, ella paſſarà per il punto del toccamento.

Propoſitione 13. Theorema 12.

SE un cerchio toccarà un'altro cerchio di dentro, ò di fuori, egli lo toccarà ſolo in un punto.
Se dui cerchi ſi poteſſero toccare di dentro in piu d'vn pūto ſia che per l'aduerſario li dui A B C D, A E C F, ſi poſsino toccare di dentro in A, & in C, all'hora dal centro dell'vno, & ſia G. al centro dell'altro, & ſia H. ſi tiri la retta G H, quale allungata di neceſsità (per la 11. di queſto) douerà paſſare per il punto del contatto, & però arriuaria in A, da vna banda, & in C, dall'altra. Et coſi la A C ſaria diametro di ciaſcuno delli dui cerchi, & perche G, è il centro dell'vno cerchio il ſemidiametro G C ſaria eguale al G A. & perche G C è maggiore di H C ſua parte, ancora G A ſarà maggiore di H C. & però di H A. (che H C, & H A ſariano eguali per eſſere ſemidiametri dell'altro Cerchio, che ha per centro il punto H.) ma G A è parte di H A. però la parte ſaria maggiore del tutto, il che è impoſſibile, dunque impoſſibile è ancora, che dui Cerchi ſi tocchino di dentro in più d'vn punto. Ancora dui Cerchi, che ſi tocchino per di fuori non ſi poſſono toccare piu che in vn punto, perche ſe foſſe poſſibile che ſi toccaſſero in piu punti poniamo in r, & ſ; all'hora dall'r all'ſ, tirata vna retta, ella ſegaria ciaſcuno delli dui Cerchi, cioe paſſaria dentro all'vno, & dentro all'altro (per la 2. di queſto eſſendo eſſi dui punti r, & ſ, coſi nella circonferenza dell'vno, come nella circonferenza dell'altro) perilche eſſi dui Cerchi haueriano vna parte della loro ſuperficie comune ad ambidui, & pereiò ſi ſegariano inſieme, che è contro il ſuppoſito, volendo noi, che ſolo ſi tocchino, non ſi potendo dunque toccare in diuerſi punti, ſi toccaranno ſolo in vn punto, come ſi voleua moſtrare.

Propoſitione 14. Theorema 13.

SE nel cerchio ſi tirino linee, che ſiano eguali fra loro, elle di neceſſità ſaranno egualmente lontane dal centro; & conuerſamente le linee nel cerchio egualmente lontane dal centro, ſono di neceſsità eguali fra loro.

Nel cerchio A B D S, il centro del quale è il punto C, essendo tirate le rette A B, D S, che siano eguali fra loro si dice che elle sono egualmente lontane dal centro. Per dimostrarlo. Dal cētro C. alla A B, si tiri la perpendicolare C n, & anco alla S D. la perpendicolare C o, quali perpendicolari C n, C o, segaranno l'vna la A B, & l'altra la D S. in due parti eguali (per la 3. di questo) onde essendo la A B, eguale alla D S, ancora ciascuna delle due mità della A B, sara eguale a ciascuna delle due mità della D S. Hora dal centro ad vno delli estremi della A B, & anco ad vno delli estremi della D S. poniamo B, & S, si tirino le rette C B, C S, & si considerino li dui triangoli rettangoli C n B, & C o S, ne' li quali le due subtense C B, C S (semidiametri del cerchio) sono eguali fra loro, ma al quadrato dell'vna B C, è eguale la somma de dui quadrati di C n, n B, (per la 47. del primo) & al quadrato dell'altra C S, è eguale la somma de dui quadrati di C o, o S, per

ilche l'vna d'esse due somme è eguale all'altra, onde dall'vna somma leuato il quadrato di B r; & dall'altra somma il quadrato di S o, che sono eguali (per essere la B n, mita della A B. eguale alla o S, mita della D S) il restante dell'vna, che è il quadrato di C n, sara eguale al restante dell'altra, che è il quadrato di C o, per ilche la retta C n, sara eguale alla retta C o; Et perche la C n, è la distanza di A B al centro C, & la C o, è la distanza di D S, all'istesso centro C, (per la 13. diffinitione) & sono eguali, però è chiaro, che le due rette A B, D S, eguali nel cerchio, sono anco egualmente distanti dal centro. Sia hora conuersamēte, che le due rette A B, D S, nel cerchio (cioe che habbino i termini loro nella circonferenza) siano egualmente lontane dal centro, si dice, che di necessità elle saranno eguali fra loro. Per dimostrarlo. Ad esse A B, D S, dal centro C, si tirino le due perpendicolari C n, C o, quali (per la 3. diffinitione) saranno eguali fra loro, & (per la 3. propositione) diuideranno esse rette A B, D S in due parti eguali. Di poi dal centro C, ad vno de gli estremi di ciascuna d'esse A B, D S, poniamo al B, & all'S si tirino la C B, & la C S, & consideratti i dui triāgoli rettangoli C n B, C o S, perche il quadrato di C B, subtensa all'angolo retto in l'vno è eguale alla somma de dui quadrati de lati C n, n B. Et similmente il quadrato di C S, sottotendente all'angolo retto nell'altro è eguale alla somma de dui quadrati, de dui lati C o, C S, nell'altro, essendo l'vna subtensa C B, eguale all'altra subtensa C S, che sono semidiametri del cerchio, & però il quadrato dell'vna eguale al quadrato dell'altra, ne segue che la somma de quadrati di C n, n B. sia eguale alla somma de quadrati di C o, o S, ma il quadrato di C n, nell'vna è eguale al quadrato di C o, nell'altra (per essere dal supposito la distanza C n, eguale alla distanza C o.) però anco il restante quadr. di n B, nell'vna sara eguale al restante quadrato di o S, nell'altra, & perciò la n B, sara eguale alla o S (che i quadrati eguali hanno ancora i lati loro eguali) onde la totale A B doppia alla sua mita n B, sara anco eguale alla totale D S doppia alla sua mita o S Et cosi è anco chiara, ò manifesta l'altra parte della propositione, cioe che le linee rette nel cerchio, se siano egualmente distanti dal centro, elle sono anco eguali fra loro.

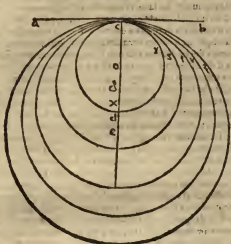
Propositione 15. Theorema 14.

NEL Cerchio la più lunga linea retta, che ui si possa tirare è il diametro, & dell'altre, che ui si tirino, quanto più sono propinque al centro, tanto più elle sono lunghe

Nel cerchio del centro O, siano le rette n ſ, d e, oltre il diametro a b, & anco le t u, t g, si dice ch: fra tutte, il diametro, cioe quella che passa per il centro è la lunghissima, che nel cerchio si possa tirare, & dell'altre, quella essere piu lunga che piu si auuicina al centro. Per dimostrarlo. Dal centro del cerchio alle due estremità di ciascuna delle linee dette si tirino i semidiametri o n, o ſ, & gli altri, & considerato il triangolo n o ſ, perche li dui lati semidiametri n o, o ſ, giunti insieme sono piu lunghi del restante lato, ò base n ſ, ancora il diametro a b, del cerchio, (eguale alli dui lati semidiametri n o, o ſ) sarà piu lungo della detta base, ò retta n ſ. Et cosi nel medesmo modo si prouarà il diametro del cerchio essere piu lūgo di qualsiuogli delle altre rette tirate nel cerchio. Ancora consideratti li dui triangoli n o ſ, d o e, perche i dui lati n o, o ſ, dell'vno semidiametri sono eguali alli dui lati d o, o e, dell'altro similmente semidiametri, ma l'angolo n o ſ, delli lati dell'uno è maggiore dell'angolo d o e. delli lati dell'altro, contenendolo in se, ancora la base n ſ, dell'vno, sara maggiore della base d e, dell'altro, che piu si allontana dal centro; Et similmente nelle due rette t u, t g, che hāno il termine t commune, la t u, che piu si auicina al cētro, sarà la piu lunga, Che consideratti i dui triangoli t o u, t o g, perche i dui lati semidiametri t o o u, dell'vno sono eguali alli dui lati semidiametri t o, o g dell'altro, ma l'angolo t o u, delli dui

che di necessità (come si mostrò nella 17 del 1.) douerà passare dalla bãda ò verso b, & r, cioe dalla banda dell'angolo n c o, che è acuto per essere parte del b c o, retto dalla construttione, & sia essa perpendicolare la o s, segando la circonferenza del cerchio nel punto i. Et considerato il triangolo o c s, che haueria l'angolo o s c retto, ne segue, che ciascuno de gli altri dui sia acuto, cioe minor di retto, onde il lato o c, che si opponeria all'angolo o s c retto, cioe maggiore di ciascuno de gl'altri dui, cioe maggiore dell'o c s saria piu lungo del lato o s opposto all'angolo acuto, ò minore o c s, ma il semidiametro o i, è eguale all'o c, però ancora la retta o i (che e parte della o s) saria maggiore della medesima o s, cioe la parte saria maggiore del tutto. ilche è impossibile, pilche impossibile è ancora che fra la retta c b, & la circonferenza del cerchio possa passare alcuna linea retta, onde se dal punto c, dalla banda del b, disotto alla b c, si tirarà alcuna linea retta, ella di necessità segarà il cerchio. Ancora si dice l'angolo curuilineo b c r, contenuto dalla retta b c, & dalla curua, ò circõferenza c r, esser minore di qualsiuogli angolo acuto rettilineo, ò vogliamo dire contenuto da due linee rette. Et che l'angolo curuilineo fatto dal semidiametro o c & circonferenza c r, del cerchio, è maggiore di qualsiuogli angolo acuto rettilineo, perche se dal punto c, si tirarà, o imaginarà alcuna linea retta c t, che facci angolo con la c b, sotto di essa b c, ella di necessità come si è mostrato, segarà il cerchio, cioe sarà anco disotto alla circonferenza c r, quale circonferenza verrà a restare fra esse due rette b c, c t, & però l'angolo fatto dalla c b, & circonferenza c r, sarà parte, & consequentemente minore d'esso imaginato, ò formato angolo rettilineo b c t. Ma l'angolo che resta oltre il rettilineo fino al retto b c o, cioe il formato dal semidiametro c t, & dalla linea retta c t, che si tirasse dal c, sotto alla c b, saria parte del curuilineo o c r, che resta nel retto detto b c o, leuatone il curuilineo b c r, essendo che l'arco c r, passarà disopra dalla imaginata c t, & percio essendo il tutto maggiore della parte, esso angolo curuilineo fatto dal semidiametro o c, & circonferenza del cerchio saria maggiore di qualsiuogli angolo acuto rettilineo fatto dalla o c, detta, & da qualsiuogli retta, che tirata dal c, sotto a la c b facci angolo acuto con essa c b, che è quanto si voleua mostrare. Si può anco dimostrare questa propositione ostensiuamente dicendo. Nel circolo sia il diametro c g, & il centro o, & dall'estremo c, del diametro, ad esso diametro si tiri la perpendicolare c b, si dice che ella sarà in tutto fuori del cerchio. Per dimostrarlo. Segnisi in essa qual punto si voglia, poniamo l's, & da esso s, fino al centro o, si tiri la retta s o, considerando il triangolo o c s, nel quale la somma de dui angoli o s c, o c s, è minore di dui retti, onde perche l'o c s è retto dalla construttione, ne segue che l'altro o s c, sia minore d'vn retto, onde il lato o s, opposto all'angolo retto maggiore o c s, saria piu lungo del lato o c, opposto all'angolo minore acuto o s c, ma la o i semidiametro è eguale alla o c, anc'ella semidiametro, perilche la o s, che è piu lunga della o c, sarà ancor piu lunga della o i, semidiametro, & perciò il punto s sarà fuori del cerchio; Et cosi tutti gl'altri punti che si segnassero, ò imaginassero nella c b, sariano medesimamente fuori del cerchio, & percio la retta c b, anc'ella sarà tutta fuori del cerchio. Qualsiuogli retta poi che disotto dalla c b si tiri dal punto c, di necessità segarà il cerchio, ne potrà passar fra essa c b, & la circonferenza del cerchio, perche tiratavi poniamo la c r, per dimostrare che ella segarà il cerchio o, tiraremo la o t dalla banda delle rette c b, c r, quale con il semidiametro o c, formi l'angolo c o t egual al b c r, & inteso così a questo c o t, come al b c r, giunto communemẽte l'angolo o c r, l'una somma ch'è delli dui angoli c o t, o c t sarà eguale all'altra somma che è delli dui angoli b c r, r c o, cioe che è il total angolo retto b c o & però la somma delli dui angoli c o t, o c t, sarà quanto un retto, pilche ella sarà minore di dui retti, onde (per la 5. petit.) le due rette c r, o t, allungate quãto ocorra dalla bãda di essi angoli, di necessità concorreranno insieme in alcun punto, hor sia in t, qual t si dice di necessità douer esser dẽtro del cerchio, perche nel triãgolo c o t, essẽdo li suoi tre angoli eguali a dui retti, & la somma delli dui c o t, o c t, quãto vn retto, il restãte angolo o t c, sarà il restante a dui retti, e però sarà retto, & però maggiore dell'o c t, perilche il lato o c, opposto all'angolo retto o t c, sarà piu lũgo del lato c t, opposto all'angolo o c t, minor del retto, & perciò la retta o t, nõ arriuarà alla circõferenza, essendo minor del semid. onde il punto t, sarà dẽtro al cerchio, & la retta c r, però di necessità segarà il cerchio, & così fra la c b, & la circõferenza del cerchio nõ potrà passare alcuna linea retta, onde l'angolo curuilineo fatto da esse c b, & circõferenza sarà minor di qualsiuogli angolo acuto rettilineo, restando l'angolo fatto dal diametro, & circõferenza, che è il restãte d'vn retto, maggior di qualsiuogli angolo acuto rettilineo. *Corellario*. Di qui si manifesta che la linea tirata da vn termine del diametro del cerchio perpendicolarmente, cioè ad angoli retti ad esso diametro tocca il cerchio, perche si è mostrato ch'ella cade, o sta fuori del cerchio, & perciò tocca il cerchio solo in quel punto estremità del diametro, onde se dato vn pũto c, nella circonferenza del cerchio si vorrà di li tirare vna linea retta che tocchi il cerchio, tiraremo dal dato punto c, al centro o, la retta, o semid. c o, & ad esso dal c, tiraremo vna perpendicolare a c b, che questa toccarà il cerchio nel punto c, dato.

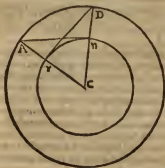
L'angolo

L'angolo c b r, curuilineo fatto dalla toccante c b, & circonferenza del cerchio, che si chiama angolo della contingentia (chiamandosi l'altro curuilineo o c r, fatto dal diametro, & dalla circonferenza angolo del semicircolo) se bene è minore di qual si vogli angolo acuto fatto da linee rette, è nondimeno anc'egli essendo quantità diuisibile in infinito in altri angoli curuelinei; Che hauendo l'angolo b c r, fatto dalla b c, perpendicolare al semidiametro o c, & dalla circonferenza del suo cerchio, se allungato il semidiametro c o, verso il centro, o, & sopra ad esso allungamento preso vn'altro centro poniamo il g, & con il semidiametro g c, formato vn cerchio la sua circonferenza, c s, passarà frà la retta c b, & la circonferenza c r, del cerchio minore, onde ella diuiderà l'angolo b c r, nelli dui b c s, della c b, & circonferenza c s, (che anc'egli è angolo della contingentia rispetto al cerchio di circonferenza c s,) & s c r, fatto dalle due circonferenze de cerchi. Et così pigliando altri cerchi sull'allungamento della c o, & facendo altre circonferenze, che arriuino al punto c, si verranno à fare altre diuisioni, & in infinito dell'angolo detto b c r, della contingentia, ò di qual si vogli altro angolo della contingentia proposto.

Di qui si conosce, che gl'angoli della contingentia sono solamente eguali quando le linee rette toccano circonferenze di Cerchi eguali, & che quanto più i circoli sono piccoli tanto più gl'angoli della contingentia sono grandi, ò maggiori, restendo poi l'angolo del semicircolo, che è il resto fino ad vn retto tanto più piccolo, ò minore; Et conuersamente quanto più i cerchi sono grandi all'hora tanto più gl'angoli della contingenza douentano piccoli, restando poi tanto più grandi gl'angoli del semicircolo. Si può anco formare vn'angolo curuilineo con due circonferenze, ò archi di cerchi eguali, quale angolo sarà eguale ad vn'angolo retrilineo dato. Che essendo dato l'angolo rettilineo a c r, dalle sue rette si piglino, ò seghino principiando dall'angolo c, due parti eguali, & siano c a, c r, sopra à ciascuna delle quali presa per diametro si formi vn mezo cerchio; che all'hora l'angolo curuilineo g c n, contenuto dalli dui archi di circonferenza sarà eguale al rettilineo a c r, dato: Perche essendo l'angolo g c a, dall'vn semicircolo eguale all'angolo n c r, dell'altro semicircolo (che essi dui semicircoli dalla construttione sono eguali) à ciascuno d'essi giunto comunemente l'angolo curuilineo a c n, nelle due prime figure, l'vna somma, che è l'angolo curuilineo g c n, sarà eguale all'altra somma, che è l'angolo rettilineo a c r, dato; Ouero da ciascuno delli dui angoli g c a, n c r, cauato comunemente l'angolo curuilineo o c n, nella terza figura l'vn restante, che è l'angolo curuilineo g c n, sarà eguale all'altro restante che è l'angolo rettilineo a c r, dato.

Propositione. 17. Problema. 2.

DA vn dato punto si può tirare vna linea retta, quale tocchi vn circolo proposto.

Sia

Sia proposto il circolo r n, al quale dal punto dato A, si deua tirare vna retta contingente, ò toccante esso cerchio. Per farlo, Dal centro C, del cerchio proposto, al punto A, dato si tiri la retta C A,& presa come semidiametro,& per centro il centro C, detto si formi il circolo A B, & ad esso semidiametro C A, dal punto r, doue egli sega il cerchio proposto se li tiri vna perpendicolare fino alla circonferenza del cerchio A D, (ò da vna banda,ò dall'altra,come ci piaccia,) & segnato il punto D, doue ella arriua alla circonferenza da esso al centro C, si tiri la retta D C, segnando il punto n, doue ella sega il cerchio proposto, dal qual punto n, all'A, dato si tiri la retta n A, che ella sarà la contingente il cerchio, che comincierà dal punto dato A. Per dimostrarlo. Considerati i dui Triangoli C n A, C r D, li dui lati C n, C A, dell'vno sono eguali alli dui lati C r, C D, dell'altro(il C n,al C r,che sono semidiametri del cerchio proposto; & il C A, al C D, che sono semidiametri del cerchio maggiore A D,) & l'angolo C, contenuto dalli dui lati detti dell'vno, è eguale al l'angolo C, contenuto dalli dui latti detti dell'altro, perche egli è vn'angolo medesmo, ò comune ad am bi dui i Triangoli, onde (per la quarta del primo) ancora la base n A, dell'vno sara eguale alla base r D, dell'altro, l'angolo C A n, al C D r, & il C n A, al C r D, ma questo C r D, è retto dalla Constrùtione, (essendo tirata r D, perpendicolare alla r C,) però ancora il C n A, sarà retto; perilche la retta A n, che partendosi dal punto A, dato fa angolo retto con il semidiametro C n, del circolo proposto nella sua estremità n, toccarà il cerchio in esso punto n, (per il Corollario della anteeedente 16. propositione) che è quanto si voleua fare.

Se dato vna retta in vn cerchio poniamo la c n, si vorrà tirare vn'altra retta à quella equidistante, che sia contingente ad esso cerchio; noi dal centro del cerchio alla data a n, (allungandola se bisogni) tiraremo vna perpendicolare, & sia c r, quale si allunghi fino alla circonferenza del cerchio da quella banda doue si vuole tirare la contingente, cioe verso il punto r, come si vogli, & sia, che vi arriui in o, (ò in s.) Et dal punto o, (ò dall's,) al semidiametro c o, (ouero c s,) si tiri la perpendicolare q o p, (ò la g s t,) che ella sarà contingente il cerchio in o, (ouero in s,) & equidistante alla data a n, perche considerate le due a n, q p, segate dalla c o, che fa angoli retti con ciascuna d'esse, & perciò la somma delli dui angoli interiori r, & o, da vna banda (ò dall'altra) è eguale a dui retti, ne segue (per la 28. del primo) che esse due a n, p q, siano equidistanti fra loro; Et perche la p q, è perpendicolare al semidiametro c o, nel suo termine o, ella (per il corollario della anteeedente 16. propositione) è contingente il cerchio in esso punto o, Nel medesmo modo si mostrarà la g s, dall'altra banda essere equidistante alla istessa a n, & contingente il cerchio nel punto s.

Propositione. 18. Theorema. 16.

SE vna linea retta tocchi il cerchio, & dal toccamento si tiri vna linea retta ella sarà perpendicolare alla contingente.

Sia la retta n r, toccante il cerchio nel punto a, al quale dal centro c, essendo tirata la retta c a, si dice ella essere perpendicolare alla toccante n r; Perche se per l'Aduersario ella non gli fusse perpendicolare, dal centro c, alla n r, tirando vna perpendicolare ella vi arriuaria in altro luogo, che nel punto a, hor sia che per l'aduersario vi arriuasse in r, che all'hora considerato il Triangolo c r a, che haueria l'angolo c r a, retto, & però maggiore del c a r, (in quanto importa l'a c r, douendo essi dui c a r, a c r, insieme essere eguali ad vn'altro retto per la 32. del primo) ne seguiria (per la 19. del primo) che il lato c a, ò semidiametro, (& pereiò anco il semidiametro c t,) sottotendente ò opposto all'angolo retto, maggiore fusse più lungo del lato c r, opposto all'angolo c a r, minore

minore, ma c s è parte di r s, però la parte saria maggiore del tutto, ilche è impossibile, onde anco è impossibile che alcuna linea tirata dal centro c, alla contingente n r, perpendicolarmente, cioè che facci angoli retti con essa n r, vi peruenga ad essa n r, in altro punto, che nel punto a, della contingentia, la c a dunque sarà perpendicolare alla n r, come si voleua mostrare.

Propositione 19. Theorema 17.

SE una linea retta, che tocchi alcun cerchio, & dal punto del toccamento ad essa toccante si tiri una perpendicolare dentro al cerchio alla circonferenza oppostali in questa perpendicolare sarà il centro del cerchio.

Sia la retta n r, toccante il cerchio in a, dal punto a, ad essa toccante si tiri nel cerchio la perpendicolare a c t, si dice in questa a c t, essere il centro del cerchio. Perche se per l'aduersario egli fusse fuori d'essa, poniamo che potesse essere il punto f, dal quale al punto a, del toccamento si tiri la retta f a, che saria semidiametro del cerchio, & (per la antecedente 18. propositione) saria perpendicolare alla toccante n r; onde l'angolo f a r, saria retto, ma ancora dalla constructione retto è il t a r, però essi dui f a r, t a r (per la 4. petitione) sariano eguali fra loro, ma l'f a r, è parte del t a r, perche la parte saria eguale al tutto, questo è impossibile, però impossibile è anco che il centro del cerchio sia fuori della perpendicolare t a, sarà dunque in essa t a, come si voleua prouare.

Propositione 20. Theorema 18.

NEL cerchio se sopra vn'istessa base di circonferenza, siano fatti dui angoli, l'vno al centro, & l'altro alla circonferenza, all'hora l'angolo al centro sarà doppio all'angolo, che è alla circonferenza.

Presa la circonferenza n t, per base, & dalli suoi termini n, & t, tirate al centro le due rette, ò semidiametri n c, t c, formando l'angolo n c t, al centro, & anco dalli medesimi termini n, & t, alla circonferenza, in alcun punto in essa segnato, & sia il punto a, tirate due rette n a, t a, formando l'angolo a, alla circonferenza, si dice a questo angolo n a t, della circonferenza essere doppio l'angolo n c t, del centro; Et perche può auenire, che vna delle due rette, quali formano l'angolo alla circonferenza si vnisca, ò vada sopra alla sua conterminale delle due che formano l'angolo al centro, poniamo la n a, con la n c, come appare nella prima figura, o che detta n a, seghi la n t, come si vede nella terza figura, o che ne alcuna delle due n a, t a, ne si vnisca ne seghi alcuna delle due n c, t c, come appare nella seconda figura si dimostrerà in ciascun caso auuenire quello che si propone. Et prima considerata la prima figura doue la retta a n è vnita con la c n, nella sua parte c n, inteso il triangolo t c a, nel quale li dui lati c t, c a, sono eguali perche vãno dal centro c, alla sua circonferenza, ne segue (per la 5. del 1.) che li dui angoli a, & t, sopra al a base a t, siano eguali l'vno all'altro, ma alla somma d'essi dui angoli è eguale il solo angolo n c t (per la 32. del 1.) che è estrinseco di detto triangolo t c a, del lato a c, allungato, & percio esso angolo n c t, che è l'angolo al centro sara doppio ad vn solo delli dui eguali a, & t, cioe sara doppio all'a, che è l'angolo alla circonferenza di base n t, comune ad esso a, & al c, dal centro, onde in questo caso è noto il proposito. Nel secondo caso, o figura Dal punto angolare a, della circonferenza all'altro punto angolare c, dal centro si tiri la retta a c, fino disotto al centro, doue si vogli, & sia in r; & si considerino i dui triangoli equicrurij a c n, a c t, ciascuno de quali hauerà il lato a c, allũgato in r; onde l'angolo n c r, nel primo sara estrinseco, & percio doppio all'n a c, che è vno delli dui intrinsici eguali ad esso opposti. Et similmente l'angolo t c r, nel secondo triangolo sara estrinseco, & percio doppio al t a c, che è vno delli dui intrinsici eguali ad esso opposti; perilche inteso l'angolo n c t al centro diuiso nelle sue due parti n c r, t c r, & similmente l'angolo n a t, alla circonferenza diuiso nelle due sue parti n a c, t a c: perche la prima parte n c r, dell'angolo al centro è doppia alla prima parte n a c, dell'angolo alla circonferenza, & la seconda parte t c r, dell'angolo al centro è doppia similmente alla seconda parte t a c, dell'angolo alla circonferenza, ne segue che anco la sõma delle due parti dell'angolo al cẽtro sia doppia alla somma delle due parti dell'angolo alla circonferenza, cioè che il totale angolo n c t, al centro sia doppio al totale angolo n a t, alla circonferenza. Finalmente

nel terzo caſo, o figura tiriſi pure dal punto a, angolare della circonferenza al centro c, la retta a c, allungandola di piu diſotto al c, quanto ſi vogli, & ſia in r; Et conſideriſi il triangolo equicrure a c n, che hauera il lato a c, allūgato in r, onde l'angolo n c r ſara eſtrinſeco d'eſſo, & pero doppio all'angolo r a n, che è vno delli dui intrinſici eguali a lui oppoſti. Et anco ſi conſideri il triangolo equicrure t c a, che hauera ſimilmente il lato a c, allungato in r, onde l'angolo r c t, ſara eſtrinſeco d'eſſo, & pero doppio all'angolo r a t, che è vno delli dui intrinſici eguali a lui oppoſti. Hora conſiderato l'angolo r c t diuiſo dalla retta c n in due parti che ſano l'vna, o prima l'angolo t c n noſtro al centro, & l'altra, o ſeconda l'angolo n c r, aggiuntoli. Et ſimilmente conſiderato l'angolo r a t, diuiſo dalla retta a n, in due parti che ſono l'vna, o prima l'angolo t a n, noſtro alla circōferenza, & l'altra, o ſeconda l'angolo n a r, aggiuntoli, perche ſi è moſtrato il totale angolo r c t, eſſere doppio al totale angolo r a t, & la parte r c n, dell'r c t, eſſere ſimilmēte doppia alla par r a n, dell'r a t, ne ſegue che anco la reſtante parte n c t, dell'r c t, cioe il noſtro angolo al centro ſia doppio alla reſtante parte n a t, dell'r a t, cioè al noſtro angolo alla circonſerenza, che è quanto ſi voleua moſtrare. In queſta vltima figura ſi ſuppone per noto, che ſe il tutto ſia doppio ad vno tutto, & vna parte del primo ſia doppia ſimilmente ad vna parte del ſecondo, che anco il reſtante del primo ſara pure ſimilmente doppio al reſtante del ſecondo, il che ſe bene è notiſſimo, è nondimeno dimoſtrabile nelle quantita in vniuerſale, come anco è quello che ſi è ſuppoſto nella dimoſtratione della 2. figura, cioe che ſe di dui tutti la prima parte dell'vno ſia doppia alla prima parte dell'altro, & la reſtante 2. parte dell'vno ſia ſimilmēte doppia alla reſtante 2. parte dell'altro, che anco l'vn tutto ſara pure ſimilmente doppio all'altro tutto, & queſto ſi dimoſtra vniuerſalmente in tutte le moltiplicita da Euclide nella 1. propoſitione del 5. libro, ma in tutte le ſorti di proportioni 12. 13. propoſ. come anco ſi dimoſtra l'altro ſuppoſito nella 5. propoſitione di eſſo 5. libro. Et perche le dimoſtrationi di detto 5. libro ſono vere in vniuerſale, oſeruono a ciaſcuna ſorte di quantitá continua, o diſcreta, & ſuſiſtono da ſe, ſenza hauer biſogno d'altra antecedente dottrina; ſi vede che ſaria molto a propoſito, che eſſo libro doue ſi tratta della quantitá in vniuerſale fuſſe il primo che ſi ſtudiaſſe, & intendeſſe, accomodandoui di mano in mano gli eſempij delli numeri per renderlo facile, & di qualche diletto, che il diletto fa che l'intelletto ſta attento, & non tralaſſa lo ſtudio. Et ſe preſa per baſe la mita della circōferenza, o piu della mita come la n o t, & ſegnato l'angolo n a t, nella circonferenza hauente per baſe tutto l'arco ſemicirconferentiale, o maggiore di ſemicirconferenza n o t, & anco dal cētro c, alli isteſſi termini circonferentiali n, & t, ſi tirino le rette ſemidiametri c n, c t, pure ſara vero che lo ſpatio al centro verſo o, ſara doppio a l'angolo n a t, alla circonferenza; Che dall'angolo a, al centro tirata la retta a c, & allungata oltre il centro quāto ſi uogli, & ſia in r; l'angolo n c r, eſtrinſeco del triangolo equicrure n c a, ſara doppio all'n a c, vno delli dui angoli eguali intrinſeci oppoſtoli, & ſimilmente l'angolo t c r, eſtrinſeco del triangolo equicrure a c t, ſara doppio al t a c, vno delli dui angoli intrinſeci eguali oppoſtoli. Onde il compoſto delli dui n c r, t c r, cioe tutto lo ſpatio al cētro verſo o, che ha per baſe l'arco n o t, ſara doppio al cōpoſto delli dui n a c, t a c, cioe a tutto l'angolo n a t, alla circōferenza, che ha per baſe il medeſim'arco n o t, che è quātó ſi voleua moſtrare. Ouero inteſo allungata la retta a c r, fino alla circonferenza in ſ. & inteſi li dui archi n ſ, ſ t baſi l'vno dell'angolo n ſ c, al cētro, & dell'angolo n a ſ, alla circonferenza, ſara per il 1. caſo, ò figura di queſta propoſ. l'n c ſ al cētro doppio all'n a ſ, alla circōferenza; & ſimilmēte per cauſa della baſe ſ t, ſara l'angolo t c ſ, al centro doppio all'angolo t a ſ, alla circonferenza, onde il cōpoſto delli dui angoli n c ſ, t c ſ, al centro, ſara doppio al cōpoſto delli dui angoli n a ſ, t a ſ, cioe al totale angolo n a t, alla circōferenza. Si può auertire, che hauendo veduto l'angolo n c t, al centro che ha per baſe l'arco n a t, eſſer doppio all'angolo n o t, alla circonferenza, che ha per baſe l'isteſſo arco n a t; Et anco il reſtante ſpatio n c t, al cētro verſo o, che ha per baſe il reſtante arco n o t, eſſer doppio all'angulo n a t, alla circonſerenza, che ha per baſe detto reſtante arco n o t, conoſciamo anco che la ſomma delli dui angoli, o ſpatij al centro, cioe l'n c t verſo a, & l'n c t, verſo o, è doppia alla ſomma delli dui angoli n a t, n o t, alla circonferenza, onde perche detti dui angoli, o ſpatij al centro, o intorno al centro, o punto c, importano quanto 4. retti, come s'è moſtrato nella 15. propoſ. del 1. lib. conoſciamo che li dui angoli detti alla circōferenza che hanno per baſe le due parti della circōferenza totale vengono ad importare la mita di eſſi 4. angoli retti, cioe importano, o ſono eguali a 2. angoli retti. Et perche le 2. rette a n, a t, che formano l'angolo n a t, alla circōferenza con l'altre due n o, t o, che formano l'altr'angolo n o t,

alte·

al restante della Circonferenza, vengono à formare, ò inscriuere nel cerchio vn Quadrilatero n a t o, perche in esso la somma de' dui angoli oppositi a, & o, importa quanto dui retti, & essendo, che li 4. angoli d'ogni quadrilatero in somma sono quanto 4. retti, ne segue, che la somma delli dui restanti angoli in esso opposti a n o, a t o, sia, ò importi quanto dui altri retti; Onde si conosce, che nelli quadralateri inscritti, ò formati nel cerchio, la sōma di qual si vogliono delli suoi dui angoli opposti è eguale a dui retti; Ma questo istesso si dimostra in altro modo nella 22. propositione del presente 3. libro, nondimeno si è voluto auertire lo studente, che anco di qui si può, come corollario, ò deriuatione, deriuarne essa cognitione.

Propositione 21. Theorema 19.

NEl Cerchio tutti li angoli fatti in vn medesmo Segmento, ò Portione sono egua li fra loro.

Nel cerchio g d n a, inteso il segmento, ò protione g a c d, & sia per hora maggiore del mezo cerchio siano fatti alla circonferenza li angoli a, & n, si dice essi essere eguale fra loro: Perche dal centro c, alli estremi g, & d, della base circonferentiale g d, d'essi angoli tirati i dui semidiametri c g, c d, formando l'angolo g c d, al centro, egli sarà doppio à ciascuno delli dui angoli a, & n, alla circonferenza (per la antecedente 20. propositione,) cioe ciascuno d'essi angoli a, & n, sara la mita dell'angolo c, & però essi a, & n, (per la 7. comune concettione) saranno egua.i fra loro. Et per la medesma causa quanti altri angoli si facessero nella medesma portione maggiore tutti sarebbono egua li fra loro, perche, cioe ciascun d'essi saria la mita dell'angolo c, al centro. Et se il segmento, ò parte di cerchio doue siano fatti li angoli a, & n, sia mezo cerchio, ò minore di mezo cerchio, pure dal centro c, tirati li semidiametri c g, c d, lo spatio, che è sopra ad essi semidiametri al centro sara (per la antecedente 20. propositione) doppio à ciascuno delli dui angoli, a, & n; & però (come anco si è detto nella Portione maggiore) essi dui angoli a, & n, ò quanti altri si facessero in detto semicircolo, ò portione minore saranno tutti eguali fra loro.

Propositione 22. Theorema 20.

DElli Quadrilateri inscritti nel Cerchio la sōma di qual si vogliono delli dui angoli in esso Quadrilatero opposti è eguale à dui angoli retti.

Nel cerchio a b c d, sia inscritto il Quadrilatero a b c d, si dice la somma delli dui angoli a, & c, in esso opposti. & similmente la somma delli dui b, & d, essere eguale à dui angoli retti, Per dimostrarlo. In esso quadrilatero si tirino i suoi dui diametri a c, & b d, & prima quanto alla somma delli dui angoli a, & c, cioe b a d, & b c d, considerisi il Triangolo b a d, che contiene l'angolo a, ouero il Triangolo b c d, che contiene l'angolo c, hor sia, che si pigli il Triangolo b a d, di questo l'angolo b, cioe a b d, che hà per base l'arco, ò circonferenza a d, è eguale all'angolo a c d, che hà per base l'istesso arco a d; Ancora nel medesmo Triangolo b a d, l'angolo a d b, che hà per base l'arco a b, è eguale all'angolo a c b, che hà per base l'istesso arco a b, perliche la somma delli dui angoli b, & d, del Triangolo b a d, detto sara eguale alla somma delli dui angoli a c d, & a c b, che è il totale angolo b c d, onde così a questo b c d, come alli dui, b, & d, detti del Triangolo preso b a d, gionto l'angolo b c d, (che è il restante angolo del Triangolo b a d,) la somma da vna banda, che è il composto delli dui angoli b c d, b a d, opposti nel quadrilatero detto, sarà eguale alla somma dall'altra banda, che è il composto delli 3. angoli b d a, del Tiangolo preso b a d, ma il composto di questi tre è (per la

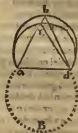
32. del

32. del primo) quanto dui retti, perilche ancora il composto delli dri a, & c, opposti del Quadrilatero sarà quanto, vogliamo dire sarà eguale medesmamente à dui angoli retti. Nel medesmo modo si dimostrarà che la somma delli altri dui angoli b, & d, del quadralitero frà loro opposti è similmente eguale à dui angoli retti preso hora, ò inteso il Triangolo a d c, doue è contenuto l'vno d'essi, cioe il d, Ouero preso il Triangolo a b c, doue è contenuto l'altro che è il b.

Hò fatte queste distintioni acciò si auertisca, che quando si vuol fare la dimostratione nelli dui angoli a, & c, opposti del quadrilatero, côuien pigliare, ò seruirsi d'vno delli dui Triangoli grandi, che hanno per base comune il diametro del quadrilatero opposto ad essi dui angoli, che hora è il b d, ma volendo fare la dimostratione nelli dui angoli b, & d, opposti del quadrilatero, conuiene seruirsi d'vno delli dui Triangoli a b c, ouero a d c, che hanno per base comune il diametro a c del quadrilatero, opposto ad essi dui angoli b, & d; Et quest'ordine è ben fatto à notarlo, & osseruarlo in tutte le Propositioni accioche non si cominci la dimostratione à caso, ò mentre si vuole dimostrare vna cosa non ne venga dimostrata vn'altra, della quale si poteua fare senza, seguendo poi à quella che si hà particolarmente à dimostrare: Ancora come si è prouato ò concluso che la somma di dui angoli opposti nel quadrilatero poniamo delli dui a. & c, è eguale à dui retti, di necessità ne segue che ancora la somma delli altri dui restanti b, & d, sia medesmamente eguale à dui retti, perche essende la somma delli 4. angoli del quadrilatero eguale à 4. retti (che inteso egli diuiso in dui Triangoli li 6. angoli d'essi sono eguali à 4. retti, & però alli medesimi 4. retti sono eguali li 4. angoli del quadrilatero che comprendono li 6. angoli delli dui Triangoli) se la somma di dui d'essi sia quanto 2. retti, la somma delli restanti dui sarà eguale al restante delli 4. retti che è similmente dui retti.

Propositione 23. Theorema 21.

SOpra ad vna istessa linea retta, & da vna medesma parte è impossibile constituire, ò formare dui Segmenti, ò parti di Cerchio che siano simili, & ineguali.

Sia la retta a b, sopra alla quale se per l'Aduersario si potessero fare due porlioni, ò parti di cerchio simili, & ineguali, sia che egli dica elle potere essere le due a b e, a b d; delle quali due portioni la cui conferenza dell'vna sarà intieramente diuersa, & fuori della circonferenza dell'altra, essendo che i dui cerchi delli quali elle sono portioni non si possono legare (per la 10. di questo) se non i dui luoghi che qui sono li dui comuni a. & d, Hora da vn'estremo, & sia l'a della retta a d, si tiri la retta a b, sino alla circonferenza esteriore, & dal punto r, doue ella sega la circonferenza interiore, all'altro estremo d, della a d, si tiri la retta r d, & anco da esso estremo d, al punto b, si tiri la retta d b, & perche per l'Aduersario dette due portioni sono eguali, ne seguiria (per la 8. diffinitione) che l'angolo a b d, fatto in l'vna portione, fusse eguale all'angolo a r d, fatto nell'altra portione, cioe l'estrinseco a r d, del Triangolo d b r, all'intrinseco opposto i r b d, il che è impossibile, perilche impossibile è anco che le due portioni fatte su la linea retta a d, dà vna medesma parte, douêdo essere simili (cioe douêdo riceuere dui angoli eguali) siano ineguali fra loro. Nemeno potrãno essere fatti nella medesima retta a d, due portioni simili, & ineguali da diuerse parti, cioe l'vna disopra, & l'altra disotto dalla a d, perche se supponeremo la fatta disotto essere la a B d, imaginandoci che ella si volti su la a d, & vada disopra come è la a b d, all'hora concluderemo come disopra che elle essendo ineguali non possono essere simili.

Propositione 24. Theorema 22.

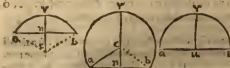
LI Segmenti, ò parti di Cerchio simili, e fatti sopra a linee rette eguali, sono eguali fra loro.

Sopra le due rette a b, A B, siano fatte le due portioni simili a b d, A B D, si dice elle essere eguali. Che

li. Che imaginato la retta A B, posta su la a b, si che il punto A si vnisca con l'a, ancora il B si vnirà con il b (per la egualità d'esse rette A B, a b, hora di necessità ancora l'arco A B D, voltato p il verso dell'a b d, si vnirà con esso precise, perche ne può l'uno restare dentro all'altro, come nella prima figura, douentando l'vna portione parte dell'altra, perche alhora sopra ad vn'istessa retta sariano due portioni, ineguali, & dal supposito simili, il che è impossibile per la antecedente 23. propositione. Ne meno può l'vn'arco, ò portione segare l'altra, poniamo in r, come nell'altra figura, o in altro modo, perche alhora i cerchi loro si segariano in piu di dui punti, che sariano li tre a, b, r, il che è impossibile (p la 10. propositione) onde ne segue che l'vn arco, & portione sarà precise vnita con l'altro, & però esse due circonferenze saranno eguali fra loro, Et perche anco esse due portioni, ò superficie staranno perciò precise vnite l'vna all'altra, senza eioe eccederli l'vno l'altra, ne segue medesimamente che l'vna portione sia eguale all'altra, che è quello che si voleua mostrare.

Propositione 25. Problema 3.

DATO un segmento, o parte di cerchio, descriuere il cerchio, del quale egli è segmento.

Sia data la portione a b c, da formare il cerchio di che ella è parte. Per far'o. Diuidasi la sua corda a b, in due parti eguali in n, & di li se li erga la perpendicolare n r fino alla circonferenza, & da esso punot r, della circonferenza ad vno delli dui termini della corda, & sia all'a, si tiri la retta r a, & dal punto istesso a, si tiri la a c dalla banda della portione, quale con detta a r, facci angolo eguale all'r, finche concorra, o seghi la r n, allungata se bisogni, & sia il segamento, ò concorso in c, che questo punto c, sarà il centro del cerchio, & semidiametro la c r, ouero c a, quali sono eguali. Perche da esso centro c, all'altro termine b, della corda a b, tirata la retta c b, & considerati i dui triangoli rettangoli a n c, b n c, perche i dui lati a n, n c, che formano l'angolo retto in l'vno, sono eguali alli dui lati b n, n c, che formano l'angolo retto in l'altro (che la a b, è diuisa per mezo in n, & la n c, è comune) ne segue che

anco alla subtensa, o base a c, dell'vno sia eguale la subtensa, o base b c, dell'altro, ma anco la r c, è eguale alla medesma a c (perche nel triangolo r c a, inteso base la r a, essendo li dui angoli a, & r sopra alla base eguali, ne segue (per la 6. del 1.) che anco li dui lati a r, c a opposti, o sottotendenti a detti dui angoli eguali, siano eguali fra loro) per il che esse tre rette c r, c a, c b, sono eguali fra loro, ma quando in vn cerchio sia vn punto, dal quale alla circonferenza tirate piu di due linee rette elle siano eguali, allhora (per la 9. di questo) esso punto è il centro del cerchio, però il punto detto c, dal quale tirate le tre linee c a, c r, c b, si è prouato elle essere eguali, è di necessità il centro del cerchio. Quando mò questo punto c, si troua essere fuori del segmento dato, si vede che tal segmento è portione minore del cerchio. Che se esso centro c, si trouasse dentro alla portione si conosce che ella è portione maggiore. Ma quando diuisa la corda a, per mezo in n, & tiratali la perpendicolare n r, ella si trouasse eguale alla n a (che cosi intesa la c a, base del triangolo r n a, l'angolo n r a, senza altra construttione saria eguale alla n r a) & però alla n b, allhora perche dal punto n, alla circonferenza sariano eguali le tre rette intese tirateui esso punto n, saria il centro del cerchio, & però la corda a b, saria il diametro, & cosi il segmento dato saria mezo cerchio. In altro modo, dato vna portione di cerchio (ò dato il cerchio) se ne può trouare il centro, & è che da vn punto a, segnato, doue si vogli nell'arco, o circonferenza tirare, o imaginate fino ella circonferenza doue si vogli due rette a s, a r, segnando i punti s, & r, termini d'esse nella circonferenza, si diuida ciascuna di esse in due parti eguali perpendicolarmente con le due rette o c, n c, allungate finche concorrano insieme, & sia in c, che questo punto c, sara il centro del cerchio, perche intesi i dui triangoli rettangoli c o s, c o a, perche i dui lati s o, o c, de l'vno sono eguali alli dui lati a o, o c, dell'altro ancora la subtensa tirata, ò imaginata s c de l'vno, sara eguale à la subtensa de l'altro, similmente imaginati i dui triangoli rettangoli r c n, a n c, perche i dui lati r n, n c de l'vno sono eguali alli dui lati a n, n c, de l'altro ancora la subtensa r c, de l'vno sara eguale à la subtensa a c, de l'altro, ma a l'istessa a c, è anco eguale la s c, come si è mostrato, però le

le tre rette ſ c, a c r, r c, ſono eguali fra loro, & perche eſſe vanno, ò ſono tirate da vn medeſmo punto c, nel cerchio, ne ſegue che eſſo punto c, ſia il centro del cerchio, & ſimilmente qualſiuogli delle tre rette dette, onde fatto centro il punto e, & ſemidiametro vna di eſſe poniamo la e ſ, girando il compaſſo con tale apertura egli di neceſſità paſſarà per le eſtremità a, & r de l'altre due linee, cioe per gli altri dui punti a, & r, ſegnati ne la circonferenza. Ouero ſi può dire, Perche eſſendo diuiſa la ſ a perpendicolarmente in due parti eguali da la a c, ne ſegue per il Corollario de la prima di queſto) che ne la diuidente a c, allungata quando, & quanto biſogni) ſia il centro del cerchio. Et per la medeſma cauſa eſſo centro doueta eſſere ancora ne l'altra n c, diuidente ſimilmente la a r, per mezo ad angoli retti, perilche douendo il centro eſſere in ciaſcuna d'eſſe due rette côuerrà ch'egli ſia nel punto a loro commune, ch'è il pũto c.

Propoſitione 26. Theorema 23.

SE in cerchi eguali, ouero al centro, ouero alla circonferenza ſiano fatti angoli eguali, è neceſſario eſſi ſtare ſopra archi eguali, cioè hauere archi, ò parti eguali di circonferenza per baſe.

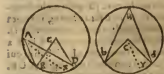
Nelli dui cerchi eguali ABD, a b d, ſiano al centro fatti i dui angoli A C B, a c b eguali, ſi dice che eguali ancora saranno i dui archi, ò circonferenze A B, a b, ſopra alle quali eſſi come ſopra a loro baſi inſiſtono. Per dimoſtrarlo. In ciaſcuno d'eſſi cerchi in alcun luogo dell'altro ſuo arco ſi ſegni vn punto, & ſiano il D. nell'vno, & il d, ne l'altro, & dal D a i dui termini A. & B. da la baſe A B, ſi tirino le due rette DA, DB, ò ſi imaginino ſegnate formando l'angolo D. alla circôferenza, in eſſo cerchio, che perciò egli ſarà la mità de l'angolo C, al centro (per la 20 di queſto) hauendo eſſi vna medeſma baſe AB, di circonferenza. Similmente ne l'altro cerchio dal punto d, alli a, & b, ſi tirino le rette d a, d b, formando à la circonferenza l'angolo d, che hauera la iſteſſa baſe a b, di circonferenza che ha l'angolo c, al centro, & però ſara anco egli la mita di eſſo angolo c. Et perche li dui angoli C. & c, dal ſuppoſito ſono eguali, ancora le loro mita D. & d ſaranno eguali fra loro, perilche (per la 10. diffinitione) li dui ſegmenti, ò portioni A D B, a d b (che riceuono eſſi angoli D, & d eguali) ſono ſimili. Hora inteſe le due corde A B, a b baſi di dui triangoli A C B, a c b, perche i dui lati (o ſemidiametri CA. CB dell'vno con il ſuo angolo A C B, ſono eguali alli dui lati, ò ſemidiametri c a, c b dell'altro, con il ſuo angolo a c b, ne ſeſegue che anco la baſe A B, ò corda, de l'vno, ſia eguale à la baſe, o corda, a b de l'altro; Onde i dui ſegmenti ADC, a d c, ſimili perche ſono ſopra a corde eguali AB, a b, ſaranno anco (per la 24. di di queſto) eguali l'vno à l'altro, & l'arco ADC de l'vno eguale à l'arco a d c de l'altro, perilche eſſi ſegmẽti eguali leuati da li ſuoi dui cerchi eguali, ancora li dui reſtanti ſegmenti inferiori AB, a b ſarãno eguali fra loro Et conſequentemente l'arco, ò circonferenza AB, ſara eguale à l'arco, o circôferenza a b. Ancora ne li dui medeſmi cerchi eguali ſiano inteſi fatti à la circôferenza li dui angoli ADB, a d b, quali eſſendo eguali, ſi dice che eguali anco ſarãno li dui archi AB, a b, ſopra i quali, come baſi loro ſtãno eſſi dui angoli. Perche dalli cẽtri C, & c alli eſtremi d'eſſe baſi tirate le rette CA, CB, in l'vno, & c a, c b in l'altro, queſti dui angoli C, & c al centro ſaranno eguali fra loro, eſſendo eſſi doppij a i dui eguali D, & d, à la circonferenza, & perciò inteſe le due corde AB, a b, & li dui triangoli ACB, a c b, ne li quali i dui lati, & loro angolo C, de l'vno ſono eguali a i dui lati, & angolo c, de l'altro ancora le due baſi, o corde loro AB, a b, ſaranno eguali fra loro, onde i dui ſegmenti ADB, a d b, che ſono ſimili (riceuendo eſſi in loro i dui angoli ADB, a d b, eguali dal ſuppoſito) eſſendo fatti ſopra a linee rette eguali AB, a b, ſaranno anco (per la 24 di queſto) eguali l'vno à l'altro (& coſi l'arco ADB de l'vno eguale à l'arco a d b de l'altro). & perciò inteſi leuati da i loro dui cerchi eguali; eguali ancora ſaranno i reſtanti, che ſono i dui ſegmenti A B, a b inferiori; & ſimilmente i dui archi loro A B, a b baſi delli detti angoli A D B, a d b, però eſſi angoli inſiſtono ſopra a baſi eguali, come ſi voleua prouare; Ouero breuemente ſi poteua dire. Fatti li dui angoli A C B, a c b, al centro, ſopra a gli archi A B, a b, perche eſſi dui angoli ſono eguali l'vno à l'altro (eſſendo doppij a i dui eguali D, & d, fatti à la circonferenza) ne ſegue per quello, che ſi è dimoſtrato di ſopra, che eſſi inſiſtano ſopra archi, ò baſi circonferentiali eguali, ſara dunque l'arco A B, eguale à l'arco a b, come occorreua moſtrare.

Quello

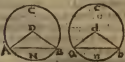
Quello che si dice auuenire nelli cerchi eguali medesmamente auuiene in vn sol cerchio (essendo ogni cerchio, ò altra superficie eguale à se stessa) che se nel cerchio D A B, a b d, siano fatti li angoli eguali A B D, a d b, alla circonferenza; Ouero li dui eguali A C B, a c b, al centro, ancora la base, ò circonferenza A B, dell'vno sarà eguale alla base, ò circonferenza a b, dell'altro, come è chiaro per questa 26. propositione, fingendosi, ò imaginandosi vn'altro cerchio eguale à questo, ò dui cerchi eguali ciascuno di loro à questo, & nell'vno inteso l'angolo A D B, ouero l'A C B, & nell'altro l'angolo a d b, ouero l'a C b.

Propositione 27. Theorema 24.

SE in cerchi eguali si piglino archi eguali li angoli fatti sopra essi archi, ò siano al centro, ò siano alla circonferenza saranno fra loro eguali.

Nelli cerchi eguali A B D, a b d, presi i dui archi eguali B D, b d, & sopra d'essi alli centri C, & c, fatti li dui angoli *B* C D, b c d, si dice essi essere eguali fra loro; Perche non possono essere ineguali, che se per l'Aduersario potessoro essere ineguali, l'vno poniamo il b c d, saria maggiore dell'altro B C D, hora sia che fusse maggiore nell'angolo r c d, (cioe che per l'Aduersario dal b c d, segato vna parte eguale al B C D, principiando poniamo dalla retta c b, ella sia la b c r,) & che perciò dicesse il b c r, essere eguale al B C D, che cosi all'hora ne seguiria (per la antecedente 26. propositione) che l'arco, ò base b r, dell'vno fusse eguale all'arco, ò base B D, dell'altro, ma al medesmo arco *B* D è (dal supposito) eguale il b d, però il b d, & il b r, sariano eguali fra loro, cioe al tutto b d, saria eguale la parte b r, il che è impossibile; però anco è impossibile quello da che questa impossibilità si deduria, cioe è impossibile li dui angoli B C D, b c d, di eguali basi essere ineguali fra loro, saranno dunque eguali come si voleua concludere; Ancora sopra alli istessi archi, ò basi siano fatti alla circonferenza li dui angoli *B* A D, b a d, si dice anc'essi essere eguali fra loro; Che se potessero essere ineguali dal maggiore, & sia che si dica per l'Aduersario essere il *B* A D, si seghi comincindo poniamo dalla retta A *B*, la parte B A r, eguale al b a d, che all'hora (per la antecedente 26 propositione) ne seguiria che l'arco B r, base del *B* A r, fusse eguale all'arco b d, base del b a d, ma al medesimo arco b d, dal supposito è anco eguale il *B* D. però il *B* r, che è parte del B D, saria eguale al *B* D, che è il suo tutto il che è impossibile, però è anco impossibile che li dui angoli *B* A D, b a d, siano inegnali, saranno due eguali come si voleua mostrare; Ouero mostrato prima che li dui angoli *B* C D, b c d, al centro sono eguali fra loro, ne segue che ancora le loro mita B A D, b a d, alla circonferenza siano similmente eguali fra loro, come occoreua mostrare. Et se prima si fusse prouato li dui angoli A, & a, alla circonferenza essere eguali fra loro, all'hora ne seguiria che similmente i doppij ad essi C, & c, al centro fussero similmente eguali l'vno all'altro.

Propositione. 28. Theorema. 16.

NElli Cerchi eguali se linee rette eguali seghino archi, essi archi saranno eguali il maggiore al maggiore, & il minore al minore.

Nelli dui cerchi eguali A C *B* N, a c b n; siano le due rette, ò corde A B, a b, eguali, si dice che anco l'arco A C *B*, maggiore dell'vno sara eguale all'arco a c b, maggiore dell'altro, & il minore A N B, al minore a n b, Per dimostrarlo. Dal centro D, dell'vno alli dui termini A, & B della corda A *B*, si tirino i dui semidiametri D A, D *B*, & similmente dal centro d, dell'altro alli termini a, & b, della corda a b, si tirino i dui semidametri d a b d b, & considerati i dui Triangoli A D *B*, a d b, perche i dui lati A D, *B* D, dell'vna

l'vno sono eguali alli dui lati a d, b d, dell'altro (essēdo semidia. di cerchi eguali,) & di più la base A B, dell'vno, eguale alla base a b, dell'altro (dal supposito) ne segue (per la 8. del primo) che ancora gl'angoli dell'vno siano eguali à gl'angoli dell'altro, ciascuno al suo corispondente, & però il D, al d; Perche dūque in questi dui cerchi eguali li angoli al centro D, & d, in essi sono eguali, ne segue (per la 26. di questo) che le circonferenze, ò archi A N B, & a n b, basi loro, ò sopra le quali essi insistono siano eguali fra loro; Onde il restante arco A C B, nell'vn cerchio sara similmente (per la 3. Comune Concessione) eguale al restante arco a c b, nell'altro, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 29. Theorema 26.

IN Cerchi eguali preso archi eguali, le rette, ò corde sottotendenteli sono eguali.

In questa Propositione che è il conuerso della antecedente 28. seruendoci delli medesimi dui cerchi d'essa sia che l'arco A C B, dell'vno, sia eguale all'arco a c b, dell'altro, che anco di necessità l'altro arco A N B, sarà eguale all'altro arco a n b,) si dice che la corda A B, sara eguale al a corda a b, Perche tirati i semidiametri come di sopra, & intesi i dui Triangoli A D B, a d b, essendo dal supposito l'arco A N B, doue insiste l'angolo D, al centro in l'vn cerchio eguale all'arco a n b, doue insiste l'angolo d, al centro, nell'altro cerchio, & però li dui lati D A, D B, con il suo angolo D, dell'vn Triangolo eguali alli dui lati d a, d b, con il suo angolo d, dell'altro Triangolo, ne segue (per la 4. del primo) che la base, ò corda A B, dell'vno sia eguale alla base, ò corda a b, dell'altro, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione. 30. Problema. 4.

POtiamo diuidere vn arco dato in due parti eguali.

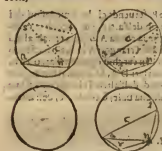
Sia dato l'arco A C B, da diuidere in due parti eguali. Per farlo. Tirata, ò intesa la sua corda, ò retta A B, ella si diuida per mezo ad angoli retti in D, (che si fa in pratica in qual si vogli delli modi mostrati nella 10. propositione del primo libro) con la D C, che peruenghi all'arco dato, & sia in C, che esso punto C, sarà il punto cercato della diuisione dell'arco dato: Perche intese dal punto c, alli dui termini A, & B, dell'arco dato, ò sua corda A B, tirate le due rette C A, C B, & considerati i dui Triangoli rettangoli A D C, B D C, in essi li dui lati A D, D C, dell'vno con il suo angolo retto, sono eguali alli dui lati B D, D C, con il suo angolo retto dell'altro, perilche la base, ò subtensa A C, dell'vno, sarà eguale alla base, ò subtensa B C, dell'altro, però (per la 28. di questo) li dui archi A C, B C, alli quali queste due rette (loro corde) eguali sottotendono saranno anc'elle eguali; ma essi archi A C, B C, eguali, sono le due parti in che l'arco dato è diuiso; però egli è diuiso in due parti eguali, come si era proposto di fare.

Propositione 31. Theorema 27.

DElli Cerchi, l'angolo fatto nel Mezo cerchio è retto, ma l'angolo fatto nella portione maggiore è acuto; Et l'angolo fatto nella portione minore, è ottuso. Ancora l'angolo della portione maggiore è maggiore del retto, Et l'angolo della portione minore del mezo cerchio è minore del retto.

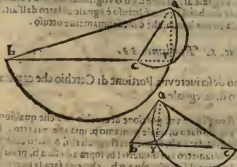
Sia il cerchio a d b n, il centro del quale è c, & il diametro la retta a b, Et nel mezo cerchio a n b, sia fatto l'angolo a n b, si dice egli essere retto; Per dimostrarlo, Dal centro c, al punto n, angolare sia tirato il semidiamet. c n, & allungato alquanto dall'n, vno delli lati angolari, poniamo l'a n, & sia in s, formando l'angolo estrinseco b n s, dal Triangolo a n b, quale è eguale alla somma delli dui intrinsici oppositi, a, & b, delli quali l'a, è eguale al c n a, nel Triangolo a c n, (per essere egli Equicrure che il lato

 ò se-

ò semidiametro c a, è eguale al c n, & n b è eguale al c n b nel triangolo n c b (perche è equicrure del lato c b, eguale al c n, onde il totale angolo a n b, fara eguale alli dui a. & b, a i quali ancò è eguale l'estrinseco b n f detto (per la prima commune concettione) l'angolo a n b, & l'estrinseco b n f, sono eguali fra loro, & considerato essi dui angoli eguali essere constituiti dalla retta b n cadente in n, sopra alla a f, ne segue (per la 10 diffinitione del 1.) che ciascun d'essi sia retto, l'angolo a n b, dunque fatto nel mezo cerchio è retto, come si voleua prouare. Ouero senza allungare alcun lato, ne intenderui angolo estrinseco si può dire à l'etche ne li dui triangoli equicrurij a c n, b c n, l'angolo a, in l'vno è eguale á l'a n c, & l'angolo b, in l'altro è eguale al b n c, al la somma delli dui a n c, b n c, cioe al totale angolo a n b, fara eguale la somma de li a, & b. & perciò così la somma di questi a, & b, come il solo a n b, fara la mita del composto delli tre a b, & a n b, ma questo composto (per la 32. del 1.) è quanto dui retti, però il solo a n b, fara la mita di dui retti, cioe fara retto, come si voleua mostrare. Ouero nel triangolo equicrure a c n, l'angolo n c b, estrinseco è doppio á l'a n c, vno delli dui intrinsici eguali a lui opposti, Et similmente nel triangolo equicrure b c n l'angolo n c a, estrinseco è doppio al angolo b n c vno delli dui intrinsici eguali a lui opposti, onde la somma (che chiamandola f.) delli dui angoli estrinsici al punto c, che è quanto dui retti (per la 13. del 1.) fara doppia à la somma delli dui angoli partiali all'n, cioe doppia al totale angolo n, ò vogliamo dire a n b, però se la somma f. è doppia ad n, fara n, conuersamente la mita di f, cioe la mita di dui retti, importara dunque quanto vn retto solo ò vogliamo dire fara retto, come si voleua mostrare. Ancora sia nel cerchio inteso la portione maggiore a n t, & inteso fatto in essa l'angolo a t n, si dice egli essere minore d'vn retto, cioe acuto, ma se l'angolo poniamo l'r, cioe a r n; sara fatto nella portione minore., si dice egli essere maggiore d'vn retto, cioe

ottuso. Per dimostrarlo, & prima ne la portione maggiore; Da vn termine de la corda a n, tale che da esso, per il centro tirando vna retta, ò diametro egli seghi vno de lati, ò linee, che formano l'angolo t, che hora sara il termine n, si tiri il diametro n c f, & dal termine f, al punto angolare, si tiri la retta f t, facendo nel mezo cerchio l'angolo f t n; quale perciò fara retto, & perche la linea t a, lo diuide nelle due parti f t a, a t n, & ogni parte è minore del suo tutto, si conosce l'a t n, che è il nostro angolo fatto ne la portione maggiore a t n, essere minore di retto, & pero acuto; Et ne la portione minore a r n, fatto l'angolo a n r, si dice egli essere minore di retto. Che per dimostrarlo. Da vno de li termini qualsiuogli de la corda a n, & sia l'a; per il centro c, tirato il diametro a c o, & dal suo estremo o, al pũto angolare r, tirata la retta o r, facendo nel mezo cerchio a r o; che perciò fara retto, si conosce; che il nostro a r n, lo contiene in se. & però è maggiore di lui, cioe del retto, perilche egli è ottuso, come si voleua mostrare. Facilmente ancora quando si sara mostrato che l'angolo fatto ne la portione maggiore è acuto, si mostrara che l'angolo poi fatto ne la portione minore è ottuso, che inteso il quadrilatero t a, r n nel cerchio sopponiamo (per la 12. propositione) che la somma di dui angoli in essi oppositi è quãto dui retti: onde il t, & r, giunti insieme fanno dui retti, ma il t, fatto ne la portione maggiore già si è prouato essere acuto minore d'vn retto, & pero li r, restante à li dui retti sara ottuso maggiore, cioe diretto. Ouero se prima hauessimo ne la portione minore prouato, che l'angolo r, è ottuso, ne seguiria che l'angolo t, restante a dui retti fatto ne la portione maggiore sara manco d'vn retto, & pero acuto. Ancora nel cerchio a f d o, intese le due portioni a n d maggiore, & a f d minore che hanno la corda a d, comune, da vno de termini d'essa poniamo dall'a, si tiri il diametro a c o, & dal punto o, altro estremo del diametro al d, altro estremo de la corda a d, si tiri la retta a d, allungandola alquanto dal d, & sia fino in r, che essa o d r, (per la 16. di questo) segarà il cerchio stando tutta la o d dentro al cerchio, & facendo con la corda d a l'angolo o d a, che fara retto (essendo fatto nel mezo cerchio a f d o) & perche esso angolo retto è parte del curuilineo a d o, fatto da la corda a d, & da l'arco d o, & il tutto è maggiore di qualsiuogli sua parte (è chiaro, che il detto angolo curuilineo a d o, che è angolo della portione maggiore a n o d, è maggiore d'un retto. Et quanto à l'angolo a d f, de la portione minore, perche egli è parte dell'angolo retto a d r, fatto da la corda a d, & dall'allungamento d r, (che è tutto fuori del cerchio) si conosce esso angolo a d f, dalla portione minore, come parte di retto essere minore d'vn angolo retto, che è quanto si voleua mostrare.

Corol.

Corollario.

Di qui si conosce, che vn'angolo di vn triangolo sia eguale alla somma, o composto delli altri dui, che esso angolo è retto, & cosi che quando il cõposto di dui angoli di vn triangolo sia eguale al restãte terzo angolo, allhora il cõposto di essi dui angoli è eguale ad vn'angolo retto. Di qui potiamo auuertire, che in prattica ne i triangoli si puo facilmente trouare il punto doue cada la perpendicolare, ò dentro su la base, ò se occorre, fuori nell'allungamento di essa cosi. Fatto diametro vno delli suoi dui lati si descriua in mezo cerchio, verso la banda, doue ha da cadere la perpendicolare, & nel punto doue questa circonferenza segarà la base, è allungamento di essa, cioe dall'angolo opposto peruerrà la perpendicolare, ò altezza del triangolo perche l'angolo fatto da essa, & dalla base (prolungata quando occorrã essendo formato nel mezo cerchio descritto sarà retto. Et quãdo si descriuessero dui mezi cerchi sopra i dui lati del triangolo allhora il punto del segamento delle loro circonferenze saria il punto istesso cercato doue peruenga la perpendicolare.

Propositione 92. Theorema 28.

Se vna linea retta tocchi vn cerchio, & dal punto del toccamento in esso cerchio si tiri vna retta, che lo seghi in due portioni, allhora li dui angoli, che la segante farà con la cõtingẽte l'vna da vna bãda, & l'a da la destra, sarà eguale all'angolo, che si facci nella portione alterna sinistra, & il sinistro sarà eguale all'ang. che si facci nella portione alterna destra.

Tocchi la retta g d, il cerchio nel punto t, & da esso si tiri nel cerchio la retta t u, che lo seghi ne le due portioni destra, & sinistra, ne le quali siano fatti dui angoli a, & o, si dice, che de li dui angoli fatti da la t u, & g d, il d t u destro sarà eguale all'a, fatto ne la portione sinistra, & il g t u sinistro all'o, fatto ne la portione destra. Per dimostrarlo. Si dice che la segante t u, ò passarà per il centro del cerchio, o nò, se vi passarà il cerchio sarà diuiso in dui semicircoli, & l'angolo o, come l'a, ò qual altro si facesse in qualsiuogli d'essi circoli sarà retto (per la antecedente 91.) ma ancora ciascuno de li dui angoli fatti da la cõtingente, & da la segante, che passando per il cetro è retto (per la 18. di questo) che essa segante allhora è perpendicolare à la toccante, & tutti gli angoli retti sono eguali, però nõ solo l'angolo d t u destro sarà eguale à l'a, ne la portione sinistra, & il g t u sinistro à l'o, ne la portione destra, ma anco il destro sarà eguale al destro, & il sinistro al sinistro. Hora sia che la segante t u, non passi per il cẽtro del cerchio, che cosi farà dui angoli ineguali con la toccante, & diuiderà il cerchio in due portioni eguali, nelle quali fatti gli angoli a, & o, si dice che à l'a fatto ne la portione sinistra sarà eguale il d t u, destro fatto da la segante t u, con la d t, & che à l'o sarà eguale il g t u. Per dimostrarlo, Dal punto t, del toccamento per il centro c, si tiri la t c f, diametro del cerchio, & dal suo termine f, all'u, che è l'altro termine de la segante si tiri la retta f u, & inteso il mezo cerchio, nel quale è fatto l'angolo f u t, esso angolo perciò è retto, onde nel triangolo f u t rettangolo la somma de gli altri suoi dui angolo g t f, fatto da la toccante g t, & dal diametro t f, da la medesma banda, onde cosi da essa somma come dall'angolo retto g t f, leuato il commune angolo u t f, il solo restante angolo u f t, sarà eguale al restante g t u; Ma considerata la portione maggiore t o f u, & in essa fatti li dui angoli u f t, & u o t, essi percio sono eguali fra loro, perilche l'an-

l'angolo g t u, che è eguale all'vno v ſt, farà eguale anco all'altro v o t, cioe il fatto nella portione deſtra maggiore,(& è acuto)è eguale all'alterno della ſegante,& toccante,che è anc'egli acuto. Ancora conſiderato il quadrilatero t a u ſ, fatto nel cerchio la ſomma delli dui angoli al & ſ, in quello oppoſiti è eguale à dui retti, & però è eguale alla ſomma delli dui d t u, g t u, fatti dalla ſegante t u,& toccante g d, ma al ſolo g t u, di queſti è eguale l'ſ. come ſi è dimoſtrato, però al reſtante a, farà eguale il reſtante d t u; Ouero mediante il quadrilatero t a u o, che è pur inſeritto nel cerchio, perche la ſomma delli dui angoli o,& a, in eſſo oppoſiti è eguale alla ſomma delli dui g t u, d t u; (che coſi l'vna ſomma come l'altra è eguale à dui retti) eſſendoſi prouato che l'o, è eguale al g t u, ne ſegue che il reſtante a, ſia eguale al reſtante d t u, ò vogliamo dire il d t u, all'a, ò t a u, cioe il fatto nella portione minore da vna banda, che è ottuſo è eguale al fatto dall'altra banda, dalla ſegante t u, & toccante t d, dall'altra banda, che è medeſimamente ottuſo.

Propoſitione. 5. Problema 33.

SOpra ad vna data linea retta ſi può deſcriuere vna Portione di Cerchio che capiſca, ò riceua vn'angolo ad'vn rettilineo dato eguale.

Sia data la retta a b. ſopra alla quale ſi vogli ſare vna portione di cerchio tale che qualſiuogli angolo, che ſi facci in eſſa ſia eguale all'angolo dato d, quale poniamo prima eſſere retto. Per farlo. Diuidaſi la data a b, in due parti eguali in ſ, & fatto centro il punto ſ, & ſemidiametro la ſ o, ouero ſ b, ſopra ad eſſa a b, preſa per diametro ſi deſcriua il ſemicircolo a n b, che egli ſara la portione cercata, perche ogni angolo che ſi facci in eſſo ſemicircolo ſara retto. (per la 31. di queſto,) & però eguale all'angolo retto dato d; Ma ſe l'angolo dato non ſia retto poniamo che ſia il d, acuto, all hora da vno dell'eſtremi della data a b, & ſia l'a, tiriſi vna retta a ſ, che con la data a b, facci angolo eguale al dato d,& à queſta a ſ, dal punto a, ſi tiri vna perpendicolare dalla banda della a b, & ſia la a n, facendo con la a b, l'angolo b a n, eguale al quale dall'altro eſtremo b, della data ſi facci l'a b n, dalla iſteſſa banda, tirando la b n, finche concorra con la a n, & ſia in n, che coſi inteſo il Triangolo a n b, perche in eſſo li angoli a, & b, ſopra alla inteſa baſe a b, ſono eguali dalla conſtrutione, eguali ancora faranno i lati a n, b n; Hora fatto centro il punto n,& ſemidiametro vna delle due rette eguali n a, n b, ſi facci il cerchio a t b, m, nel quale la data a b, lo diuiderà nelle due portioni a t b, minore, & a m b, maggiore doue è il centro del cerchio, qual portione maggiore è quella, che riceuerà li angoli acuti eguali ciaſcuno d'eſſi al dato d, perche inteſa allungata la ſ a, dalla banda di a, poniamo in r, perche eſſa ſ r, fa angoli retti con il diametro del cerchio (che la a n, quale viene dal centro ſi è fatta perpendicolare alla ſ a)è contingente al cerchio in à (per la 16 di queſto,)& perche da eſſo punto a, della contingentia ne cerchio è tirata la a b che lo ſega in due portioni ne ſegue (per la antecedente 32. propoſitione)che all'angolo acuto ſ a b,& però al dato d, ſara eguale ciaſcun'angolo che ſi ſara nella portione maggiore alterna a m b, Et ſe l'angolo d, dato ſia ottuſo, ſimilmente da vno eſtremo a, della data a b, ſe li congiunga, ò accompagni la a ſ, che con eſſa a b, facci l'angolo ſ a b, eguale al dato d, & à queſta a ſ, dal termine angolare a, ſi tiri la perpendicolare a n, (verſo la a b,) facendo con la a b, l'angolo b a n, eguale al quale dall'altro termine b, della data ſi facci l'angolo a b n, tirandola retta b n, & ſegnando il punto n, doue ella concorra con la a n, (perpendicolare alla a ſ) che coſi la n b, ſara eguale alla n a, (lati del Triangolo a n b, che hà dalla conſtruttione li angoli alla baſe a b, eguali) onde fatto centro il punto n, & ſemidiametro la n a. formando vn cerchio egli (ò vogliamo dire la circonferenza d'eſſo) paſſarà per il punto b, perilche queſto cerchio ſarà diuiſo dalla data a b, nelle due portioni a m b, a t b; Et perche la ſegante a b, ſi parte dal punto a, della contingentia della ſ r, (inteſa la ſ a, allungata alquanto dalla banda del punto a,) facendo eſſa contingente li dui angoli ſ a b, r a b, ne ſegue (per la antecedente 32 propoſitione) che ciaſcun'angolo fatto, ò che ſi faceſſe nella Portione ſuperiore maggiore a t b, ſia eguale all'angolo inferiore alterno acuto r a b, & che ciaſcuno che ſi facci nella Portione minore a m b, ſia eguale all'angolo ſuperiore alterno ottuſo ſ a b, & perciò eguale al dato, ottuſo d; al quale è eguale l'ſ a b, il è

b, si è dunque sopra alla data retta a b, fatta la portione, ò segmento di cerchio a m b, che riceue li angoli eguali al dato angolo d, come si voleua.

In altro modo ancora si può esequire questo Problema, ne occore sapere la qualità particolare dell'angolo dato, cioe se egli sia retto, ottuso, ouero acuto, Et è che A vn termine a, della data a b, si accompagni la retta a s, che con essa data facci l'angolo s a b, eguale al dato d; & dal medesimo termine a, alla a s, dalla banda della data a b, si tiri la perpendicolare a n, Ancora la data a b, si diuida per mezo in r, ergendoli di li vna perpendicolare finche concorra con l'altra perpendicolare a n, segnando n, nel punto del concorso, qual punto n, sarà lontano dalla estremità b, tanto, quanto è dalla a, cioe imaginata la rette n b, ella sarà eguale alla n a, (che intesi i dui Triangoli rettangoli a r n, b r n, i dui lati r b, r n, dell'vno sono eguali alli dui lati r a, r n, dell'altro; perilche la base n b, dell'vno sarà eguale alle base n a, dell'altro,)& fatto centro esso punto n, & semidiametro la n a, si facci vn cerchio, la circonferenza del quale passarà per il punto b, & la a s, che fa angolo retto, ò stà perpendicolarmente con il diametro del cerchio sarà toccante esso cerchio nel punto istesso a, essendo la data a b, segante esso cerchio, però la portione alterna a m b, riceuerà gl'angoli eguali all'angolo s a n, & però eguali al d, dato: Et quando occorresse che fatto l'angolo s a b, della data a b, & della tirata, a s, eguale all'angolo d, dato, & à questa a s, dall'a verso la a b, tirata vna perpendicolare ella andasse precise sù la a b, & percio che la a b, fusse ella perpendicolare alla a s, onde l'angolo s a b, & però il d, dato, fusse retto; all'hora sopra alla data a b, fatto vn mezo cerchio si haueria il proposito, poiche già si è mostrato, che gl'angoli fatti, ò che si faccino nel mezo cerchio sono retti.

Propositione 34. Problema 6.

DA vn dato cerchio segare vna Portione tale che gl'angoli che si faccino in essa siano eguali ad vn'angolo dato.

Per segare dal cerchio dato vna portione che riceua gl'angoli eguali all'angolo d, dato tirisi vna retta contigente il cerchio (per la 17. di questo,) & sia la n a r, che lo tocchi nel punto a, dal quale nel cerchio si tiri vna retta, quale con vna delle due parti della toccante poniamo con la parte a n, facci vn'angolo eguale al dato angolo d, & sia la a c, peruenēdo alla circonferēza in c, segandolo nelle due portioni a m c, a s c, delle quali la a s c, è alterna cioe dall'altra banda, rispetto all'angolo n a c, & però essa portione riceuerà gl'angoli eguali all'n a c, (per la 32. di questo,) & percio eguali al dato d, che è quanto si voleua fare.

Propositione 35. Theorema 29.

SE due linee rette si seghino fra loro in vn Cerchio il dutto, ò rettangolo delle due parti dell'vna sarà eguale al dutto, ò rettangolo delle due parti dell'altra.

Sia che nel cerchio a b r d, le due rette a r, b d, si seghino: Si dice che il rettangolo delle due parti dell'vna è eguale al rettangolo delle due parti dell'altra. Per dimostrarla. Sia prima che ambedue esse rette passino per il centro del cerchio (che anco, ò vna sola, ò nessuna d'esse vi potria passare) all'hora elle segandosi scambieuolmente in esso centro, l'vna, & l'altra serà segata in due parti eguali, & ciascuna delle due parti dell'vna sara eguale à ciascuna delle due parti dell'altra, che tutte quattro esse parti saranno semidiametri eguali fra loro; Onde il dutto del semidiametro b c, nel c d, che sono le due parti dell'vna sara eguale al dutto del semidiametro a c, nel c r, che sono le due parti dell'altra. Et se vna sola delle due rette che si seghino passi per il centro, ò che ella segara l'altra in due parti eguali, Ouero in due ineguali, sia prima che la seghi in due parti eguali in r, & però ad angoli retti (per la 3. di questo) essendo g d, la segata, & la a c n, la passante per il centro, & del centro c, ad vno delli estremi della g d, poniamo al d, si tiri, ò imagini il semi-

diametro a d, & confiderata la retta a n, diuifa in due parti eguali nel centro c, & in due parti ineguali nel punto r, del fegamento, ne fegue (per la 5. del fecōdo) che il rettangolo de le parti ineguali a r, r n, infieme cō il quadrato de la c r, che è fra le fettioni fia eguale al quadrato de la mità d'effa linea, che è il femidiametro a c, ouero c n, del cerchio, & però eguale al quadr. del femidiametro c d, ma al medefmo quadrato del femidiametro c d (intefo fubtenfa à l'angolo retto c r d nel triangolo rettangolo c r d) fono eguali il quadrato di c r, & il quadrato di r d (per la 47. del 1.) onde anco il dutto di a r, in r n, con il quadrato di c r, fono eguale al quadrato di c r, & quadrato di r d; remoffo dunque da ciafcuna banda il commune quadrato di c r, il reftãte dutto di a r, in r n (che fono le due parti de la a n) fara eguale al reftante quadrato di r d, che è quanto a dire il dutto di r d, in r g parti eguali de la g d, & cofi è chiaro il rettangolo de le due parti de l'vna a n, effere eguale al rettangolo de le due parti de l'altra g d; Hor fia che la a n, paffante per il centro c, del cerchio non feghi la g d, in due parti eguali, ma in due ineguali nel pūto t, all'hora dal centro c, fi tiri à la g d, la perpendicolare c u, che (per la 3. di quefto) la diuiderà in parti eguali in u (ouero fi diuida la g d, in due parti eguali in u, & da effo punto u, al centro c, fi tiri la retta c u; che fara perpendicolare alla g d.) Ancora dal centro c, all'eftremo g, della g d, che è da la banda de la fua parte minore fi tiri il femidiametro c g. Et intefa la a r, diuifa in due parti eguali in c, & in due ineguali in t, fapiamo che il dutto di a t, in t n, parti inegual infieme cō il quadrato di c t, intermedia fra le fettioni è eguale al quadrato de la a c, mità di effa a n & però al quadrato di c g (femidiametro eguale ad a c) & però è eguale alla fomma delli dui quadrati di g u, c u, li quali fono eguali al quadr. di c g. Et nel triangoletto rettangolo c u t, al folo quadrato di c t fono eguali li quadrati di c u, t u, onde in vece del quadrato di c t, pofti detti dui quadrati di c u t u, haueremo il dutto di a t, in t n con il quadrato di c u, & quadrato di t u eguale à li quadrati di g u, t u; perilche da ciafcuna banda leuato il commune quadrato di c u; il rimanente da vna banda, che è il dutto di a t, in t n, & quadrato di t u; fara eguale al rimanente de l'altra che è il quadrato di g u; ma (per la 5. del 2.) al medefmo quadr. di c u, intefa diuifa la g d in due parti eguali in u, & in due parti ineguali in t, fono eguali il dutto di g t, in t d, parti ineguali; infieme con il quadrato di t u, che e fra le fettioni, però il dutto di a t, & t n, & quadrato di t u, fara eguale al dutto di g t in t d, con il quadr. di t u, onde leuato da ciafcuna banda il commune quadr. di t u, haueremo da vna banda il folo dutto di a t, in t n, che fara eguale al folo dutto di g t, in t d, che fi hauera da l'altra banda, cioe il dutto de le due parti de la a n, fara eguale al dutto de le due parti de la g d, come fi voleua moftrare. Ma fe ne l'vna, ne l'altra de le due rette fegantefi non paffi per il centro (o fia l'vna di loro diuifa per il mezo, o ambedue diuife in parti ineguali) come auiene ne le a m, p b, che fi fegano in t, alhora tirifi il diametro f c t r, che paffi per il punto t, del fegamento, & confiderate le due rette f c t r, & p t b, che fi fegano in t, de le quali l'vna, che è il diametro, f c t r, paffa per il centro c, ne fegue (per quello, che vltimamente fi è moftrato) che il dutto di p t, in t b, parti de l'vna fia eguale al dutto di f t, in t r parti de l'altra, ma al medefmo dutto di f t, in t r parti del diametro è anco eguale (per la medefma caufa di fopra moftrata) il dutto di a t, in t m, parti de l'a m; perilche (per la prima comune conceffione) ne fegue che al dutto di p t, in t b, fia eguale il dutto di a t, in t m; onde è manifefto, che quando in cerchio due linee rette fi fegano fra loro, come fi vogli, il dutto de le due parti de l'vna è eguale al dutto de le due parti de l'altra. Di qui fi può eftrahere vn modo di trouare la lunghezza del diametro del cerchio di qualfiuogli portione data mediante la notitia de la fua corda, & faetta, che faetta è quella che diuide la corda in due parti eguali ad angoli retti, & arriua alla fommità de l'arco diuidendolo anc'effo in due parti eguali, che data la portione f a t, la corda de la quale fia f t 24, & la faetta a r 18, facendo ò imaginandoci il cerchio totale f a t u, perche in effo la retta f t è diuifa per mezo ad angoli retti in r, da la a r ne fegue che quefta fegante, o diuidente a r, paffi per il centro, & fia parte del diametro, & imaginata effa a r, allungata fino alla circonferenza, & fia in urla a u, fara il totale diametro, onde intefe le due rette f t, & a u, che nel cerchio fi fegano in r, fappiamo che il dutto de le due parti de l'vna fara eguale al dutto de le due parti de l'altra, onde moltiplicando 12. f r via 12. r t, parti de la corda diuifa per mezo, il prodotto 144. fara eguale al dutto di a r 18. in r u, par

ti del diametro, onde partendo il prodotto 144. per il 18 a r, vno delli dui numeri, o saetta nota, l'auenimẽto 8. sara l'altro numero, o parte r u del diametro, il diametro dunque sara 18, & 8, cioe 26, & il semid. 13 però il centro è nella saetta a r, 5, disopra dal punto r, & la portione s a t è maggiore, come auuiene sempre che la saetta è maggiore della mità della corda; che quãdo gli fusse eguale la portione è mezo cerc. Et quãdo la saetta è minore della mità dela corda la port. è minore di mezo cerchio Ne le portioni dunque di cerchio misurata la corda, & la saetta (che è sempre parte del diametro) il prodotto de le due mità de la corda, o vogliamo dire il quadrato de la mita de la corda si parta per la saetta, & l'auenimento, che è l'altra parte restante del diametro, si giunga alla saetta che la somma, o cõposto sara il diametro del cerchio continente la portione

Propositione 36. Theorema 30.

SE da vn punto segnato fuori d'vn cerchio ad esso cerchi si tirino due linee l'vna che lo seghi, & l'altra che solo lo tocchi allhora il dutto, ò rettangolo della totale segante ne la sua parte esteriore, che è fra il punto, & la circonferenza conuessa, sarà eguale al quadrato della toccante.

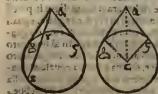
Dal pũto p, fuori del cerchio o r, ad esso cerchio siano tirate la retta p u r, che seghi il cerchio & la p o, che solo lo tocchi in o, si dice che al quad. di questa toccante p o, è eguale il dutto della totale segãte p r, nella sua parte esteriore, o fuori del cerchio p u. Per dimostrarlo. Sia prima che la segante p r, passi per il centro e del cerchio, che anco puo andare altroue, & da esso centro e si tiri, ò imagini al punto, ò dal toccamẽto de la p o, la retta, ò semid. e o, che sara perpendicolare, ad essa e o, per la 18. di questo, & intesa la segante p r, essere cõposta da la u r, diametro diuiso p mezo nel centro e, & da la u p, cioe inteso la r u diuisa in dui parti eguali in e, & ad essa r u, giunta in lungo la u p, ne segue (per la 6. del 2.) che il dutto di tutta la retta p r, cosi cõposta ne la p u, aggiunta insieme con il quad. de la e u, ò e r, mità de la prima linea r u, siano eguali al quad. de la e p contenuta da la e u mità de la prima linea, & dalla u p aggiunta; Ancora al quad. della medesima e p sono eguali (per la 47. del 1.) i dui quadrati di p o, & o e, onde à quelli dui quadr. di p o, o e vengono ad essere eguali il dutto di p r in p u, & quad. di e u; ma il quad. di e u da questa banda è eguale al quadrato di e o, da l'altra banda, essendo cosi e o, come e u semidiametri; onde leuati essi dui quadr. vno da vna banda, & l'altro da l'altra, ne segue che il restante dutto di p r, in p u sia eguale al restante quadr. di p o, come si voleua mostrare. Ma se la segante p u r, non passi per il centro, alhora diuidasi la sua parte interiore u r, in due parti eguali in f, & dal centro e all'f, si tiri vna retta, che sara perpendicolare a detta u r (per la 3. di questo) ancora dal centro e, al punto o, della cõtingentia, & alli p, & u, si tirino le tre rette e o, e p, e u, delle quali le due e o, e u semidiametri, saranno eguali fra loro. Hora intesa la retta r u, diuisa per mezo in f, & ad essa giunto in lungo la u p, ne segue (per la 6. del 2.) che il dutto di p u, aggiunta ne la totale p r, insieme con il quadrato di f u, mità della diuisa r u, siano eguali al quadrato di p f, composta da la mità della u r, & dalla aggiunta p u; onde da ciascuna banda giõto il quadrato di f e, si haverà il dutto di p u in p r cõ li dui quadrati di f u, & e f, & però con il solo quadrato di e u, à quelli di f u, & e f eguale, eguali alli quadrati di p f, & d f, & però al solo quadrato di e p, & però alli dui quadrati di e o, p o eguali al quadrato di p e. cioè il dutto di p u, in p r, con il quadrato di e u, saranno eguali al quadrato di e o, con il quadr. di p o; onde da vna banda leuato il quadrato di e u, & dall'altra il quadrato di e o, che sono eguali, ne segue, che il rimanẽte dutto di p u, in p r, da vna bãda sia eguale al quadrato di p o, rimanẽte dall'altra, cioe che al quadrato della toccante p o, sia eguale il dutto della segante p r, nella sua parte esteriore p u, che è quanto si voleua mostrare. Si potrebbe anco in questa vltima parte dire cosi. Per mostrare, che non passando la p u r, per il centro, pure anco il dutto di essa nella sua parte esteriore p u, sarà eguale al quadrato della toccante p o. Tirisi dal punto istesso p, per il centro fino alla circonferenza del-

la p n e g,& diuisa la u r, parte interiore de la segante p r, in due parti eguali in t, tirandoui dal centro c, la c t, che sara perpendicolare ad essa u r,& dal centro c, al termine u, verso il p, di questa r u, tirata, ò imaginata la retta, ò semidiametro c n, diremo perche la retta, o diametro n g, è diuiso per mezo in c, & giunti in lungo la n p, ne segue, che il dutto di p g, totale in p n, aggiunta insieme con il quadrato di n c (mità del diametro n g) & però il quadrato di c u, alla c u eguale, sono eguali al quadrato di p c, composta da la mita c n, & dall'aggiunta p n; Ancora perche la u r, è diuisa per mezo in t, & ad essa è giunto in lungo la p u, ne segue che il dutto della totale p r, nell'aggiunta p u, insieme con il quadrato de la mita u t, siano eguali al quadrato di p t, composta dalla mita t u, & dall'aggiunta p u, onde a ciascuna banda giunto il quadrato di t c, allhora il dutto di p r totale in p u, aggiunta insieme con li dui quadrati di t u, & t c, & pero con il solo quadrato di c u, a questi dui quadrati eguale, saranno eguali al quadrato di p t, & quadrato di t c, & però il solo quadrato di p c, a questi dui di p t, & t c eguale, ma al medesmo quadrato di p c, si è mostrato, essere anco eguale il dutto di p g, in p n, con il quadrato di c u, però il dutto di p r in p u, con il quadrato di c u, saranno eguali al dutto di p g in p n, con il quadrato di c u, onde da ciascuna banda leuato il comune quadrato di c u, restarà il solo dutto di p r, in p u, essere eguale al solo dutto di p g, in p n. Ma ancora al dutto di p g, passante per il centro, in p n, sua parte esteriore, si è mostrato di sopra essere eguale il quadrato della toccante p o, però ne segue che al medesimo quadrato della toccante sia eguale il dutto di p r, totale segante che non passa per il centro, nella sua parte esteriore p u, onde è chiaro quello che si voleua mostrare.

Corollario Primo.

DAlle superiori dimostrationi si manifesta, che se da vn punto come si vogli segnato fuori de la circonferenza d'vn cerchio si tirino quante linee rette si voglino che seghino il cerchio arriuando all'altra parte concaua, interiore della circonferenza, il rettangolo fatto da vna di esse seganti ne la sua parte esteriore sara eguale, al rettangolo fatto da qualuuogli dell'altre similmente ne la sua parte esteriore. Perche ciascuno di essi rettangoli è eguale al quadrato della retta che partendosi dal medesmo punto toccasse, o fusse contingente ad esso cerchio.

Corollario Secondo.

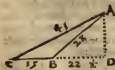
SI conosce ancora che se da vn'istesso punto segnato fuori del cerchio, si tirano due rette cótingente il cerchio (vna cioe da vna banda, & l'altra da l'altra) elle saranno eguali fra loro, che poniamo le due contingenti a g, a G, sono eguali fra loro, perche imaginato dal medesmo punto a, tirata la a r f, segante il cerchio, al dutto d'essa a f, nella sua parte esteriore a r, è eguale il quadrato di ciascuna delle due toccanti a g, a G, pe rò esse due toccãti sono anco eguali fra loro, il che anco si potria mostrare cosi. Dal centro c, alli dui punti g, & G, si tirino i dui semidiametri eguali c g, c G, che percio venendo dal centro saranno perpendicolari l'vna al'a toccante a g, & l'altro all'altra toccante a G, & imaginato dal punto a, al centro c, tirata la a c, & intesi i dui triangoli rettangoli c g a; c G a; perche il lato g c, & subtensa c a, dell'vno è eguale al lato G c, & subtensa c a dell'altro, ancora il restante lato g a dell'vno sara eguale al restante lato G a de l'altro, che tanto resta a cauare il quadrato di g c, dal quadrato c a, quanto resta a cauare dal quadrato istesso di c a, il quadrato di G c, eguale al quadrato di c g) cioe la toccante a g, sara eguale alla toccante a G. Ouero imaginato la retta g G, tirata da vn punto g, dell'un toccamento all'altro, & inteso il triangolo g c G, che sara equicrure hauendo i dui lati semidiametri eguali ne segue (per la 5 del primo) che li dui angoli sopra alla base g G, d'esso siano eguali, onde cauati l'vno dall'angolo retto a g c, & l'altro, dal retto a G c, i dui restanti angoli a g G, a G g, sopra alla base g G del triangolo a g G, saranno eguali l'vno all'vno, & però (per la 6 del 1.) i suoi dui lati a g, a G, che sono le due toccanti il cerchio saranno eguali fra loro. Onde si conosce ancora che se da vn punto segnato fuori d'vn cerchio ad esso si tirino due rette eguali, se l'vna toccara il cerchio, l'altra ancora similmente toccara, ò vogliamo dire sara contingente ad esso cerchio, che nella figura superiore essendo dal punto a, tirata la a g, contingente al cerchio, & anco al medesmo cerchio tirata la a G, alla a g eguale conosciamo ancor questa essere contingente al cerchio; Perche imaginato dal punto a, al cen

tro tirata la c a, & intesi i dui triangoli a g c, a G c, perche i tre lati dell'vno sono eguali alli tre lati dell'altro, ciascuno al suo corrispondente, ancora (per la 8. del 1.) ciascun'angolo dell'vno, sara eguale a ciascun'angolo suo corrispondente dell'altro, & però l'angolo a G c, sara eguale all'a g e; ma questo è retto (fatto dal diametro, ò semidiametro, & dalla contingente a g) perilche retto ancora sarà l'a G c; onde (per la 18. di questo) la a G, sara contingente al cerchio.

Propositione 37. Theorema 31.

SE da uno punto segnato fuori d'un cerchio si tirino due rette, l'una segante il cerchio, & l'altra ad esso applicata; & sia il dutto di tutta la segante nella sua parte esteriore eguale al quadrato della applicata, essa applicata sarà di necessità contingente al cerchio.

Dal punto p siano tirate al cerchio le due rette p r n, segante il cerchio in r, & p m ad esso applicata, & sia il quadr. della applicata eguale al dutto della segante p n, nella sua parte esteriore p r, si dice che di necessità la p n, applicata sara cōtingente il cerchio. Per dimostrarlo. Dal centro c, al punto p si tiri la retta c p (che se la segāte passasse per il centro, a noi bastaria di considerare quella sua parte, che fusse fra il cētro c, & il punto p.) Ancora dal punto p si tiri la p o, cōtingente il cerchio dall'altra banda, che cosi il quadrato d'essa sara eguale (per la antecedente 36. propositione) al dutto di p n segante nella sua parte esteriore p r, ma ancora al dutto della medesma p n, nella sua parte p r, è eguale (dal supposito) il quadrato della p m, però ne segue che il quadrato della p m, & il quadrato della p o, siano eguali l'vno all'altro, & perciò anco che la retta p m sia eguale alla retta p o. Hora dal centro c alli dui punti m, & o, imaginati, ò tirati li dui semidiam. che sono eguali, & il c o, fara angolo retto con la contingente p o (per la 18. di questo) intesi mò i dui triangoli p m c, p o c, si vede che ciascun lato dell'vno è eguale a ciascun lato dell'altro, perilche (per la 8. del primo) ciascuno de gli angoli dell'vno sara eguale a ciascuno de gli angoli dell'altro corrispondenteli, onde all'angolo p o c, che è retto, sara eguale il p m c. però questo p m c, sara retto anc'egli, onde perche la retta c m, che viene dal centro fa angolo retto con la p m, applicata, ne segue (per il Corollario della 16. di questo) che la p m, tocchi, o sia contingente al cerchio, che è quanto si voleua mostrare.

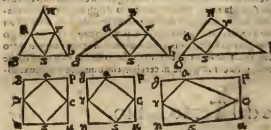
Il Fine del Terzo Libro.

Questo Triangolo và alla duodecima propositione del secondo Libro à facciate 99.

DE GLI ELEMENTI DI EVCLIDE

Libro Quarto.

N questo Quarto Libro doppo le Diffinitioni ad esso pertinenti si mostra come dentro ad vn cerchio si accommodi vna retta eguale ad vna data, quale però non ecceda la lunghezza del suo diametro; Come a vn dato cerchio si inserina & circonscrina vn triangolo equiangolo ad vn proposto triangolo. Et come a vn dato triangolo si inserina, & circonscriua vn cerchio. Et poi come al cerchio si inseriua, & circonscriua il quadrato. Et anco come al quadrato si circonscriua, & inserina il cerchio; Et seguendo all'altre figure regolari, cioe equilatere & equiangole come al cerchio si inseriua, & circnoscriua il Pentagono, & al Pentagono il Cerchio. Et come anco nel cerchio si inserina l'Esagono, & il Quindecagono, qual dottrina serue anco per inscriuere, & circonscriuere il cerchio, & l'altre figure regolari note fra loro, mediante la quale si può anco venire in cognitione delle regole numerali da trouare i lati, altezze, & grandezze delle figure, hauendo noto il diametro del cerchio, ò trouare il diametro del cerchio, hauendo noto il diametro della figura.

Diffinitione prima.

VNA figura rettilinea si dice essere inscritta in vn'altra figura rettilinea quando ciascun'angolo della inscritta tocca ciascun lato di quella, nella quale è inscritta.

Che inteso il triangolo a r s, egli si dirà essere inscritto nel triangolo n g b, perche ciascun angolo dell'a r s, tocca ciascun lato dell'n g b. Et cosi il quadrangolo a r s c, si dirà essere inscritto nel quadrangolo p g n u, perche ciascun' angolo dell'interiore minore a r s c, tocca ciascun lato dell' esteriore, maggiore p g n u.

Diffinitione seconda.

VNa figura rettilinea, conuersamente si dice essere descritta, o circōscritta intorno ad vn'altra figura rettilinea, quando ciascun lato della circonscritta tocca ciascun'angolo di quella intorno alla quale ella è descritta, o circonscritta. Che nelle figure superiori il triangolo n g b si dice essere descritto, o circonscritto al triangolo a r s, perche ciascun lato dell'esteriore maggiore n g b, tocca ciascun'angolo dell'interiore minore a r s. Et similmente il quadrato, o quadrangolo p g n u, si dice essere circonscritto all'a r s c, perche ciascun lato dell'esteriore maggiore p g n u, tocca ciascun'angolo dell'interiore minore a r s c, cioe di due figure tali la interiore si chiama inscritta, & la esteriore circonscritta.

Diffinitione terza.

VNa figura rettilinea si dice essere inscritta in vn cerchio quando ciascun'angolo della figura rettilinea tocca la circonferenza del cerchio Che la figura rettilinea pentilatera, cioe di cinque lati a r s c n, si dice essere inscritta nel cerchio a r s c, perche ciascun'angolo della figura tocca la circonferenza del cerchio.

Diffinitione quarta.

MA vna figura rettilinea si dice essere descritta, o circonscritta a vn cerchio quando ciascuno lato della figura rettilinea tocca la circōferenza del cerchio. Che il quadrangolo a r s n si dice essere circonscritto al cerchio e g m t, perche ciascun lato del quadrangolo tocca la circon. del cerchio.

Diffi-

Diffinitione Quinta.

VN cerchio si dice essere inscritto in vna figura rettilinea, quando la circonferenza del Cerchio tocca ciascun lato della figura rettilinea.

Che il Cerchio c g m t, si dice essere inscritto nel quadrangolo a n f r, perche la circonferenza del Cerchio interiore minore tocca ciascun lato del quadrangolo esteriore maggiore.

Deffinitione Sesta.

VN cerchio si dice essere descritto, ò circonscritto intorno a vna figura rettilinea quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun'angolo del rettilineo intorno al quale è circonscritto. Che il Cerchio a r f e n, nella figura superiore si dice essere circonscritto intorno alla figura rettilinea a r f e n, perche la circonferenza del Cerchio tocca ciascun lato d'essa figura interiore inscrittaui.

Diffinitione Settima.

VNa linea retta si dice essere accommodata, ò adattata in vn Cerchio, quando li dui estremi d'essa linea, siano nella circonferenza del Cerchio. Che la retta a b, si dice essere accommodata nel Cerchio a b c d, perche ciascuno delli suoi dui estremi a, & b, sono nella circonferenza del Cerchio, che ne la n o, ne la c u, non sono accommodate in esso Cerchio, perche non hanno i suoi estremi ambidui nella circonferenza del Cerchio.

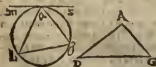
Propositione 1. Problema 1.

In vn dato cerchio accomodare vna linea retta data, che non sia maggiore del diametro.

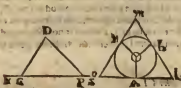
Nel dato Cerchio a b c, sia da accommodare la retta a b, quale non sia maggiore del diametro b c, del Cerchio, perche nel Cerchio essendo il diametro la maggior linea retta, che vi possa capire alcuna maggiore di esso diametro non vi si può accommodare. Et se la data fusse eguale al diametro, il diametro istesso sarà la retta accommodata. Ma se la data a b, sia minore del diametro, allhora tirato il diametro b c, da esso, cominciando da vn'estremo, & sia il b, segaremo la parte b r, eguale alla data a b, & fatto centro il medesimo estremo b, del diametro del Cerchio dato, secondo la lunghezza del b r; formaremo vn Cerchio, segnando il punto a, ò da vna banda, ò dall'altra, ò vogliamo dire ò di sopra, ò di sotto, doue egli seghi il Cerchio dato, & poi da questo punto a, al b, estremo detto (che è centro del secondo Cerchio) tiraremo la retta a b, quale sarà eguale alla data a b (che ciascuna d'esse è eguale alla b r) per la diffinitione del Cerchio, & per la 1. comune, ò cõceessione, & sarà accomodata nel Cerchio dato: pche ciascun de suoi dui estremi è nella circõferẽza del cerchio dato, che è quãto si voleua fare.

Propositione 2. Problema 2.

In vn proposto cerchio si può inscriuere vn Triangolo Equiangolo ad vn Triãgolo dato.

Sia il Cerchio a b g, da inscriuerui, ò formarui dentro vn triangolo equiangolo al Triangolo dato ABG. Per farlo. Tirisi da vn punto segnato nella circonferenza doue si uogli, & sia l'a, vna retta contingente esso cerchio, & sia la m a s, & dal punto a, della contingentia dentro al Cerchio fino alla circonferenza si tiri la retta a b, quale con la a m, sinistra facci angolo eguale al destro cioe al G, del triangolo dato; Et anco dal medesimo punto a, si tiri la retta a g, fino alla circoferenza, quale cõ la destra facci vn'angolo eguale all'angolo B, sinistro del triangolo dato, che cosi l'angolo b a g, intermedio sarà eguale all'angolo A. perche cosi li tre angoli al punto a, sono eguali a dui retti, come li tre del triangolo dato; Ancora dal punto b, nella circonferenza del cerchio al punto g, si tiri la retta b g, & sarà nel Cerchio inscritto il triangolo a b g, quale è equiangolo al dato A B G. Perche dal punto a, della contingentia, essendo tirata dentro al Cerchio la segante a b, che lo diuide nelle due portioni a u b, & a g b, l'angolo g, fatto nella portione destra sarà (per la trigesima seconda del terzo) eguale all'angolo m a b, sinistro, fatto dalla segante a b, & parte sinistra della contingente a m, ma ancora al medesimo angolo m a, è eguale l'angolo G, del Trian-

Triangolo dato, che l'm a b, si è fatta eguale al G, però l'angolo g del triangolo a b g, inscritto nel cerchio sara eguale al G del triangolo dato. similmente perche dal medesmo punto a, della contingente è tirata la a g, segante il cerchio, diuidendolo nelle due portioni a t g, a o b g, l'angolo b fatto nella portione sinistra sara (per la 32. del 3.) eguale all'angolo l a g, destro fatto dalla segante a g; & dalla parte destra l a, della toccante, al quale angolo l a g, è anco eguale l'angolo B del triangolo dato, però a questo B del dato sara eguale l'angolo b del triangolo inscritto nel cerchio, & consequentemente (per la 32. del 1.) il restante angolo b a g dell'inscritto sarà eguale all'angolo A, del dato. Si è dunque nel cerchio proposto inscritto il triangolo a b g, quale è equiangolo all'A B G, dato, come si propose di fare.

Propositione 3. Problema 3.

INtorno à un proposto cerchio si può descriuere un triangolo equiangolo à un triangolo dato.

Sia il Circolo a b n, intorno al quale si uogli descriuere vn triangolo equiangolo al D G P, Per farlo. Allunghisi da ciascuna banda vno delli lati del triangolo dato, & sia il G P, facendo cô gl'altri dui lati i dui angoli estrinseci D G r, D P f. & nel circolo dal centro c, si tiri vn semidiametro doue si vogli, & sia il c a, & ad esso dal cêtro si accompagni la retta, ò semidiametro c n, che con il c a. formi l'angolo n c a. eguale ad vno de gli angoli estrinseci detti, & sia al D G r, & anco dall'istesso centro c, al medesmo primo semidiametro c a, si accompagni la retta, ò semidiametro c b, che con esso c a formi l'angolo b c a, eguale all'altro estrinseco D P f. Poi a ciascuno di questi tre semidiametri si tiri vna perpendicolare, ciascuna delle quali sara contingente al cerchio (per il Corollario della 16. del terzo) allungandole da ciascuna banda, finche elle da ciascuna banda concorrano insieme, segnâdo li tre punti m o t del loro concorso (quai concorso è necessario, perche primieramente conosceremo li tre semidiametri fare tre angoli fra loro intorno al centro, cioè che non è alcun d'essi in linea retta con alcuno de gli altri, che quanto alli dui c n, c a, essi formano lo spatio n c a, che è angolo per esser fatto eguale al D G r, come anco è angolo il b c a, essendo fatto eguale al D P f, & perche cosi li tre angolo, che sono intorno al centro c, sono eguali a 4. retti, come la somma delli dui, & dui fatti dalla D G, con la G P, & dalla D P con la G f, a questi quattro saranno eguali quelli tre, onde se cosi da quelli tre leuaremo li dui n c a, b c o, & da quelli quattro li dui D G r, D P f, eguali alli dui leuati dalli tre, il restante dalli tre, che è lo spatio b c n, sara eguale al restante delli quattro, che sono li dui angoli D G P, D P G, nel triangolo dato, la somma de quali dui, perche è minore de dui retti. minore similmente di dui retti sara lo spatio b c n, però esso spatio b c n sara angolo anc'egli; Hora imaginato dall'n, all'a, la retta n a, sottotendente all'angolo n c a, ella diuiderà li dui angoli retti c n o, c a o in due parti, però la somma delli dui a n o, n a o, sara minore di dui retti. onde cadendo la retta n a, su le due m o, o t, & facendo la somma delli dui angoli verso o, minore di dui retti, ne segue di necessità, che esse m o, t o, allungate da questa banda concorrano insieme. Similmente imaginata la retta b n, conosceremo le o n, t b, allungate dalla banda di b, & n, douer côcorrere insieme, & si vedrà similmente imaginata la retta b a, che le due rette m b, o t, allungate per b, & a, concoreranno anc'elle insieme, hora queste tre rette, m o, m t, t o, che formano il triangolo m o t; perche sono contingenti al cerchio, cioe perche di questi tre lati del triangolo, ciascun d'essi tocca la circonferenza del cerchio, ne segue che esso triangolo sia circôscritto al cerchio; mostraremo mò che egli è equiangolo al dato triangolo D G P, dicendo. In ciascuno quadrilatero la somma delli suoi quattro angoli è eguale a quattro retti. Nell'n c a o, doue i duoi c n o, c a o, sono eguali a quattro retti. ne segue che li dui restanti n c a, n o a, siano eguali alli restanti dui retti, & però alli dui D G r, D G P, estrinseco, & intrinseco congiuntoli del dato triangolo D G P, ma l'n c a, è dalla construttione eguale al D G r, però il restante o, sara eguale al restante D G P. Et nel medesmo modo si concluderà l'angolo t, del triangolo formato, essere eguale all'angolo D P C, del dato, onde anco (per la 32. del 1.) il restante angolo m, del formato sara eguale al restante angolo D, del dato, il circonscritto al cerchio dunque è equiangolo al dato come si voleua mostrare.

Pro-

Propositione 4. Problema 4.

IN vn dato triangolo si può inscriuere vn cerchio.

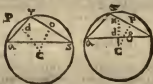
Sia il triangolo a b d, da inscriuerui vn cerchio. Per farlo. Diuidansi dui qual si voglino delli suoi tre angoli, poniamo il b, & il d, per mezo, allungando le diuidenti, finche concorano insieme, & sia in c, che questo e sara il centro del cerchio, dal quale alli tre lati del triangolo si tirino le tre perpendicolari c n, c r, c s, quali saranno eguali fra loro (perche considerati i dui triangoli rettangoli b r c, b n c, doue ancora l'angolo r b c dell'vno è eguale all'angolo n b c dell'altro, che ciascun d'essi è la mità dell'angolo a b d, & il lato b c, dell'vn triangolo è l'istesso, che il b c, dell'altro, ne segue (per la 26. del 1.) che ancora il restante angolo r c b, dell'vno sia eguale al restante angolo n c b, dell'altro, il lato b r, al b n, & l'r c, all'n c; Et per la medesima ragione considerati i dui triangoli rettangoli c n d, c s d, si concluderà al lato n d, essere eguale il lato s d, & all'n c, l's c, ma all'n c istesso già si è mostrato essere eguale la retta r c, onde questa r c, sara anco eguale alla s c, & queste tre rette, cioe n c, r c, s c, sono eguali fra loro, perilche fatto centro il punto c, & semidiametro vna d'esse poniamo la c n, la circonferenza del cerchio di necessità passara per ciascuno delli altri dui punti r, & s, & toccara i tre lati del triangolo nelli tre punti n r s (per il Corollario della 16. del terzo) essendo i tre lati d'esso perpendicolari alli tre semidiametri c r, c n, c s, del cerchio; haueremo dunque nel dato triangolo inscritto il cerchio r n s, come si propose di fare.

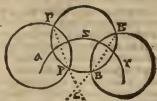
Potiamo hora riducendoci alla Pratica, mediante la notitia delli tre lati del triangolo, conoscere quanto sia il semidiametro del cerchio, & le parti delli lati segnate dal toccamento del cerchio con loro. Et prima conosceremo che anche dall'angolo a, al centro c, tirata la retta a c, ella diuiderà esso angolo a, in due parti eguali (come la b c, l'angolo b, & la d c, l'angolo d) ch'essendo le due rette a r, a r contingenti al cerchio tirate da vn medesmo punto a, elle (per la 36. del terzo) sono eguali fra loro, come anco si può dire per la medesima ragione di contingentia la b r, essere eguale alla b n; & la d s, alla d n; onde considerati li dui triangoli rettangoli a r c, a s c, nelli quali li tre lati dell'vno sono eguali alli tre lati dell'altro (cioe a r, ad a s, r c, ad s c, & l'a c all'istesso a c) ne segue (per la 8. del primo) che ciascun'angolo dell'vno sia eguale a ciascun'angolo dell'altro, cioe l'r c a, all's c a, & l'r a c, all's a c, che sono le due parti dell'angolo b a d, però egli dalla retta a c, si diuiderà in due parti eguali. Hora considerati i tre triangoli a c b, a c d, d c b, nelli quali s'intende diuiso il triangolo dato a b d, & le basi loro essere li tre lati del triangolo data, sopra le quali dall'ang. oppostoli al c, centro del cerchio vanno le loro tre perpendicolari che sono i tre semidiametri del cerchio eguali fra loro, sapremo che essi tre triangoli haueranno bene le basi ineguali (se il triangolo dato sia di lati ineguali) ma le perpendicolari loro saranno eguali l'vna all'altra; Et perche in ciascuno d'essi tre triangoli a moltiplicare la mità della base via la sua perpendicolare il prodotto è la grandezza del triangolo, quali tre grandezze giunte insieme danno per somma la grandezza del totale triangolo dato a b d, conosciamo, che con vna sola operatione, moltiplicando la mità della somma delle tre basi, ò lati del triangolo dato, che è quanto a dire la mità del giro del triangolo dato, via vna delle tre perpendicolari eguali, cioè via il semidiametro del cerchio inscrittoli il prodotto è la grandezza del triangolo totale; Conuersamente dunque. Partendosi la grandezza del triangolo per la mità del suo giro l'auenimento sara il semidiametro del cerchio inscrittoli. Perilche essendo dato il triangolo di lati 20, 34. 42. & cercandosi quãto deua essere il diametro del cerchio da inscriuerli; Trouaremo la grandezza del triangolo in qual modo ci piaccia, che se vorremo farlo, senza trouare alcuna delle sue tre altezze, o perpendicolari, che vengono a i 3. lati perpendicolarmente dagli angoli opposti, porremo con quest'altra Regola sommati i suoi tre lati della somma 96. pigliare la mità 48. che è il semigiro del triangolo, & da esso cauare, ò sottare i tre lati del triangolo ad vno ad vno, che li tre restanti sono 6. 14. 28. Et questi tre numeri, & anco il semigiro 48, cioè li 4. numeri 6. 14. 28. 48. moltiplicare fra loro con quale ordine ci venga comodo che hora si potrà dire, 6. via 48. fa 288. & 14. via 28. fa 292, quale moltiplicato via 288. fa 112896. (che resulta l'istesso, che dire 6. via 14. fa 84, & questo via 28. fa 2352, & questo via 48. fa 112896, del quale prodotto presa radice quadra 336, ella è la grandezza del triangolo dato di lati 20. 34. 42. Questa grandezza 336. si parta hora per 48. semigiro del triangolo, che l'auuenimento 7. è il semidiametro del Cerchio; però 14. sara il diametro totale del Circolo da inscri-

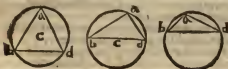
uere in esso triangolo. Se mò anco nel triangolo figurato disopra con li suoi numeri vorremo trouare doue siano i punti della contingentia ne ili lati loro; sapendo che a r, & a s, contingenti dal punto a,& chiamiamole prime, sono eguali fra loro, & così le b r, b n, che chiamaremo seconde, & similmente le d n, d s, terze,& perche queste 6. linee contengono i tre lati, & però il totale giro del triangolo, ne segue, che vna solà prima, vna seconda, & vna terza poste insieme facino solo la mità del giro, però prese a r, b r, & d n, la loro somma è il semigiro (come anco la somma delle tre restanti a s, b n, d s) ma a r,& b n insieme, cioè il lato a b e 20. onde cauato dal semigiro 48. del triangolo, il restante 28. sara la d n, (& però la d s, à quella d n, eguale) & questa d n 18, cauata dal lato totale d b 42, il restante 14. sara b n, & però anco b r, sara similmente 14. che cauato da b a, 20, resta 6. per la r a; onde 6, ancora sara a s, che cauata da a d 34 resta 28. per la d s, come già sapeuamo per causa della d n à lei eguale trouata pure 28. Se mò in pratica senza diuidere angolo alcuno per mezo vorremo trouare il centro c, del Cerchio, noi diuiso vno delli tre lati nelle due parti mediante i numeri trouati, cioè poniamo il lato b d 42. diuiso in n, di modo che b n sia 14. ouero d n 28. dal punto n, li ergeremo la perpendicolare n c, che sia 7, semidiametro; Et il punto c, sara il centro del Cerchio, onde postoui vn piede del compasso, & cō la apertura c n, formato vn Cerchio, egli di necessità toccarà gli altri dui lati nelli punti r, & s, come s'è detto.

Propositione 5. Problema 5.

Intorno a vn dato Triangolo si può descriuere vn Cerchio.

Sia il triangolo a r s, da circonscriuerli vn Cerchio. Per farlo. Diuidasi dui de suoi 3. lati, quali si voglino poniamo li dui r s, r a; per mezo ad angoli retti, o vogliamo dire diuisi per mezo nel punto della diuisione a ciascuna si erga vna perpendicolare,& le diuidenti perpendicolari si prolunghino dalla banda doue s'auicinano insieme, finche concorrino,& sia in c, che questo punto, sara il centro, del Cerchio da circonscriuere al dato Triangolo. Et che le perdendicolari d c, o c, concorrino insieme, si conosce considerando, che nella prima figura imaginata la retta d o, ella con la perpendicolare d c, fa l'angolo o d c, parte del retto r o e, & però minore d'vn retto, onde essendo la somma delli dui angoli o d c, d o c, minore di dui retti, ne segue, che da quella banda allungate le due rette d c, o c, elle deuano concorrere insieme; Et nell altra figura imaginata la d u, perpendicolare alla a r, allungata finche sia peruenuta alla r s, in u, & inteso il Triagolo r d u & la base sa d u, i suoi dui angoli su la base, cioè r d u, r u d, faranno in somma manco di dui retti, ma l'r d u, è retto (per essere la d u perpendicolare alla a r) però l'r u d, sara acuto,& questo con il g o u, retto sara manco di dui retti, onde considerato le due rette o g. & u d, sopra alle quali cade la r s, & occorre che li dui angoli dalla banda del g, fanno somma minore di dui retti, ne segue, che dalla istessa banda allungate quanto bisogna esse u d, o g, di necessità concorreranno insieme. Per dimostrarlo. Dal punto c, alli tre angoli del Triangolo dato si tirino, o imaginino le tre rette c a, c r. c s,& intesi li dui triangoli rettangoli c d a, c d r, perche ancora li dui lati c d, d a. continenti l'angolo retto in l'vno sono eguali alli dui lati c d, d r, continenti l'angolo retto in l'altro, ne segue, che la base c a, dell'vno sara eguale alla base c r, dell'altro & similmente considerati i dui triangoli rettangoli c o r, c o s, conosceremo per la egualità de'lati c o, e s, alli c o, o r, che la base c s, sara eguale alla base c r,& però anco sara eguale alla c a, già prouato essere eguale alla istessa c r, cioè le tre rette c a, c r, c s, sono eguali fra loro, onde fatto cētro il punto c,& semidiametro vna d'esse tre rette, cioè con l'apertura d'vna d'esse tre rette, poniamo della c a, formando vna circonferenza di cerchio, ella di necessità passarà per gl'altri dui punti r, & s, angolari del triangolo dato, & così esso cerchio sara circonscritto al triangolo dato, come si voleua fare.

Di qui nasce, o deriua il modo in pratica, con il quale si forma vn cerchio la circonferenza del quale passi per tre punti, che non siano però in vn'istessa dirittura, o vogliano dire in linea retta. Che 13 punti vengono a significare li tre angoli d'vn triangolo,& le loro tre distanze 13. lati del triangolo; perilche diuise due d'esse quali ci piaccia per mezo ad angoli retti,& allungate le diuidenti quanto occorre, acciò si seghino, il punto della intersettione sara il centro del cerchio; Et si può fare con tre cerchi eguali, ò parti loro, talmente grandi, pero, che essi si possino intersegare da ogni banda; Che dati li tre punti a, s, r, & supponendo di voler diuidere i dui interualli

ſr, ſa, per mezo ad angoli retti, potremo con apertura baſteuole, cioe hora maggiore della mità di ſ r, diſtanza maggiore, formare ſopra i dui centri r, & ſ, dui cerchi, ò parti delle circonferenze loro tali, che ſi ſeghino da due bande, & ſegnare i dui punti delli ſegamenti, & ſiano B B. Ancora fatto centro li dui punti ſ, & a termini dell'altro interuallo ſ a, faremo con l'iſteſſa apertura due circonferenze, ò parti loro, tali che ſi ſeghino ſimilmente da due bande, ma già è fatto la circonferenza mediante il centro ſ, però baſtarà farla mediante il centro a, & ſegnaremo li dui punti P P, doue queſta circonferenza con il centro a, ſeghi l'aaltra con il centro ſ, & tirate le rette B B, P P, ſegnaremo il punto c, doue elle ſi ſegano, qual ſara il centro del Cerchio che paſsara per li tre pũti dati a, r, ſ, facendo ſemidiametro vna delle tre diſtanze c a, c ſ, c r, che faranno eguali fra loro. Et ſi conoſce che diuidendo anco ciaſcuno delli tre interualli, ò rette imaginate a ſ, ſ r, r a, per mezo ad angoli retti, ſe ſi allungaſſero le tre diuidenti a baſtanza, elle tutte tre concorreriano in vn medeſmo punto c, che è il centro del Cerchio, che paſſi per li tre punti a, ſ, r.

Corollário.

DI quì ſi conoſce, che ſe il centro del Cerchio ſara dentro al triangolo, che eſſo triangolo è acutangolo, perche ciaſcuno delli ſuoi tre angoli ſara in vna portione maggiore di Cerchio; ma ſe il centro ſia in vn lato b d, l'angolo oppoſtoli b a d, ſarà retto, eſſendo fatto nel mezo cerchio b a d, & però il triangolo ſarà rettangolo: Ma ſe il centro reſtarà fuori del triangolo, egli ſara ottuſangólo, perche l'angolo a, oppoſto al lato maggiore b d, ſara fatto nella portione minore b a d, della quale eſſo lato b d è corda. Et conuerſamente ſi conoſce, che ſe il triangolo ſia acutangolo, il centro del cerchio ſara nel triangolo; (che ne in vn lato può cadere che egli ſaria rettãgolo, ne fuori del triangolo che egli ſaria ottuſangolo) ſe il triangolo ſia rettangolo il centro cadera in mezo al lato piu lungo, oppoſto all'angolo retto, & ſe il triangolo ſia ottuſangolo il centro ſara fuori del triangolo.

Hora venendo alla pratica; Se dati i lati del triangolo vorremo trouare quanto ſia il diametro del cerchio, che lo circõdi, o circonſeriua, moſtrarò il modo, ma la dimoſtratione depende da quello, che ſi vedrà nel ſeſto libro; onde i principianti potranno attender ſolo al modo pratico, o Regola numerale, ſe coſi li piacera.

Sia dato il triangolo a b d di lati a b 10, a d 34, & b d 42, che ha l'angolo a oppoſto al piu lungo lato 42, ottuſo, perche il quadrato di 42, ſupera la ſomma delli quadrati di 10, & 34, dal che ſi conoſce il centro c, del circolo da circonſeriuerli douere eſſere fuori del triangolo, hor ſia il punto c, al quale dall'angolo a, oppoſto al lato b d, preſo hora per baſe, fino alla circonferenza ſi tiri il diametro a c g, & anco dal medeſimo angolo a, alla baſe b d, ſi tiri la perpendicolare a r, che cadera dentro al triagolo, eſſendo ciaſcuno delli dui angoli b, & d, alla baſe acuto, & ſi imagini il triangolo rettangolo ſiniſtro a r b. Ancora dall'altro eſtremo deſtro d, della baſe al g, termine del diametro ſi tiri la retta d g, che coſi la parte di cerchio a d g, ſara mezo cerchio, & l'angolo a d g, fatto in eſſa ſara retto, & in queſto triangolo rettangolo a d g, conſiderato l'angolo g, egli ha per baſe circonferentiale l'arco a d, però è fatto nella portione maggiore a b g d, & nella portione

portione medesima, cioe con la istessa base d'arco a d, è ancor fatto l'angolo b, però egli è eguale al g, onde nelli dui triangoli rettangoli a r b, a d g. l'angolo b, dell'vno è eguale al g, dell'altro, & però il restante b a r, al restante g a d, onde essi dui triãgoli sono equiangoli, & però di lati proportionali; perilche la proportione di a r, opposto all'angolo b, alla subtensa a b, nell'vno sara come di a d, opposto all'angolo g (corispondente, & eguale al b) alla subtensa a g, cioe a r (perpendiculare alla base b d, del triangolo dato a b d) a b, lato sinistro del triangolo dato a d, lato destro d'esso triãgolo dato, & a g, diametro del cerchio, sono 4. rette proportionali, perilche al dutto della seconda a b 20. nella terza a d 34, qual dutto è 680, sara eguale il dutto di a r 16. prima nella a g quarta, ma la prima perpendicolare del triangolo dato si troua mediante la notitia delli tre lati, & è 16. però partito 680. dutto d'essa in a g quarta, l'auenimento 42 $\frac{1}{2}$. sara la a g, diametro del cerchio. Et cosi vediamo la Regola poterli dare dicendo,

a d. 34.
b d. 42.
76.
8.
a b
a o |608
b n a 30 $\frac{2}{5}$
b a 20
a n a 10 $\frac{2}{5}$
a n. 5 $\frac{1}{5}$
suo qua. 27 $\frac{1}{2}\frac{1}{5}$
da 1156
1128 $\frac{2}{2}\frac{4}{5}$
perpendi. d n. 33 $\frac{3}{5}$
39 $\frac{2}{2}\frac{4}{5}$

da d n b d da a d
33 $\frac{3}{5}$. à 42. come 34 a d
1428.
168 |7140
a g diametri. 42. $\frac{1}{2}$
42
84

Dati i 3 lati del triangolo per trouare il diametro del cerchio da circonscriuerli; Preso vno d'essi per base, & trouata la perpendicolare che le viene dall'angolo opposto, ò cada ella dentro al triangolo, ò fuori doue siuogli, con essa perpendicolare si parta il dutto de' dui lati del triangolo, che l'auenimento sarà il diametro del cerchio da circonscriuerli.

Che se haueßimo preso per base il lato a b 20. la perpendicolare d n, che le viene dall'angolo d, oppostoli andara fuori del triangolo dalla banda dell'angolo a, ottuso, & sara 33 $\frac{3}{5}$, & tirato pure il diametro a g, & la g d, & considerati li dui triangoli rettangoli a d g, d n b, ancora all'angolo g, del grande sara eguale (come prima) l'angolo b, del piccolo, che ciascun d'essi ha per base l'istesso arco a d, perilche essi dui triangoli sono equiangoli, & di lati proportionali, cioe da n d, opposto all'angolo b, à b d subtensa sara come da a d opposto all'angolo g (corispondente eguale al b) alla subtensa a g, cioe d n, perpendicolare 33 $\frac{3}{5}$ d b lato 42, d a lato 34, & a g diametro saranno quattro quantità proportionali, perilche à moltiplicare d b 42, seconda via d a 34 terza che sono i dui lati del triangolo dato (essendo base la a b 20, alla quale è perpendicolare d n) & il prodotto 1428, partirlo per d n, perpendicolare 33 $\frac{3}{5}$. prima l'auenimento 42 $\frac{1}{2}$, sara la a g, quarta diametro del cerchio detto.

Et quando non si haueße la superiore cognitione della similitudine delli dui triangoli detti da deriuarne la facile Regola data, noi ci potreßimo seruire della proprietà, che hanno i quadrilateri inscritti nel cerchio, & è, che al dutto de' suoi dui diametri è sempre eguale la somma delli dui dutti de' dui. & dui lati contrapositi, cioe del destro nel sinistro, & del superiore nell'inferiore aiutandone poi la operatione Algebratica, che hora preso pure la figura superiore, doue al triãgolo superiore a, b, d, di lati 20. 34. 42. (ma per breuità potendosi partire in intieri per 2, diremo 10. 17. 21.) è circonscritto il cerchio b a d g, & si cerca la quantità del suo diametro a g, noi dal termine g, alli dui d, & b, del lato d b, imaginate, e tirate le due rette g d, g b, consideraremo il quadrilatero a b g d, i lati contrapositi, del quale saranno b g, all'a d, & g d, all'a b, essendo i suoi dui diametri a g (che è sempre, il diametro del cerchio) & b d restante lato del triangolo dato alli termini b & d, del quale sono tirate le due line, ò imaginato che vẽgono dal termine g, del diametro, che si parte dal punto a, angolare delli dui lati a b, a d detto del triangolo dato, di questi dui diametri a g, b d, è noto il b d 21, & si cerca l'a g, che è anco diametro del cerchio, Delli quattro lati del quadrilatero sono noti li dui a b 10. a d 17. ma gli altri dui g b, g d, si trouaranno con la positione Algebratica, onde per venire alla operatione si ponerà, che il diametro a g, sia 1 co. dal quad. 1 cen. del quale cauato 289. quad. di 17. a d (vno de' lati continenti l'angolo retto a d g, del triangolo rettangolo a d g) il restante 1cẽ m̃ 289. sara il quad. di g d, che è l'altro lato continente l'angolo retto a d g, perilche esso lato g d, sara la radice quadra d'esso restante, cioe sarà radice L. 1cẽ. m̃ 289 L. Ancora nel triangolo rettangolo a b g. cauato 100, quad. del lato a b, da 1cẽ. quad. della subtensa a g, la radice del restante, cioe radice L. 1cẽ. m̃ 100. L sara il lato b g. Hora moltiplicaremo b g, radice L. 1ce. m̃ 100 L. via il suo contraposito a b 17. cioe via rad. L 289, L, & produce rad. L, 289, cẽ. m̃ 28900. L. Et anco moltiplicaremo g d rad. L 1cen. m̃ 289 L, via lo

à lui contrapofito a b, 10, cioe via rad. L 100 L. & produce rad. L 100 cen. m̃ rad. 28900 L. la fomma delli quali dui prodotti è eguale à 21 co. dutto dell'vn diametro b d 21, del quadrilatero a b g d, nell'altro diametro a g 1 co. onde feguendo la operatione come fi vede in margine, trouaremo che la co. vale $21\frac{1}{4}$. onde il diametro a g. del quadrilat. & però il diametro del cerchio circõfcritto che è l'ifteffo pofto 1 co. fara $21\frac{1}{4}$, quando i lati del triangolo fiano 10, 17. 21, ma quando fiano doppij à quefti, cioe 20. 34. 42. allhora il diametro del cerchio fara fimilmente doppio al $21\frac{1}{4}$, & però fara $42\frac{1}{2}$.

Operatione Algebratica. Sia a g. 1 co.

d g. rad. L 1 cen. m̃ 289 L
via a d rad. L 100 L

fa rad. L 100 cen. m̃ 28900. L
rad. L 289 cen. m̃ 28900 L

b g. rad. L 1 cen. m̃ 100 L.
via a d rad. L 289 L.

fa rad. L 289 cen. m̃ 28900. L la loro fomma è eguale a 21. co. & quando le parti fi hauerà A. rad. L 28900 ✱. m̃ (389. via 28900) cen. p̃ 28900. via 28900 L 389 cen. m̃ 57800, p̃ (R LL A due volte) eguale a 441 cen.

Et leuando 389 cen. m̃ 57800. da ciafcuna banda, acciò là rad. LL A. refti da fe, haueremo rad. LL A. due volte, cioè il doppio d'effa. Eg. à 58 cen. p̃ 57800. Et partendo per 2. fi hauerà rad. LL A. eguale a 26. cen. p̃ 28900. Et quadrando le parti per fciogliere, ò leuare la rad. LL. fi hauerà 28900 cen. m̃ (389 via 28900) cen. p̃ 28900. via 28900. Eguale à 676 ✱. p̃ (52 via 28900) cen. p̃ 28900. via 28900.

Et leuando da ciafcuna parte communemente il numero 28900 via 28900, che è il medefimo in ciafcuna parte haueremo 28900 ✱. m̃ (389. via 28900.) cen. eguale a 676 ✱. p̃ (52. via 28900) cen. Et accommodando il m̃ delli cen. & leuando 676 ✱. da ciafcuna parte haueremo 28224 ✱. eguale a (441. via 28900) cen. cioe 28224 ✱. eguale a 12744900 cen. Et fchifando, ò partendo ciafcuna parte per 1 cen. haueremo 28224 cen. eguale a 12744900. Onde partendo il numero 12744900. per 28224. numero delli cen. l'auenimento $451\frac{9}{16}$ fara il valore d'1 cen. però 1 cen. che è la rad. d'1 cen. valerà la radice di $451\frac{9}{16}$ che è $21\frac{1}{4}$; & quefto è il diametro a g. pofto 1 co.

$451\frac{9}{16}$
14553
4410
15876
862 63
1568 112

Da quefta operatione Algebratica per deriuarne la femplice regola numerale, confiderando il nafcimento del 28224 numero de' cen. vedremo che egli è quello, che refta a cauare 676. da 28900. delli quali il 28900. è il dutto di 100. quad. di 10. lato a b, in 289 quadrati di 17. lato a d. Et il 676 è il quad. di 26. mità di 52, che refta à cauare 389 fomma di 100. & 289. quadrati di 10, & 17. lati a b, a d, da 441. quad. del reftante lato, ò bafe b d 21. (che è vno de' dui diametri del quadrilatero, effendo il diametro a g. del cerchio l'altro diametro d'effo quadrilatero.) Et confiderando il 1274490. numero che fi parte per il num. delli cen. vedremo che egli è il dutto di 28900 dutto di 100. in 289. quadrati di 10, & 17 lati a b, a d) in 441 fomma di 389 (compofto di 100, & 289 quadrati de' lati 10, & 17) con 52. differenza d'effo 389 à 441 quad. di 21. b d, vno de' diametri del quadrilatero, & però effa fomma è il quad. di 21 b d, cioe il 12744900, è il prodotto della moltiplicatione fra loro delli quadrati delli 3 lati 10. 17. 21. del triangolo, che è il medefmo, ò refulta l'ifteffo, che moltiplicare effi lati 10. 17, 21. fra loro, & il prodotto 3570. moltiplicarlo in fe fteffo. Onde fi può dire il 12744900. effere il quad. del dutto delli 3. lati del triangolo. Perilche fi potrà dare la Regola dicendo, *Dal dutto delli quadrati di dui lati* (hora 10, & 17) ò vogliamo dire (che refulta l'ifteffo.) Dal quad. del dutto dalli dui lati (10, & 17) cauato il quad. della mità, di quello in che la fomma de' quadrati d'effi dui lati (10, & 17) è minore hora, ma bifogna dire per regola generale è differente, come ci auertirà il quefito feguente, è differente dal quad. dell'altro lato (25) che ferue per vn diametro del quadrilatero; & con il reftante partito il quad. del dutto delli tre lati fra loro. & dell'auenimento prefa la rad. ella è il diametro del cerchio da circonfcriuere al triangolo propofto.

Quefto. D'vn triãgolo i tre lati fono 13. 14. 15. fi domanda il diam. del cerchio da circonfcriuerli

Sia a g. 160. b g rad.L 1 cen.m̃ 169 via a d rad L 225 L.

fa rad.L 225 cen.m̃ 38025 L

via rad.L 169 cen.m̃ 38025 L.

g d. rad.L 1 cen.m̃ 225 L. via a b rad.L 169

fa rad. L 169 cen.m̃ 38025 L. la somma loro è eguale a 14 co. Et quadrando le parti si hauerà.

A rad.L 38025 ✱ m̃(394.via 38025)cen.p̃ 38025.via 38025 L. 394 cen. m̃ 7650. p̃ (rad. LL A)due volte. Eguale a 196 cen. Et leuando 394 cē.m̃ 76050 da ciascuna bāda; acciò la rad. LL A resti da se, haueremo rad.LL A.due volte, eguale à 76050.m̃ 198 cen. Et partendo per 2.per hauere vna sola volta le R̷ LL A haueremo R̷ LL A.egu.a 38025. m̃ 99 cen. Et quadrando le parti per sciogliere, la R̷ LL. si hauerà 38025 ✱. m̃ (394. via 38025) cen. p̃ 38025, via 38025. Eguale à 9801. ✱ m̃(198.via 38025)cen.p̃ 38025, via 38025. Cauando da ciascuna parte il numero 38025, via 38025, che è il medesimo da ciascuna parte si hauerà 38025, ✱ m̃(394 via 38025)cen. Eguale à 9801 ✱, m̃ (198 via 38025) cen.& accommodando li sei cen. giungendo 394, via 38025 cen.a ciascuna banda, haueremo 38025 ✱ Eguale a 9801 ✱ p̃ (196, via 38025)cen. Et cauando 9801 ✱ da ciascuna banda sara 9801 ✱.

B

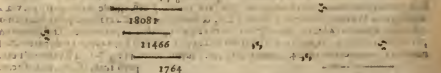
C E

D 28224 ✱. Eguale a 7452900 cen. Et schifando per 1 cen. si ridurà a cen. eguale a num. & sarà 28224 cen. eguale a 7452900. che il 2 vale 264 $\frac{1}{6}$, & però la 1 vale R̷ 264 $\frac{1}{6}$, cioe 16 $\frac{1}{4}$ però 16 $\frac{1}{4}$ è il diametro a g. del cerchio, che fu posto 160.

264 $\frac{1}{6}$

1808

11466

1764

In questa operatione, il num. E, si vede similmente come nella passata essere il quad. del dutto delli tre lati 13.14.15. del triangolo; Et il D, numero, con il quale si parte l'E, è quello che resta à cauare C da B, essendo il B. il dutto de' quadrati de' dui lati 13, & 15. del triangolo che seruono p dui lati del Quadrilatero, ò vogliamo dire essendo il B. il quad. del dutto de' dui lati del Triangolo. Et il C. il quad di 99. mità di 198. differenza della somma 394. de' quad. de gl'istessi dui lati 13 & 15. del triangolo, al quad. 196. dell'altro restante lato 14. del triang. che serue per vn lato del quadrilatero, onde siamo tanto maggiormente sicuri la regola data essere vniuersale, & seruire, ò sia il triangolo acutangolo, o ottusangolo, che quando fusse rettangolo (conoscendolo noi dal quad. del maggior lato, che saria eguale alla somma de' quad. de gl'altri dui lati) sappiamo il suo maggior lato, che è opposito all'angolo retto) essere egli il diam. del cerchio da circonscriuerli. Et se auertiremo, che di due quantità P, & D. tanto resulta a partire D per P. & dell'auenimento A, pigliare la rad. R, quanto resulta a partire la rad. di D, per la rad. di P, conosceremo, che nell'operatione superiore se partiremo la rad. di E 7452900. qual rad. sappiamo essere sempre il dutto delli 3. lati del triangolo, cioè hora 2730, per la rad. del 28224 D (numero de' cen. qual R̷. hora è 168.) l'auenimento 16 $\frac{1}{4}$, sara il cercato 16 $\frac{1}{4}$ valore della co. onde senza cercare l'E, bastarà partire 2730, dutto delli lati per la rad. del 28224. D che l'auenimento sara il diametro del cerchio. Et si potrà dare la regola dicendo. Dati i 3 lati del triangolo per trouare il diametro cerchio da circonscriuerli. Dal quad. del dutto de' dui de' suoi lati, & si chiami A. si caui il quadr. della mità di quello, in che la somma de' quad. de' dui lati detti è differente dal quadr. dell'altro lato B, & con la rad C del restante si parta il dutto D. delli suoi 3. lati, che l'auenimēto sarà il diametro del cerchio. Per esempio, D'un triangolo essendo i tre lati 15.28.41. per trouare il diametro del cerchio da circonscriuerli; Intesi per i dui lati 15.& 28. il dutto loro è 420, & il quad. di questo 420. è 176400 A. Ancora i quadrati de' dui lati detti sono 225. & 284 la somma loro è 1009. & il quadrato dell'altro lato B, 41. è 1681; La differenza di questi dui numeri 1009, & 1681 è 672. & la mità d'essa differenza è 336 il suo quad. è 112896, quale si caua dal 176400. A, & resta 63504. del che si piglia la rad. & è 252 C. con la quale si parte il dutto di 3 lati 15. 28. 41. fra loro qual dutto è 17220. D. che ne viene 68 $\frac{1}{3}$. & questo è il diametro del cerchio da inscriuere al triãgolo dato. Et se hauessimo intesi per i dui lati 15.& 41. essendo l'altro lato B, il 28, il dutto di detti dui 15, & 41. saria 615. il quadrato di che è 378225 A. Ancora li quadrati de' dui lati detti 15. & 41. sono 225, & 1681, la somma loro è 1906. & il quadrato dell'altro lato B 28, & 784. la differenza di questi numeri 1906, & 784, è 1122. la mità della quale è 561, il suo quadrato è

28	784
via 41	1681
fa 1148	2465
A 1317904	225
1254400	2240
63504	1120
252	1244400
	17220
	$68\frac{1}{3}$
	210
	84

514221, quale si caua dall'A 378225. & resta 63504, del quale si piglia la rad. & è 252, con il quale si parte il dutto delli 3 lati, che è 17220, che l'auenimento $68\frac{1}{3}$ è il diametro del cerchio. Simlmente iuteli per i dui lati 28, & 41, & l'altro lato B essere il 15. trouaremo l'istesso diametro $68\frac{1}{3}$. Vogliamo anco auertire gli Studẽti, che nell'operatione Algebratica, essendo peruenuti alla equatione in quella poniamo doue i lati del triãgolo sono 10. 17. 21. doue si ha la rad. L 289 cẽ. m̃ 28900 L p̃ rad. L 100 cen. m̃ 28900 L. Eguale a 21 co. noi potiamo, lassando vna delle due rad. ll. da se, cauare l'altra. poniamo la 2. A da ciascuna banda, dicendo che rad. l 289 cen. m̃ 28900 L. sia eguale a 21 co. m̃ rad. L 100 cẽ. m̃ 28900 L. Et moltiplicãdo ciascuna delle due parti in se stessa si ridurà a 289 cẽ m̃ 28900, eguale a 441 cẽ p̃ 100 cẽ m̃ 28900 m̃ (rad. ll A via 42 co.) che nella bãda destra giũti insieme li 441 cẽ. & 100 cẽ. (che i num. 441. & 100. sono i quad. de' lati 21, & 10) fanno 541 cẽ. & hora aggiũta la rad. ll. A via 42 co. che è m̃ da ciascuna bãda cioe leuata dalla destra. & posta alla finistra come p̃. Et anco, acioche essa rad. ll. resti da se, leuata tutta la parte sinistra 289 cẽ. m̃ 28900 da ciascuna banda, essendo quanto al num. 28900 egli m̃ da ciascuna banda egli s'anullarà, pche il leuare m̃ 28900 sinistro da m̃ 28900 destro, essendo m̃ quel sinistro che si leua egli si giunge al m̃ 28900 destro, ma a questo m̃ 28900, giõgendo 28900 num. eguale al suo num. esso m̃ vien ad anullarsi, & fare in somma niente, cioe a m̃ 28900, giongendo 28900. la somma è niente, ò vogliamo dire hauendo da ciascuna banda destra, & finis. vn medesimo m. 28900. leuando ciascun d'essi dalla sua banda si viene a leuare cose eguali da cose eguali & però i rimanenti destro, & sinistro saranno fra loro eguali. Et quanto alli 289 cẽ. sinistri leuandoli dalli 541 cẽ. destri il restante è 252 cẽ. & questo 252 num. de' cẽ. viene ad esser quello che resta a cauar il quad. di 17, che è vno delli 3 lati del triang. dalla somma de' quad. de gl'altri 2 lati 10 & 21. però haueremo la rad. ll. A via 42 co. eguale a 252 cẽ. Onde partendo ciascuna parte per 42 co. & il num. 42 è il doppio di 21 vno delli 2. num. 10, & 21 li quad. de' quali si sono giunti insieme, haueremo la sola rad. ll. A eguale a 6 cẽ. Et quadrando le parti che la rad. ll. si scioglierà, haueremo 100 m̃ 28900. eguale a 36 cen. Et accomodato il m̃, cioe giunto 28900 a ciascuna parte sara 100 cẽ eguale a 36 cen. p̃ 28900. & leuato 36 cẽ da ciascuna banda, haueremo 64 cẽ. egu. a 28900 che il cẽ. vale $451\frac{9}{16}$, & però la co. vale R 451 $\frac{9}{16}$, cioe $21\frac{1}{4}$, che il dia. del cerchio. In quest operare si vede il 28900, & chiamiamolo A num. al quale sono eguali li 64 cen. essere il quad. del dutto di 10, & 17 dui lati del triang. Et al quad. 441 dell'altro lato 21 si giunge 100 quad. di 10 vno delli dui lati detti, & dalla somma 541 si caua 289 quad. di 17, che è l'altro lato delli dui 10, & 17 & questo 17 chiamaremo 2, essendo 10. il 1. Et il restante 252 si parte per 42, che e il doppio di 21 quale e quel lato del triang & lo chiamaremo base con il quad. del quale si giunse il quad. di 10. 1. lato, & l'auemento 6 si quadra, che fa 36. quale si caua da 100. quad. del 1. lato, & con il restante 64 si parte il 28900 A, & dell'auenimento $451\frac{9}{16}$ si piglia la rad. che e $21\frac{1}{4}$, & questo è il diam. del cerchio, che anco adoprãdo le rad. del 64, che è 8, & del 28900, che è sempre il dutto 170 di 10 1. lato in 17. 2. partendo 170 per 8, ne verà il $21\frac{1}{4}$ diam. Et se per rad. ll. A pigliaremo la radie. l 289 cen. m̃ 28900 l. dicendo che rad. l 100 cen. m̃ 28900 l. sia eg. a 21 co. m̃ rad. l 289 cen. m̃ 28900 l quadrãdo le parti haueremo 100 cẽ. m̃ 28900 eg. a 441 cẽ. p̃ 289 cen. m̃ 28900, m̃ rad. ll. A via 42 co. Et ai 441 cen. giõto 289 cen. & dalla somma 730 cen. cauato 100 cen. che restara 630 cẽ. & accommodato il m̃ 28900 da ogni banda, che per essere eg. & simili di denominationi si anullano a questi 630 cen. che saranno dalla parte sinistra, sara eguale la rad. ll. A, via 42 co. che verà ad essere dalla sinistra, & partendo ciascuna parte per 42 co. haueremo la rad. ll. A, eg. a 15 cen. Et quadrando le parti, che la rad. ll. A, si scioglierà, haueremo 289 cen. m̃ 28900, eg. a 225 cen. Onde accomodato il m̃, & cauato 225 cen. da ciascuna bãda haueremo 64 cen. eg. a 28900, come auenne nell'altra operatione, & perciò similmente la co. valerà $21\frac{1}{4}$ che è il diam. del cerchio. Hora notaremo che in questa operarione si vede pure che delli 3 lati del triang il 21 fa l'istesso che nell'altra operatione, & pure qui lo chiameremo base, ma de gl'altri 2. lati 10, & 17. qui il 17 fa la operatione che faceua il 10, & però chiamaremo hora il 17 pri. & il 10. qui fa la operatione, che li faceua il 17, & però lo chiamaremo 2, cioe con il quad di 21 base, che è 441, si giunge il quad. di 17 pri. lato, cioe 289, & della somma 730 si caua il quadrato di 10 secondo lato, & il restante 630, si parte per 42 doppio di 21 base, & l'auenimento 15, si quadra, & fa 225, quale si caua dal quad. del primo lato 17, che è 289, & resta 64 con la radice del quale che è 8, si parte il dutto de secon. lati 10, & 17, qual dutto e 170, & l'auenim. $21\frac{1}{4}$ e il diam. del cerchio. Ma in vn triang. a b d, di lati 10, & 17. & base 21, il somare il quad. del 1. lato con il quad. della base, & dalla som. cauar il quad. del 2. lato, & il restante partir per il dopio della base l'auenim. vien ad esser il caso, o parte della

 base

base, se la perpendicolare cade dentro al triangolo, che è congiunto con il primo lato; & il quad. d'esso caso, cauato dal quad. del primo lato, & del restante presa la radice, ella viene ad essere la perpendicolare, che arriua alla base, o suo allungamento dell'angolo oppostoli; Onde qui in ciascuna delle due operationi che si faccino l'8. numero delle cose, che è rad. del 64 numero delli cẽ, è sempre la perpendicolare d'altezza del triangolo posto per base il 21 detto, & perche con questo ottauo perpendicolare a partire 170. ducto del primo lato nel secondo l'auenimento, è il diametro del cerchio, cioe che tanto è il ducto della perpendicolare del triangolo nel diametro del cerchio, quanto il ducto dell'vn lato nell'altro, si conosce che la perpendicolare, & diametro sono l'estreme, o medie di quattro quantità proportionali. essendo i dui lati le medie, o estreme, cioe da la perpendicolare all'vno de' dui lati, è come dall'altro lato al diametro del cerchio, che nella figura da a c, ad a b, viene ad essere come da a d, ad a g; perche si vede li dui triangoli rettangoli a e b, a d g, essere simili, & equiangoli; onde la sagace Algebra hauendoci dal discorso superiore fatto conoscere la similitudine d'essi dui triangoli, può poi il Geometra di li dimostrare che a moltiplicare i dui lati del triangolo fra loro, & partire il prodotto per la perpendicolare d'esso triangolo, l'auenimento di necessità è il diametro del cerecio da circonscriuerli.

Vedano dunque i Studenti quanto marauigliosa sia la Dottrina Algebratica, & che da lei deriua le continue inuentioni, & a questa attendino, essendogliene massime molto commoda strada le mie Opera dell'Algebra Discorsiua Proportionale, & altre hauendo prima attentamente studiata la mia Aritmetica Vniuersale, & gli Elementi delle quantità Irrationali, & Algebatiche.

Si può anco notare che in particolare nel triangolo di lati 13. 14. 15. de' quali il 14. è quello, che si adoprò da se, chiamandolo B, & seruendocene come base del triangolo, si cõcluse che il duc to 2730 di tutti essi 13. 14. 15. o vogliamo dire il ducto 195 de' dui lati 13. 15. nella base 14 che fa 2730, a partirlo per 168, radice del 28224 D, trouato come si disse, l'auenimento è il diametro $16\frac{1}{4}$ del cerchio, & hauendo anco poi concluso che a partire il ducto de' dui lati 13. & 15, cioe 195, per la perpendicolare 12. l'auenimento è il $16\frac{1}{4}$ diametro del cerchio, si viene a conoscere, che partendo 195 ducto di 13 in 15, in vece di 2730 ducto del 195 in 14, base veniamo a schifare il 2730, per 14, & percio conuiene anco schifare il 168, partitore del 2730, per il medesimo 14. base, che ne viene 12; Onde tanto resulta a partire 195. per 12, quanto 2730. per 168; Et perche l'auenimento $16\frac{1}{4}$ è il diametro del cerchio, quale habbiamo veduto anco deriuare dal partire il ducto d'essi lati 13, & 15, cioe 195, per la perpendicolare del triangolo, si conosce che il 12 partitore del 195. che fa deriuare il $16\frac{1}{4}$ è di necessità la perpendicolare del triangolo, & che percio il 168 radice del 28224 D, è sempre il ducto di 14. base in 12 perpẽdicolare, onde trouato il 28224 D, & la sua radice 168. la partiremo per la base 14. & con l'auenimento 12, che sarà la perpendicolare del triangolo partiremo il ducto de' dui lati 13, & 15, cioe 195, che l'auenimento $16\frac{1}{4}$ sara il diametro, potremo dunque dare la Regola dicendo.

Dati i 3 lati del triangolo per trouare il diametro del cerchio, che lo circonscriue, inteso per base vno d'essi 3 lati doi fra la somma de' quadrati de' dui lati, & il quad. della base trouaremo la differenza, & toltane la mità, il quad. d'essa mità, si caui dal quad. del ducto de' dui lati del triangolo, & dal restante si pigli la radice, qual radice si parta per la base del triang. & con l'auenimẽto che sara la perpendicolare, si parta il ducto de' dui lati che il resultante sara il diam. del cerchio.

Vediamo mò, che di qui si estrahe vn modo facile da trouare le perpendicolari de' triangoli, che è il sopradetto senza cercare i casi, Onde dato vn triangolo di lati 15. 28. 41. se preso per base il 15. vorremo trouare la perpẽdicolare, che li viene dall'angolo oppostoli. Quadraremo i dui lati 28, & 41, che fanno 784. & 1681. & li sommaremo insieme, che fa 2465. & fra questo, & il quadrato della base 15, qual quad. è 225. trouaremo la differenza che è 2240. la mità del quale cioe 1120, si moltiplichi in se stessa, & fa 1254400. da serbare; Ancora moltiplicaremo i dui lati 28, & 41 insieme, & il prodotto 1148. quadraremo che fa 1317904. dal quale cauaremo il 1254400. serbato, & resta 63504, del che si piglia la radice che è 252. & si parte per 15 base, che ne viene $16\frac{4}{5}$, & questo è la perpendicolare. Se mò con questa partiremo il ducto de' dui lati 28. & 41, cioe 1148 (cioe 5740 per 84, cioe 820 per 12) l'auenimento $68\frac{1}{3}$ sara il diametro del cerchio.

Ma auertasi, che a moltiplicare la perpendicolare d'vn triangolo via la sua base il prodotto è il doppio della grandezza d'esso, onde conuersamente a partire il doppio della grandezza per la base ne viene la perpendicolare (o per la perpendicolare ne viene la base) per il che vedendo di sopra che a partire 252 per 15, base l'auenimento $16\frac{4}{5}$ è la perpendicolare, conosciamo, che il 252 di necessità è il doppio della grandezza del triangolo, onde la sua mità 126 è la grandezza d'esso; Ma se pigliaremo i numeri, che faccino nascere la mità del 252, haueremo il solo 126, & si

potrà

potrà fare cosi. Giunti insieme i quadrati 784. & 1681 de dui lati, & fanno 2465, & fra questo, & 225 quadrato della base 15, trouata la differenza 2240, di essa pigliaremo l'$\frac{1}{4}$, ò vogliamo dire la partiremo per 4, & l'auenimento 560. quadraremo, & fà 313600 da serbare; Ancora moltiplicaremo la mità d'vno delli dui lati via l'altro, cioe 14 via 41, ouero 20 $\frac{1}{2}$ via 27, & fà 574, quale quadraremo, & fa 329476, dal quale cauaremo 313600, serbato & resta 15876, del che pigliaremo la radice & è 126, quale 126 sarà la grandezza del triangolo, Et cosi habbiamo imparato vn nuouo modo di trouare la grandezza delli triangoli, ma questa Dottrina e vn mare d'Inuentioni per li giuditiosi, & esperti ingegni; onde hora per non vi dimorare più, passaremo alle seguenti Propositioni.

Esempij nel Triangolo di lati 15.28.41.

Sia base il 41
14
via 15
fa 210
44100
28224
15876
1 2 6
è la grandezza.

15 via 15 fa 225
28 via 28. 784
1009
41 via 41 fa 1681
differenza. 672
l'$\frac{1}{4}$ e 168

il suo quadrato e 28224. del triangolo che partita per la base 41, ne viene 3 $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{1}$. che il suo doppio 6 $\frac{6}{4}$ $\frac{6}{1}$, e la perpendicolare, & con essa partito il dutto di dui lati, che e 420. l'auenimento 68 $\frac{1}{2}$ e il diametro del cerchio

4681
225
1906
784
1122
280 $\frac{1}{2}$
78680 $\frac{1}{4}$

15
via 20 $\frac{1}{2}$
307 $\frac{1}{2}$
94556 $\frac{1}{4}$
78680 $\frac{1}{4}$
15876
1 2 6. è

la grandezza del triangolo, partita per 14. mita della base, l'auenimento 9 e la perpendicolare, con la quale partendo 615. dutto de dui lati ne viene 68 $\frac{1}{2}$, che e il diametro del cerchio.

Propositione 6. Problema 6.

In vn dato cerchio, si può inscriuere vn quadrato.

Nel Cerchio dato per inscriuerui vn quadrato; Segnisi in esso vn diametro, & sia a b, al quale si tiri ad angoli retti vn'altro diametro n f, & alli termini loro si tirino le quattro rette a f, f b, b n, n a, quali formaranno nel cerchio l'inscritto quadrilatero n a, f b, che e quadrato. Perche considerati i quattro triangoli rettangoli n e a, a e f, f e b, b e n, i dui lati, semidiametri, di qualsiuogli d'essi con il suo angolo retto sono eguali alli dui lati, semidiametri, & angolo retto da loro contenuto in ciascuno delli altri tre triangoli, perilche (per la 4. propositione del primo libro) la base dell'vno sarà eguale alla base di ciascuno delli altri, ma queste quattro basi eguali sono i quattro lati del quadrangolo inscritto, però egli e equilatero. Ouero perche ciascuno delli quattro angoli n e a, a e f, f e b, b e n, al centro del cerchio e retto, & però sono eguali fra loro, ancora le quattro loro basi circonferentiali, & però le quattro corde d'essi saranno eguali fra loro, perilche il quadrilatero n a f b, e equilatero, Ancora perche ciascuno delli 4. angoli a n b, n b f, b f a, f a n, del quadril. detto è fatto nel mezo cerchio ciascuno di loro è retto. Esso quadril. dūque ha li 4. suoi lati eguali fra loro, & ciascuno delli suoi angoli è rettto, però egli e quad. & e inscritto nel cerchio dato, come si voleua fare. In numeri, essendo il diametro a b, del cerchio poniamo 10, il suo quad. è 100 & perche egli è eguale alla somma de'dui quad. eguali di a n, n b, nel triangolo rettangolo a n b, ne segue, che ciascuno d'essi dui quad. sia la mità di 100. cioe sia 50. però la sua radice, che e radice 50, cioe quasi 7 $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{4}$ sarà a n, ouero n b lati del quadratd. Dal che si conosce, che il quadrato del diametro del cerchio e doppio al quadrato del lato del quadrato inscrittoli, Che però si dice il diametro del cerchio, essere potentialmente doppio al lato del quadrato inscrittoli, intendendosi la potentia d'vna linea essere il quadrato d'essa linea.

Propositione 7. Problema 7.

Intorno a vn dato cerchio si può descriuere vn quadrato.

Nel Cerchio dato da inscriuerli vn Quadrato. Si tirino i dui diametri b d, a g, che si seghino insieme ad angoli retti, nel centro c, alli quattro estremi, delli quali a, b, g, d, si tirino le quattro perpendicolari allungate da ciascuna banda r ſ, ſ n, n m, m r, segnando i punti r, ſ, n, m, delli concorsi loro; & elle tutte, o vogliamo dire ciascuna d'esse (per il Corollario della 16. del terzo libro) sara contingente il Cerchio, perilche il quadrilatero formato r ſ n m, sara circonscritto al Cerchio, & questo mostraremo essere quadrato cosi. Perche ciascuna delle due rette r ſ, m n, è segata dalla a g, & la somma delli dui angoli retti r a g, m g a, interni da vna medesma banda (o delli dui ſ a g, n g a) è quanto dui retti, ne segue (per la 28. del primo) che esse due rette r ſ, m n, siano equidistanti fra loro; Et anco ciascuna d'esse sara equidistante al diametro b d, perche cosi la somma delli dui angoli retti r a c, b c a, come delli dui retti b c g, m g c, è eguale a dui angoli retti. Ancora perche ciascuna delle due rette r m, ſ n è segata dalla b d, & la somma delli dui angoli interni da vna medesma parte d b m, n d b (come anco delli dui retti d b r, ſ d b, è eguale a dui angoli retti, ne segue che esse due rette r m, ſ n, siano

equidistanti fra loro, & anco per la medesma causa al diametro a g, che cosi la somma delli dui angoli retti a c b, r b c, come delli dui retti d c a, a c d, è eguale a dui angoli retti. Et perche li quadrilateri di lati equidistanti hanno (per la 34. del primo) i lati, & gli angoli contraposti eguali fra loro nelli quadrilater ſ d b, b d n m, di lati equidistanti ciascuna delle r ſ, m n, sara eguale alla contraposita diametro b d, l'angolo r, sara eguale al b d ſ, retto, & però sara retto, & l'ſ, similmente sara retto, eguale al suo corrispondente, contraposito r b d. Et per la istessa causa, saranno ancora retti l'n, & l'm. Similmente nelli quadrilateri a r m g, a g n ſ; di lati equidistanti ciascuna delle due rette r m, ſ n, sara eguale al contraposito diametro a g; & però eguali fra loro. Et anco all'altro diametro b d, & perciò a ciascuna delle due rette r ſ, m n; Onde il quadrilatero r ſ n m, circonscritto al cerchio hauerà li quattro suoi lati, toccanti la circonferenza del cerchio eguali fra loro, & i suoi quattro angoli retti, & però sara quadrato. Si è dunque al dato cerchio circonscritto vn quadrato, come si è proposto di fare.

Di qui si conosce il lato del quadrato circonscritto al cerchio, essere sempre eguale al diametro d'esso cerchio.

Propositione 8. Problema 8.

IN vn dato quadrato si può inscriuere vn cerchio.

Dato il quadrato a b g d; Diuidasi ciascuno delli suoi quattro lati per mezo, & sia in r, n, ſ, o, & si tirino alli punti oppositi le rette n o, r ſ, segnando il punto c, doue elle si segano, & perche le due rette a n, d o, sono eguali, & equidistanti, ancora le due n o, & a d, che le congiungono insieme sono eguali, & equidistanti, cioe la a o, è eguale, & equidistante al lato a d, & però anco al lato b g; Et per la medesma causa r ſ, sara eguale, & equidistante ad a b, & però anco alla d g (che a r, b ſ, sono eguali, & equidistanti fra loro.) Onde intesi i quattro quadrilateri c a, c d, c g, c b, ciascun d'essi sara di lati equidistanti, & però hanerà i lati, & gl'angoli contraposti eguali, onde n c, sara eguale ad a r, mità di a d, & però ad a n (mità di a b) eguale ad a r, & però à c r, contraposito, ad a n, & però à c ſ, contraposita alla b n, eguale ad a n: & pero eguale alla c o, contraposita ad r d, eguale alla a r. Per il che cosi come le otto mità delli quattro lati eguali del quadrato dato sono eguali fra loro, cosi anco le quattro rette, che hanno il punto c, commune, cioe c r, c n, c ſ, c o, (ciascuno delle quali è eguale a ciascuna delle otto mita dette) saranno eguali fra loro, onde fatto centro il punto, & semidiametro vna d'esse poniamo la c n, & formato vn cerchio, la sua circonferenza di necessità passarà per gli altri tre punti estremi r, c, ſ, & cosi r o, come r ſ, saranno

diametri del cerchio, & perche ad essi diametri stãno ad angoli retti, ò sono perpendicolari nelli loro quattro estremi di quattro lati del quadrato dato ne segue (per il Corollario della decimasesta del terzo) che essi quattro lati siano contingenti il Cerchio, per il che esso cerchio sarà inscritto nel quadrato dato come si è proposto di fare.

Propositione 9. Problema 9.

INtorno a vn dato quadrato si può circonscriuere vn cerchio.

Dato il quadrato a b d g. in esso si tirino i dui diametri a d, b g, segnando il punto c, doue si segano hora considerato il triangolo rettangolo equierure a b d, ciascuno delli suoi dui angoli b a d, b d a. sara semiretto, cioe l'angolo a, sara diuiso per mezo, & cosi l'angolo retto d. Et per la medesima causa ancora il b, & il g, saranno diuisi per mezo. Et perche ciascuno delli quattro triangoli a c b, b c d, d c g, g c a, che hanno per basi i quattro lati del quadrato, hanno i suoi dui angoli sopra ad esse basi eguali, che ciascun d'essi è semiretto, ne segue che tutti essi quattro triangoli siano equicurij, & rettangoli, che ciascuno delli quattro angoli al c, loro vertice, ò sommità commune, sara retto, & perciò il quadrato di ciascuno delli quattro lati c a, c b, c d, c g, sara la mità del quadrato di ciascuno delli quattro lati del quadrato dato a b d g; onde esse quattro rette c a, c b, c d, c g, saranno eguali fra loro, però fatto centro il punto c, & semidiametro, ò apertura del compasso vna d'esse poniamo la c d, si formi vn cerchio, che di necessità la sua circonferenza passara per ciascuno delli altri tre punti b, a, g, & cosi egli sara circonscritto al dato quadrato, come si è proposto di fare.

Propositione 10. Problema 10.

SI può formare vn Triangolo Equicrure, il quale habbi ciascuno delli dui angoli alla base doppio al restante angolo contenuto dalli dui lati eguali.

Piglisi vna linea qual si vogli A B, & si diuida in due parti [illegible] per la vndecima del secondo, che il quadrato della parte A C. maggiore sia eguale al dutto dell'altra parte B C. minore in tutta la mità A B. & fatto centro il punto A (termine commune alla totale AB, & sua parte maggiore AC) & semidiametro la retta totale AB, si formi il Cerchio BD, nel quale dal termine B. del la circonferenza si accomodi in esso cerchio (per la 1. di questo) la retta BD, eguale alla parte maggiore AC, segnando D, doue questa retta accomodata peruiene alla circonferenza, & da esso termine D al centro A, si tiri la retta DA, & sara formato il triangolo B A D, quale è equicrure, o di dui lati AB, AD, eguali, essendo ciascun d'essi semidiametro d'vn medesimo cerchio, & esso triangolo è quello che si propone di formare, che ha ciascuno delli dui angoli B, & D, alla base eguali fra loro, doppio all'angolo A, contenuto dalli suoi dui lati eguali, il che si dimostra cosi. Dal punto C, al D, tirisi la retta CD, & inteso il triangolo ACD, intorno ad esso (per la 5. di questo) si circonscriua il circolo ACD, alqual dal punto B, fuori d'esso essendo dutto le due rette BCA, che lo sega, & la BD applicataui, perche il dutto della segante BA, nella sua parte esteriore BC, è eguale il quad. dell'applicata BD, che la BD, dalla construttione è eguale alla C A, il quad della quale è eguale al dutto di BC, in BA, ne segue (per la 37. del 3.) che l'applicata B D sia toccante il cerchio nel punto D. dalqual punto D, del toccamento, essendo tirato nel cerchio la retta DC, che lo diuide nelle due portioni minore, & maggiore, & fa essa DC, con la contingente DB, l'angolo sinistro BDC, ne segue (per la 32. del 3.) che ad esso angolo BDC, sia eguale l'angolo A, fatto nella portione maggiore alterna destra, & cosi all'angolo A, come al BDC, inteso giunto comunemente l'angolo ADC, allhora alla somma delli dui A, & ADC, sara eguale la somma del dui BDC, CDA, cioe il totale angolo BDA, & però l'angolo ABD, eguale al BDA, ma alla medesima somma delli dui A, & ADC è anco eguale l'angolo DCB, estrinseco del triangolo ACD, del lato AC, allungato in B, al quale angolo DCB estrinseco sono opposti nel triãgolo essi A, & ADC però quest'angolo DCB, sara anco eguale all'ABD, ma diciamo al CBD, che è l'istesso, onde inteso il triang. BDC, & la base la BC, perche i dui ang. DCB, DBC, sopra alla base sono eg. l'vno all'altro ancora, per la 5. del 1. li suoi dui lati CD, BD, sarãno eg. l'vno all'altro, ma la BD, dalla cõstruttione è egu. alla retta AC, però ancora la CD sara egu. all'istessa AC. onde nel triãg. ACD, essendo i 2. lati AC, DC, eg. fra loro, ancora li 2. ang. ad essi cõtrapositi, cioe li CAD, CDA sarãno egua-

eguale alla somma d'essi dui CAD, CDA, sara doppio a ciascuno di loro, però sara doppio all'angolo A, perilche ancora l'angolo ABD, eguale all'ADB) sara doppio all'istesso angolo A. Il triangolo dunque BAD. formato sarà equicrure, & hauera ciascuno delli dui angoli B, & D, alla base doppio all'angolo A contenuto dalli dui lati eguali, che è quello, che si è proposto di fare.

Corollario.

PErche nel triangolo equicrure formato, ciascuno delli dui angoli alla base è doppio all'angolo opposto a detta base, quando ciascuno d'essi dui sia 2. l'altro delli lati sara 1. & però tutti tre essi angoli saranno 5. onde l'angolo delli lati, che è 1, sarà l'$\frac{1}{5}$ di tutti tre, & ciascuno delli dui angoli alla base sara li $\frac{2}{5}$ di tutti tre, ma essi tre angoli (per la 32. del primo) sono quanto dui angoli retti, però ciascuno delli dui angoli alla base sara li $\frac{2}{5}$ di dui retti, cioe li $\frac{4}{5}$ d'vn retto, & la sua mità che è $\frac{2}{5}$ d'vn retto sara l'angolo contenuto da i dui lati eguali; Et cosi si è formato vn triangolo equicrure, che ha per angolo contenuto da i dui lati eguali $\frac{2}{5}$ angolo retto, essendo ciascuno de gl'altri dui $\frac{4}{5}$ d'vn retto.

Propositione 11. Problema 11.

IN vn dato Cerchio si può inscriuere vn Pentagono Equilatero, & Equiangolo.

Sia il dato cerchio ABCDG. da inscriuerui vn Pentagono Equilatero, & Equiangolo. Per farlo. Formisi vn triangolo equicrure a c d) per la antecedente 10. propositione tale che ciascuno delli suoi dui angoli alla base sia doppio all'altro angolo de i lati, & nel cerchio dato si inscriua (per la seconda di questo) vn triangolo ACD equiangolo a questo formato; poi si diuida per mezo, ciascuno delli dui angoli eguali C. & D, alla base con le rette CG, DB, che arriuino alla circonferenza, & sia in G, & D, & dal B, alli propinqui A, & C. si tirino le due rette BA, AC, & dal G alli propinqui A, & D, si tirino le due rette GA, GD, quali cō la CD, base del triāgolo equicrure ACD, formaranno il Pentagono ABCDG, inscritto nel cerchio, perche ciascuno delli suoi 5. angoli tocca la circonferenza del cerchio, & sara equilatero, & equiangolo, ilche si dimostrerà cosi. Perche ciascuno delli 2. angoli ACD, ADC doppio all'angolo CAD è diuiso per mezo le quattro loro mità eguali fra loro, saranno eguali all'angolo CAB, onde anco eguali saranno fra loro i cinque archi CD. DG. GA. AB. BC. basi loro, & però anco le cinque loro corde, ò rette CD. DG. GA. AB. BC. sono similmente eguali fra loro, ma queste sono i cinque lati del Pentagono formato, però egli è equilatero. Et quanto all'essere equiangolo, consideraremo che la circonferenaa del cerchio è diuisa in cinque archi eguali che ciascuni però è l'$\frac{1}{5}$ della totale circonferenza, & ciascuno delli tre angoli del Pentagono cioe BAG. AGD GDC. DCB. CBA. hn per base di circonferenza tre d'essi archi eguali, cioe li $\frac{3}{5}$ delle circonferenza, onde perche essi angoli hanno per basi cinque archi eguali, che ciascun d'essi è li $\frac{3}{5}$ della totale circonferenza del cerchio) ne segue (per la 27. del terzo) che essi 5. angoli siano eguali fra loro: Si è dunque nel cerchio dato formato vn Pentagono equilatero, & equiangolo, come li e proposto.

Corollario.

DI qui si conosce ciascun'angolo del Pentagono equilatero, & equiangolo essere quanto 1 $\frac{1}{5}$ di retto, cioe superare il retto in $\frac{1}{5}$ di retto (& però ottuso, che preso il suo angolo A. cioe il BAG diuiso dalle due rette AC, AD, in tre parti, ò angoli BAC. CAD. DAG, eguali, perche le 3. basi circonferentiali loro BC, CD, DG sono eguali l'vna all'altra, sapendo che l'angolo CAB. vna d'esse tre parti eguali, è $\frac{2}{5}$ di retto, essendo il triangolo CAB. equicrure fatto equiangolo all'a c d che ha ciascuno delli dui angoli c, & d, alla base doppio all'a, de i lati, & però esso a essere $\frac{2}{5}$, di retto, come si è veduto nella antecedēte propositione, & però ciascuno delli altri dui BAC. DAG essere similmente $\frac{2}{5}$ di retto si conosce il composto loro che è il totale angolo BAG del Pentagono essere tre volte quanto $\frac{2}{5}$ di retto, che fa $\frac{6}{5}$ di retto, cioe vn'angolo retto, & vn quinto. Che al modo de gli Architetti inteso la base arcuale, ò quarta parte di circonferenza d'vn Circolo che è quella che sottotende a ciascun angolo retto fatto nel centro con dui semidiametri diuisa in

90. parti

90. parti, che sogliono chiamare gradi, (intesa la totale circonferēza diuisa in 360 gradi al modo de gli Astronomi) l'angolo del Pentagono, che contiene 1 $\frac{1}{5}$ di retto, si dirà essere angolo di gradi 108. perche l'$\frac{1}{5}$ di 90. è 18. che con 90. per il retto fa 108.

Si conosce ancora nella formatione del Pentagono nel cerchio, hauendo prima fatto il triangolo equicrure, ciascuno delli dui angoli, alla base del quale sia doppio all'angolo de' dui lati, & che perciò l'angolo de i lati sia $\frac{2}{5}$ di retto (cioe al modo de gl'Architetti di gradi 36.) essendo ciascuno delli dui angoli alla base $\frac{4}{5}$ di retto (cioe di gradi 72.) si conosce dico, che la base di questo triangolo equicrure, douentando lato del Pentagono, all'hora ciascuno de' dui lati del medesimo triangolo douenta subtensa a dui lati del Pentagono, cioe douēta base d'vn triangolo equicrure, che ha per lati dui lati del Pentagono. Et perche la base del triangolo equicrure detto inscritto nel cerchio è vno delli cinque lati del Pentagono, si potria andare accomodando nel cerchio la sua lunghezza, segnando i punti doue peruiene alla circonferenza, che vi si accommodaria perciò cinque volte precise, & cosi nel cerchio saria inscritto il Pentagono equilatero, & equiangolo. Di qui mò potiamo deriuare vn modo facile da formare vn Pentagono equilatero, & equiangolo sopra vna linea retta, cioe dato il lato del Pentagono formare il Pentagono, & sara questo. Al lato dato si accompagni da vn'estremo vna retta ad angolo retto, eguale alla mità d'esso lato, & alla retta sottotendente a tale angolo retto si aggiunga in lungo la mità del lato dato, che il composto sara la lunghezza della subtensa a dui lati del Pentagono, & sopra al lato dato preso per base, si formi vn triangolo equicrure ciascuno de i lati destro, & sinistro, del quale sia eguale alla subtensa trouata. Ancora preso ciascuno d'essi dui lati desto, & sinistro come base sopra a ciascuna d'esse dalle parti esteriori, si formi vn triangolo equicrure, ciascuno de i dui lati, del quale sia eguale al lato dato del Pentagono, che allhora essi quattro con il lato (base del primo triangolo equicrure formato) formaranno vn Pentagono equilatero, & equiangolo, vno delli lati, del quale sara il lato dato, che per esempio praticale. Dato il lato a b, da vn'estremo a, se li accompagni ad angolo retto la retta, a c, eguale alla mità di a b, & fatto centro il punto c, & interuallo la c a, si segni vn cerchio, ò pezzo d'arco all'incōtro dell'estremo b, & imaginato la retta b c, allungato fino alla circonferenza di questo cerchio, & sia in d, la b d, mostrarà la lunghezza della subtensa a dui lati del Pentagono, però fatto centro il punto b, & interuallo, ò semidiametro la lunghezza di b d, si segni vn pezzo d'arco dalla banda superiore, che si interseghi con vn'altro pezzo d'arco segnato dalla medesma banda superiore con la istessa apertura di cōpasso fatto centro l'altro estremo a, del lato a b dato, & sia il punto della intersegatione e, quale determina l'altezza del Pentagono, essendo ciascuna delle due rette b e, a e (eguale alla b d) subtensa a dui lati del Pentagono, onde fatto centro il punto e, & con l'interuallo, ò apertura di compasso eguale al lato a b; segnato da mano destra, & sinistra verso la parte inferiore verso à b. dui pezzi d'arco, che si interseghino con dui altri pezzi d'arco fatti con la istessa apertura di a b, & con i centri a, & b, segnando r, & n, nelli punti delle intersettioni tiraremo poi dall'r, alli e, & a le due rette r e, r a, & dall'n, le due rette n e, n b, che queste quattro rette saranno quattro lati del Pentagono, qnali con il dato a b, formaranno il Pentagono a b n e r, equilatero, & equiangolo.

Se volessimo per numero trouare l'altezza e f, del Pentagono, che và dalla cima e, perpendicolarmente al mezo f, del lato oppostoli a b, & è perpendicolare, ò altezza similmēte del triāgolo equicrure b e a, essendo il lato a b. 10. cauaressimo 25. quadr. di a f (mità di 10. di a b) da 150. p̄ R 12500. quadr. di a e, (che essendo a b 10. & a c 5. la subtensa b c, è R 125. alla quale giunto c d, eguale alla mità di a b, la totale b d, & però la a e, à lei fatta eguale sarà Rad. 125. p̄ 5. però il suo quadr. è 150. p̄ R 12500.) & il restante 125. p̄ R 12500. sarà il quadr. di e f, & però e f, saria la R d'essa quantità, cioè saria rad. L. 125. p̄ rad. 12500 L. altezza del Pentagono.

Potressimo anco trouare la grandezza d'esso Pentagono intesolo diuiso in tre Triangoli equicrurij a r e. b n e (eguali fra loro) & a e b, mediante la notitia, che habbiamo delli lati loro; ma in altro luogo si mostrerà in ciò altro modo più facile, & espediente.

Ancora dalla construttione del Triangolo equicrure, che habbi ciascun'angolo alla base $\frac{4}{5}$ di retto, insegnato dalla 10. propositione di questo Quarto Libro, mediante la 11. del secondo, si vede, che diuiso vna retta data a b; in due parti tali in c, che il dotto della parte minore a c, in tutta la data a b, sia eguale al quadr. della parte maggiore c b; all'hora la parte maggiore c b, diuenta base del Triangolo equicrure, & perciò lato d'vn Pentagono equilatero, & equiangolo, & la data a b, mostra la lunghezza di ciascuno delli dui lati di esso Triangolo equicrure, & però la lūghezza

della subtensa a dui lati del Pentagono regolare, cioè Equilatero,& Equiangolo, che habbi per lato la base detta di esso Triangolo Equicrure: E perche data la retta da diuidere secondo, che insegna la 11. del secondo, il modo è, che ad essa retta,& sia la a b, si accompagni da vn suo termine,(& sia dall'a) ad angolo retto vna retta a d, che sia la mità della a b,& dall'altro termine b della data al d, si tiri la transuersale b d, alla quale cominciando dal d,& allongando la d, a, verso a, si facci eguale la d g, che all'hora all'allungamento a g sarà eguale la parte maggiore della a b, il quadr. della qual parte maggiore è eguale al dutto della parte minore in tutta la diuisa, ò data a b, quale a b viene ad essere la subtensa a dui lati del Pentagono (essendo il lato d'esso Pentagono eguale alla a g; Onde se in numeri poneremo la subtensa a b 10. la sua mità a d, sarà 5. & la transuersale b d sarà rad. 125.& perciò rad. 125. sarà la d g. dalla quale d g. rad. 125. cauata la sua parte d a 5. la restante a g sarà rad. 125. me. 5. che è il lato del Pentagono quando la subtensa a' suoi dui lati sia a b 10 Et così mediante la notitia della subtensa a dui lati siamo venuti in cognitione del lato. Ma potremo anco conuersamente mediante la notitia del lato posto poniamo 10. venire in cognitione della subtensa a'dui lati, seruendoci della Regola del tre,& dicendo, Quando il lato del Pentagono e 5. m. rad. 125. la subtensa a dui lati e 10. Quando mò il lato sia 10. quanto sara la subtensa? Che moltiplicando 10. via 10.& il prodotto 100 partendo per rad. 125. m. 5. l'auenimento rad. 125. più 5. sata la subtenla a' dui lati quando il lato sia 10. Di questo rad. 125. più 5. la rad. 125. si vede essere la retta, che sottotende, ò si oppone all'angolo retto contenuto dal 10. lato, & da 5. mita del lato & il 5 giunto ad essa rad. 125. e il 5. mita d'esso lato. Onde dato il lato del Pentagono vediamo, che per trouare in linee la subtensa à dui lati si hà da accompagnare ad angolo retto ad vna delle estremità d'esso lato la sua mita,& da esso angolo retto tirata la retta sottotèdenteli, ad'essa giongere in lungo la mita del lato, che il composto sarà la subtensa à dui lati del Pentagono.

a g. rad. 125 me. 5.
rad. 125 me. 5. da 10. che data 10

rad. 125. più 5. 100

100. partitore 1. via
tad. 125. p 5 fa rad. 125. p 5.
però 10. dara rad. 125. p 5.

Potiamo anco facilmète in altro modo sopra ad'vna data retta formare il Pentagono regolare così.

Posto poniamo il lato à b, del Pentagono 10. egli si diuida per mezo ad'angoli retti con la perpenpieolare t, fatta eguale al lato a b, 10. poi fatto centro il punto t,& semidiametro il semilato 5. del Pentagono si facci dalla parte superiore vn pezzo d'arco al quale possa peruenire vna retta, che partendosi dal termine b, del lato del Pentagono passi per il pùto t, arriuando all'arco detto.& sia in u. (che la b u, sarà la subtensa à dui lati del pentagono, perche b t, è rad. 125 che giontoli t u, 5. fa rad. 125 p 5.) poi fatta cètro il punto b,& semidiametro la b u, si segni vn pezzo d'arco dalla banda superiore fino al quale si allunghi la ppendicolare t t,& si segni e, doue ella vi arriua che la s e, sarà l'altezza del Pentagono, onde con i centri a b e.& semidiametri a b, lato del Pètagono fatti i cerceoli, che si seghino in d.& c, & tirate le rette c d, d b, c e, a e; elle insieme con la data a b, formarano il Pentagono proposte.

Propositione 12. Problema. 12.

INtorno à vn dato cerchio si può descriuere vn Pentagono Equilatero, & Equiangolo.

Sia dato il cerchio a b c d e, intorno al quale si vogli descriuere vn Pentagono, equilatero, & equiangolo. Per farlo in esso cerchio (per la antecedente 11. propositione) si in inseriua il Pètagono equilatero,& equiangolo a b c d e,& dal centro o, alli angoli di questo Pètagono si tirino le 5. rette o a, o b, o e, o d, o e, alle quali si tirino le 5. ppendicolari, allungandole da ciascuna bàda finche concorrano insieme con le à loro prossime,& siano g p, p q, q m, m n, n g, còeorrenti insieme nelli punti p q, m n g, (& che concorrano è chiaro, pche intesi poniamo le p a, n e, sopra alle quali cade la a e,& sia la sòma delli 2. angoli verso il g, minori di 2. retti, che l'vno è parte del retto o e g,& l'altro è parte del retto o a g, ne segue, che esse due rette p a, n e, allungate dalla banda detta verso g, di necessità concorrerano insieme, & così ancora l'altre dette similmète per la medesma causa còcorrerano insieme.) Et pche esse 5. rette (per il Corollario della 16. del terzo) sono contingèti al cerchio sarà da esse descritto il Pentagono g p. q. m, n, intorno al cerchio dato, qual Pentagono si dimostra essere Equilatero,& equiangolo, così. Intesi li 2. triangoli rettangoli eog, aog, perche

perche i 2. lati e o, o g dell'vno sono eguali alli 2. lati a o, o g, dell'altro, ne segue, che il restãte lato e g, dell'vno sia eguale al restante lato a g dell'altro (ilche anco, cioe che e g sia eguale à g a, è manifesto per la 36. del 3. venendo le 2. g e, g a tangenti il cerchio da vn medesmo punto g fuori del cerchio, & l'angolo e o g. sarà eguale all'a o g (onde ciascun d'essi sarà la mità del totale angolo e o a) & ancora l'angolo e g o, sarà eguale all'angolo a g o, perilche ciascun d'essi sarà la mità del totale angolo e g a; & perciò il totale angolo e g a, sarà doppio a ciascuno d'essi e g o, a g o; Nel medesmo modo si prouarà intesi i dui triangoli a o p, o e p, la a p, essere eguale alla b p, l'angolo a o p, al b o p (& perciò ciascun d'essi esser la mità del totale a o b) & l'angolo o p a, essere eguale all'o p b & perciò à ciascun d'essi essere doppio l'a p b; Et perche all'angolo a o e, fatto nel cẽtro del cerchio dato è eguale l'angolo a o b, fatto anc'egli nel centro, perche ciascun di loro hà per base la 5. parte della circõferenza del cerchio dato, cioe perche all'arco a e. base dell'vno, è eguale l'arco a b, base dell'altro, ne segue, che anco l'angolo a o g, mità dell'vno sarà eguale l'angolo a o p, mità dell'altro, & però nelli dui triangoli rettangoli a o p, o a g, doue ancora l'angolo o dell'vno è eguale all'angolo o, dell'altro il restante ang. o g a, sarà eguale al restãte angolo o p a il lato o g, all'o p, & il g a, all'a p. onde la retta g p è doppia, cosi alla g a, come alla a p, & nel medesmodo vedremo la p q esser doppia alla p b, alla quale p b, si e' mostrato esser eguale la a p. però ancora la total g p sarà eguale alla totale p q; Et cosi potremo andar mostrãdo l'altre rette q m, m n, n g, essere eguali fra loro, & alle p q, g p, onde il Pentagono circonscritto si conoscerà esser equilatero, & similmẽte si potrà andare mostrando ciascuno delli 5. angoli g, p q, m, n, esser doppio a ciascuna delle sue due parti, nelle quali e diuiso dalle linee, che vengono dal centro o: Et pche nelli dui triang. rettang. o a g, o a p, li dui ang. o g a, o p a si e mostrato essere eguali fra loro, ancora il totale angolo a g e doppio dell'vno sarà eguale al totale angolo a p b doppio dell'altro. cioe li dui angoli g & p del Pentagono circonscritto saranno eguali fra loro. Et cosi potremo andar concludendo li altri tre a, m n, essere similmẽte eguali fra loro, & a ciascuno delli dui g, & p. & perciò il Pentagono circonscritto, che e' equilatero, si vede essere anco equiangolo, perilche si e intorno al cerchio dato descritto vn Pentagono equilatero & equiangolo come si e' proposto di fare.

Corollario.

Dal'a dimostratione di questo Problema si conosce, che se nel cerchio si inserirà alcuna figura qual si voglia Equilatera (& però anco Equiangola. & a ciascuna delle rette, che vadino dal centro del Cerchio a gli angoli della figura inscritta si tirino le perpendicolari, quali concorranno insieme da ciascuna delle due bande, elle formaranno vn'altra figura d'altri tanti lati, quanti hà la inscritta equilatera, & equiangola anc'ella, che sarà circonscritta al cerchio, & anco alla prima figura, il che tutto si dimostrarà sẽpre nel modo istesso, che si è mostrato in questo 12. Probl.

Propositione 13. Problema 13.

IN vn dato Pentagono equilatero, & equiangolo si può inscriuere vn cerchio.

Nel dato Pentagono ABCDE, sia da inscriuere vn cerchio. Per farlo. Diuidansi dui de' suoi angoli non propinqui, ò prossimi, cioe intermediati da vn'altro angolo, & siano A, & D in due parti eguali con le rette AO, DO, segnando il punto O, nel concorso loro, che sarà dentro al Pentagono (perche imaginato dal punto A, al D, la subtensa A D a dui lati AE, D E, del Pentagono. Et anco dal medesimo punto A al C, l'altra subtensa a dui lati A B, B C, & inteso il triangolo equicrure A E D, che ha l'angolo E $\frac{6}{5}$ di retto, ciascuno delli altri dui eguali EAD, EDA, sarà $\frac{2}{5}$, di retto, ma l'ODE, mità del CDE è $\frac{3}{5}$ di retto maggiore dell' EDA, da lui contenuto, però la retta DO, sarà piu lontana dalla parte destra E del Pentagono, che la subtensa AD. cioe la retta DO sara fra la subtensa AD, & la parte finistra B, del Pentag. & per la medesma causa essẽdo l'angolo OAE $\frac{3}{5}$ di retto maggiore del DAE $\frac{2}{5}$ di retto, la retta AO, ancor ella fra la AD, & la parte finis. verso B. del Pentag. Ancora inteso il triang. equicrure ABC. essẽdo l'angolo B $\frac{6}{5}$ di retto, ciascuno delli dui eguali BAC, BCA, sarà $\frac{2}{5}$ di retto, & però il BAO (mità del B A E) che è $\frac{3}{5}$ di retto è maggiore del BAC, perilche la retta A O, più si allontana dal lato A B, di quello, che sia la subtensa A C, cioe' la A O, sarà dalla parte destra, rispetto alla AC; Et per la medesma causa, come si e' detto, essa AD, sarà finistra, rispetto all'altra

ſubtenſa AD. pero ella ſara fra le due ſubtenſe AD, AC, & perche l'angolo OAD è minore d'vn retto (che e ſolo l'$\frac{1}{5}$ d'vn retto) & ſimilmente l'angolo ODA, e minore d'vn retto (che anch'egli e' l'$\frac{1}{5}$ d'vn retto, & percio la ſomma delli dui angoli interiori OAD, ODA delle due rette AO, DO, con la AD, che le ſta ſopra, eſſendo minore di dui retti, ne ſegue, che dette due rette A O, DO, di neceſſità deuano concorrere inſieme dalla banda delli angoli detti, cioè dalla parte ſiniſtra, riſpetto alla AD, ma la AO viene all'ingiù fra le due ſubtenſe, & la DO, allontanandoſi dal ſerior lato CD del Pentagono, và all'inſù ad incontrarla, onde elle s'incontraranno, o concorreranno inſieme fra eſſe due ſubtenſe, & dentro al Pentagono.) Hora ſi dice queſte due rette A O, DO, concorrenti inſieme nel punto ſegnato O, eſſere eguali fra loro, & a ciaſcuna delle rette, che ſi tirino dal medeſimo punto O, a ciaſcuno delli angoli del Pentagono; Et ciaſcuna d'eſſe diuidere anc'elle ciaſcuno delli angoli del Pentagono in due parti eguali, perche nel triangolo AOD, eſſendo ciaſcun delli dui angoli OAD, ODA alla baſe $\frac{1}{5}$ di retto, cioe eguali fra loro; ne ſegue, che ancora i dui lati OA, OD ad eſſi angoli oppoſti ſiano eguali l'vno all'altro. Ancora imaginato il triangolo AOC (tirata la retta OC) & l'OAD, perche il lato AC dell'vno è eguale al lato AD dell'altro (che ſono le due ſubtenſe alli dui angoli eguali B, & E del Pentagono, eſſendo anco li dui lati AB, BC, del triangolo ABC, eguali alli dui lati AD, ED del triangolo AED.) & l'A O è commune, & di più l'angolo CAO de i dui lati dell'vno ($\frac{1}{5}$ di retto) e eguale all'angolo BAO, delli dui lati dell'altro ($\frac{1}{5}$ anc'egli di retto) ne ſegue, che il reſtante lato, o baſe CO, dell'vno ſia eguale al reſtãte lato, o baſe DO dell'altro, l'angolo AOC, all'AOD, che è $\frac{8}{5}$ di retto, & l'ACO, all'ADO $\frac{1}{5}$ di retto, onde il COD reſta $\frac{4}{5}$ di retto, & ciaſcuno delli dui eguali OCD, ODC, nel triangolo equicrure COD, ſarà $\frac{3}{5}$ di retto, perilche coſi l'angolo BCD è diuiſo per mezo dalla CO, che và al punto O, come l'angolo CDE dalla DO, a lei eguale; Ancora imaginata la retta OE, & li dui triangoli AOE, DOE, perche i tre lati dell'vno ſono eguali alli tre lati dell'altro, ancora ciaſcuno delli angoli dell'vno ſarà eguale allo a lui corriſpõdente angolo dell'altro, cioe l'AOE, al DOE, & l'AEO, al DEO, perilche l'angolo E, ſara anc'egli diuiſo per mezo dalla retta OE, che và dal punto O, ad eſſo angolo E, & pero ciaſcuno delli dui triangoli A O E, D O E, ſara equicrure, onde la retta OE, ſara eguale a ciaſcuna delle due AO, DO, & però anco alla CO, ſimilmente dal punto O, imaginato all'angolo reſtante B, del Pentagono tirata la retta OB, & conſiderati i dui triangoli AOB, COB, perche i tre lati dell'vno ſono eguali alli tre lati dell'altro ciaſcuno al ſuo corriſpondente, ne ſegue, che ancora i tre angoli dell'vno ſiano eguali a i tre angoli dell'altro, & però l'AOB, al COB, & l'ABO, al CBO, perilche l'angolo B, ſarà diuiſo per mezo della retta OB, come è ciaſcuno de gli altri dalle rette ſimili à la OB, che vanno dal punto iſteſſo O, a gli angoli del Pentagono; Et perche ne i dui triangoli AOB, COB inteſe baſi, le AB, BC, li angoli ad eſſe baſi ſono eguali fra loro, eſſendo ciaſcun di eſſi la mità dell'angolo del Pentagono, & pero $\frac{3}{5}$ di retto, ſi conoſce, che anco i lati di eſſi triangoli oppoſti a detti angoli alle baſi eguali, ſono eguali fra loro, cioe l'OB, all'AO, & all'OC, & percio l'OB, ſarà anco eguale a ciaſcuna delle due OD, OE; Et coſi ſi è prouato le cinque rette, che partendoſi dal punto O, vanno a i cinque angoli del Pentagono eſſere eguali fra loro, & diuidere per mezo eſſi cinque angoli del Pentagono; Dal che anco ſi conoſce, che il punto O, ſi troua non ſolo à diuidere dui angoli non propinqui del Pentagono per mezo, ma anco ſe bene ſi diuideſſero dui contigui, poniamo l'A, & il B, poiche ſi è moſtrato, che tutte le rette, quali partẽdoſi dall'iſteſſo punto O, vãno a gli angoli del Pentagono, quali ſi voglino gli diuidono per mezo, & perciò conuerſamente quali ſi voglino due rette, che partendoſi da quali ſi voglino dui angoli del Pentagono, gli diuidono per mezo, di neceſſità concorreranno in quel punto O, doue anco concorrerebbono tutte l'altre, che diuideſſero per mezo gli altri angoli del Pentagone; Ma che diuidendo per mezo dui angoli propinqui del Pentagono, poniamo l'A, & B, le due diuidenti deuano concorrere inſieme dentro al Pentagono, ſi può anco dimoſtrare coſi. Diuidaſi l'angolo A per mezo con la A O, & inteſo da eſſo angolo A, tirate le due ſubtenſe a dui lati AC, AD, che ſono eguali (eſſendo baſi di dui triangoli equicrurij di lati, & angoli eguali ABC, AED) elle ſaranno lati del triãgolo equicrure CAD, & la AO, che è fra eſſe allungata, arriuarà percio alla baſe CD (& la diuiderà per per mezo ap angoli retti (che l'angolo CAO è eguale al DAO;) Ancora eſſendo diuiſo l'angolo B per mezo, & inteſo dall'iſteſſo punto B, tirate le due ſubtenſe a dui lati BE, BD, che ſono eguali, & formaranno cõn la baſe DE il triangolo equicrure DBE, la diuidente per mezo l'angolo B, ſarà fra eſſe due ſubtenſe, & allungata arriuarà alla baſe DE & perciò verrà a ſegare l'altra, che venẽdo dal punto A, ſeghi anco, & la BE, & la BD, arriuando alla CD, che è diſotto alla BD; onde il ſegamento, ò punto O, ſarà fra le BE, & BD; Trouato il punto O, egualmente lontano dalli 5. angoli del Pentagono da eſſo a ciaſcuno delli cinque lati del Pentagono, ſi tiri vna perpendicolare, che diuiderà il lato oppoſtoli per mezo, eſſendo ciaſcuno delli cinque triangoli COD, & gli

altri Equicrurij.) Ouero diuiso ciascuno delli cinque lati del Pentagono per mezo, da ciascuna delle cinque diuisioni al punto O, si tiri vna retta (che sarà perpendicolare al lato diuiso) & siano le O r, O ſ, O t, O u, O x; quali saranno fra loro eguali, perche intesi i dui Triangoli r A O, x A O, li dui lati r A, A o, dell'vno con il suo angolo $\frac{3}{5}$ di retto (mità del B A E) sono eguali alli dui lati X A, AO, dell'altro con il suo angolo $\frac{3}{5}$ di retto, onde la base r O, dell'vno sarà eguale alla base X D, dell'altro, & l'angolo r O A, eguali all'angolo X O A (ouero si poteua dire, intesi i dui triangoli rettangoli A r O, A x O, perche i dui angoli A r O, r AO, dell'vno sono eguali alli dui angoli A x O, x AO, dell'altro, & hanno il lato AO, cõe; ancora il lato r O, dell'vno (per la 26. del primo) sarà eguale al lato x O, dell'altro, & il lato A r, all'A x, & l'angolo A O r, all'A O x; & intesi i dui triangoli rettangoli B ſ O, B r O, similmente perche i dui angoli B ſ O, ſ B O, dell'vno sono eguali alli dui angoli B r O, r O B, dell'altro, & hanno il lato B O, commune, ne segue (per la 26. del primo) che il latò r B, dell'vno sia eguale al lato S B dell'altro, & il lato ſ O, al lato r O, ma all'r O è anco eguale l'x O, però ancora l'ſ O, sarà eguale all'x O; Et così con l'istesso modo si prouarà le O t, & O u, essere eguali a ciascuna delle tre dette O ſ, O r, O x; & fra loro, perilche le cinque linee dette, che dall'O, vanno perpendicolarmente alli cinque lati del Pentagono, (& gli diuidono per mezo) sono eguali fra loro, onde fatto centro il punto O, & semidiametro vna d'esse cinque linee poniamo la O t, la circonferenza del cerchio che si farà, passarà per gli altri quattro punti ſ r, x u, & toccarà i cinque lati del Pentagono, per il Corollario della 16. del terzo) essendo essi cinque lati ad angoli retti alli cinque semidiametri detti, & però si farà inscritto il cerchio nel Pentagono dato, come si voleua fare.

Si conosce hora che per inscriuere nel Pentagono dato vn cerchio, in vece di diuidere dui de' suoi angoli per mezo, si può diuidere dui de' suoi lati per mezo, & dalli punti delle diuisioni all'angolo oppostoli del Pẽtagono tirare le due rette, che si intersegarãno insieme dentro al Pẽtagono, & il punto dell'intersegamento sarà il centro del cerchio, & semidiametro ciascuna delle rette, che da esso centro arriuarà al mezo d'vn de' lati del Pentagono, al quale di necessità sarà ancora perpendicolare. Ancora nel medesmo modo in qualsiuogli figura equilatera, & equiangola si può inscriuere vn cerchio. Che diuisi dui de' suoi angoli per mezo il punto della intersettione, delle due diuidenti sarà il centro, dal quale alli lati della figura tirate le perpendicolari (che andaranno in mezo ad essi lati) elle saranno fra loro eguali, & semidiametri del cerchio, la circonferenza del quale toccarà ciascuno delli lati della figura equil. & equiang. però sarà inscritto in essa.

Propositione 14. Problema 14.

INtorno à vn dato Pentagono Equilatero, & Equiangolo si può discriuere vn Cerchio

Dato il Pentagono Equilatero, & Equiangolo ABCDE, per circonscriuerli vn cerchio, Diuidansi dui de' suoi angoli, poniamo A, & B, per mezo con le rette A O, B O, quali (come s'è mostrato nell'antecedente Problema, la figura del quale seruirà ancora questo) concorreranno insieme dentro al Pentagono, & sia nel punto O, dal quale a ciascuno delli altri angoli del Pentagono tirate le rette OC, OD, OE, elle diuideranno gli angoli C, D, E anc'essi per mezo, (& li 10. angoli partiali saranno eguali fra loro) & le dette 5. rette diuidenti, che vanno dal punto O, alli angoli del Pentagono saranno egnali fra loro, come si è mostrato nell'antecedente Propositione, perilche fatto centro il punto O, & semidiametro vna d'esse 5. rette poniamo la OB. & formato sin Cerchio la circonferenza d'esso passarà per gli altri 4. punti angolari CDEA, del Pentagono dato, & perciò il Cerchio sarà circonscritto al Pentagono, come si voleua mostrare.

Con il medesmo modo si potrà intorno à qualsiuogli figura equilatera, & equiangola descri-

uere vn cerchio, che sẽpre diuisi dui de' suoi angoli propinqui per mezo, il punto, doue le due diuidenti concorreranno insieme, (& sarà dentro alla figura) sarà centro del cerchio, dal quale tutte le rette tirate à gl'angoli della figura, (& gli diuideranno in due parti eguali) saranno eguali fra loro, & perciò presa vna d'esse p semidiametro del cerchio, che si farà la circonferenza passarà per tutti gl'angoli della figura, & perciò sarà descritta intorno ad essa figura.

Habbiamo veduto come ad vn cerchio dato si inseriua, & circonseriua vn Pentagono regolare, cioè equilatero, & equiangolo, & anco come ad vn Pẽtagono regolare si inseriua, & circonseriua il cerchio, onde hora, riducendosi alla pratica, vedremo come in numeri dato il diametro del cerchio, si troui il lato del Pentagono da inscriuerli, & il lato del Pentagono da circonseriuerli; Et come dato il lato del Pentagono si trouano li diametri delli cerchi, da inscriuerli, & circonseriuerli, che nella figura A, dato il lato p q. del Pẽtagono inscritto al cerchio essere 10, che però la subtensa g p. à dui suoi lati sarà rad. 125. p̃ 5. noi per trouare il semidiametro p o. del cerchio circonscrittoli, poneremo che sia 1. cen. & dal suo quad 1. co. cauato 25. quad. di r p, resta 1. co. m̃ 25. che è il quad. di o r, però o r sara rad. L. 1. cẽ. m̃ 25. L. & giõtoli o g. eguale ad o p, posto 1co. fa 1 cen. p̃ rad. L. 1 cen. p̃ 25 L. che è g r altezza del Pẽtagono inscritto; ma essa altezza g r è rad. L. 125. p̃ rad. 12500. L. (che cauato 25. quad. di p r, da 150. p̃ rad. 12500. quadrato di p g, subtensa resta 125. p̃ rad. 12500. per il quad. di g r, però essa g r sarà rad. L. 125. p̃ rad. 12500. L.) però à questa rad. L. 125. p̃ rad. 12500. L. è eguale 1co. p̃ rad. L. 1 cen. m̃ 25. L. onde quadrando ciascuna parte, haueremo 125. p̃ rad 12500. eguale à 1 cen. p̃ 1 cẽ. m̃ 25. p̃ rad. L. 4. ✱ m̃ 100. cen. L. & accomodato il m̃, haueremo 150. p̃ ℞ 12500. eguale a 2. cen. p̃ ℞ L. 4. ✱ m̃ 100. ƶ L. & leuato 2 ƶ da ciascuna banda, accioche la ℞ LL. resti da se, haueremo 150. p̃ ℞ 12500. m̃ 2 cen. eguale a ℞ L. 4 ✱ m̃ 100. cen. L. & quadrando ciascuna parte, & seguendo come si vede in margine trouaremo il valore della cosa, & perciò il semidiametro p o del cerchio posto 1co. essere rad. L 50. p. rad. 500. L. Hora dal quad. di p o, cioè da 50. p. rad. 500. cauato 25. quad. di p r, il restante 25. p. rad. 500. sarà il quad. di o r, però essa o r sarà rad. L 25. p. rad. 500. L, che è la perpendicolare del triang. equicrure p o q, che ha per base il lato q p 10. del Pentagono, & esso triang. è l'$\frac{1}{5}$ del Pentag. perilche il Pẽtag. dal centro o, si diuide in 5. trang. equicrurij eguali la base di ciascuno de' quali è vn lato del Penta-

150. p̃ ℞ 12500. m̃ 2 cen. eguale à ℞ L. 4 ✱ m̃ 100. cen. L.
via 150. p̃ ℞ 12500 m̃ 2 cen.

---

fa 35000. p̃ ℞ 112500. p. 4 ✱ m̃ (600. p. rad. 200000) cen. eg. à 4 ✱ m̃ 100. cen.
cioe 35000. p. rad. 11 5800000. p. 100. cen. eguale à (600. p. rad. 200000.) cen.
cioe à (500. p. ℞ 200000) ƶ sarà eg. 35000. p. ℞ 1125000000. & schisãdo p 100.
sarà (5. p. rad. 10) cen. eguale à 350. p. rad. 112500.

5. m̃ rad. 20.   70 p. rad. 4500.

---

via   5. m̃ rad. 20.

---

5 partitore   fa 50. p. rad 500. che è il valore d 1 cen.
però rad. L. 50. p. rad. 500 L. è il valore d' 1co.

semigiro del Pentagono 25. cioe rad. L. 625. L. rad. 390625.
via la perpendicolare o r, rad. L. 25. p. rad. 500 L.

---

fa rad. L. 15625. p. rad. 195312500 L. grandezza del Pentagono.

13975. ———— 475.
quasi 29600. $\frac{4}{1}\frac{7}{1}\frac{5}{8}$ 13975 $\frac{3}{1}\frac{1}{1}\frac{0}{1}$
11875. 279500.
$\frac{1}{1}\frac{7}{6}\frac{2}{}$
cioe 172 $\frac{3}{4}\frac{}{4}$ & alquanto più

o r rad. L. 25. p. rad. 500 L. perpendicolare da per lato p q 10. che darà
o g perpendicolare rad. L. 50. p. rad. 500 L.

& schisando la prima quantità o r, & la p q. per 5.
rad. L 1. p. rad. $\frac{4}{5}$ L. perpendicolare darà 2, per lato.

Pentagono,& moltiplicato la perpendicolare o r,per q r,mità della base p q,il prodotto sara la grandezza del triang. p o q, che quinterplata darà la grãdezza del Pẽtagono, ouero moltiplicato la perpendicolare o r,rad.L.25.p.rad.500.L. via la mità delle 5.basi delli 5.triang.cioe p 25. mità del giro del Pentag. il prodotto rad. L.15625.p.rad 195312500L.che importa $172\frac{2}{4}\frac{2}{3}$, & alquanto più sarà la grandez-

rad.L.$\frac{1}{5}$ partitorere | d.L 180.p.rap.2000000L.
via rad.L.1.m̃ rad. $\frac{4}{5}$ L.

Fà rad.L. 600.m̃ rad.5200000L.
40,0.

1000. 200.
500. 100.
cioe rad.500. m̃ 10,che sarà il dato b d.
cioe quasi $12\frac{4}{1}\frac{4}{1}$.

za del Pentagono inseritto nel cerchio di diametro radL.200.p. rad. 800L. che importa $17\frac{7}{7}\frac{7}{7}$ in circa. Se hora vorremo sapere quanto sia il lato del Pentagono circonscritto al cerchio(qual Pentagono e' anco circonscritto al Pentagono interiore,essendo che ciascun'angolo dell'interior tocca ciascun lato dell'esteriore) noi dal centro o,à dui angoli del circonscritto poniamo b,& d imaginaremo tirate le due rette o b, od, che saranno dui lati eguali del triangolo equicrure b o d(essendo base il lato b d del Pentagono,& ad essa perpendicolare dall'angolo oppostoli la retta o g, semid. del cerchio) qual triãg. è l'$\frac{1}{5}$ del totale Pentagono circonscritto,che si diuideria in 5 triangoli al b o d,eguali,cosi come del Pentagono inserito il triangolo equicrure p o q, (che ha per base il lato p q,& perpendicolare ad essa dall'angolo o,oppostoli la retta o r) e' similmente l'$\frac{1}{5}$. Hora sapendo, che nell'inseritto, essendo il lato p q 10. la perpendicolare o r è rad.L. 25.p.rad. 500L questo mediante hauendo nel circonscritto noto la perpendicolare o g ,semidiametro del cerchio & L.50.p.rad 500L.per trouare il lato b d,potremo dire ; Se o r perpendicolare rad.L.25.p.rad.500.L.ha per lato p q,10.la o g,perpendicolare rad.50.p.rad.500L. che darà,o hauerà per lato b d? Et operando vedremo, che darà rad.500. m̃ 10.& questo sarà il lato b d,del Pentagono circonscritto;Onde il suo giro sarà 5.tanti,cioe rad.12500.m.50.che la sua mità rad.3125 m̃ 25 moltiplicata via la perpendicolare o g,produrà la grandezza d'esso Pentagono; Et cosi sempre che haueremo noto vna delle linee p q, p o, p g, o r, o d, b d, ouero d i, potremo trouare tutte l'altre, & anco si può notare, che la retta o d è il semidiametro del cerchio da circonscriuerci al Pentagono esteriore.

Quando mò sia dato il lato d'alcũ pentagono,poniamo il p q,potremo trouarre quanto sia il semidiametro o r,del cerchio da inscriuerli,& anco il semidiametro o g,del cerchio da circonscriuerli; Et essendo dato il semidiametro o r,del cerdhio, sapremo quanto sia il lato p q, del pentagono da circonscriuerli, & anco essendo dato il semidiametro o g del cerchio, sapremo quanto sia il lato p q del pentagono da inscriuerli.

Quando il lalo del pentagono e' 10.il diametro del cerchio da inscriuerli e' rad.L.100.p.rad. 8000L.cioe $13\frac{1}{7}\frac{1}{4}$ in circa. Ma il diameto del cerchio da circonscriuerli è rad.L 200.p.radice 8000L.cioe $17\frac{1}{7}\frac{1}{7}$ in circa.

Quando il diametro del cerchio e 10.il lato del pentagono da circonscriuerli e rad.L$62\frac{1}{2}$ m̃ rad.$281\frac{1}{4}$L,cioè $5\frac{9}{1}\frac{9}{0}$ in circa. Ma il lato del pentagono da circonscriuerli è rad. L 500. m̃ rad. 20000L.cioe $7\frac{3}{1}\frac{3}{4}$,& alquanto più.

Diametro da per lato del pent. inseritto
rad.L 200.p.rad.80000L. 10(che darà il diam.10.
via rad.L 200.m̃ rad.8000L. 100.cioe rad.L 10000L.

---

partitore siplici rad.L 32000L rad. L$\frac{3}{1}\frac{5}{6}$L via
rad.200.m̃ rad.8000L.

---

fa rad.L $62\frac{1}{2}$ m̃ rad $781.\frac{1}{4}$ quasi m̃ $27\frac{3}{2}\frac{6}{7}$
rad.$34.\frac{2}{5}\frac{9}{5}$,& più cioe $5\frac{4}{1}\frac{4}{0}$. in circa sara il lato.

Diam. da per lato del circonscritto
che dara diam. 10
R.L 200.p.R.80000L. R.500. m̃ 10.
R.L 100.m̃.R 8000L.R.50000.m̃ 100
partit. siplice R.32000. R$\frac{1}{4}$ m̃ R$\frac{3}{1}\frac{5}{6}$
R.L 200.m̃ 8000L. via R. 4000.via
R.L $1\frac{7}{8}$ m̃ R.$7\frac{6}{6}\frac{1}{4}$L R.$\frac{2}{}\frac{3}{6}\frac{5}{4}$

---

r.l 500 m̃ r.20000L.fa r.225 via r.125
quasi $447\frac{1}{8}\frac{0}{0}\frac{1}{4}$ R.8000. via
da 400

R.$52\frac{7}{8}\frac{0}{0}\frac{2}{4}$ & più R.$\frac{1}{}\frac{2}{6}\frac{5}{4}$
cioe $7\frac{3}{1}\frac{3}{4}$,& più fa R.125.via R.125
cioe 25.via R.125.
in tutto 40.via R.125.
che fa rad. 20000.& è meno,

Propositione, 15. Problema, 15,

IN vn dato Cerchio si può inscriuere vn Pentagono Equilatero,& Equiangolo.

Nel cerchio A B C D E F, il centro del quale è il punto O, sia da inscriuere vn'esagono equilatero,& equiangolo,Per farlo,In esso circolo si tiri il diametro,& sia A O D,& fatto centro vno de' suoi estremi, & sia D, con il medesimo simidiametro D O, si facci vn cerchio, segnando li dui punti C,& E,doue questo sega la circonferenza del cerchio dato,& da essi punti C,& E,passando per il centro O,del dato sino alla circõferenza si tirino le due rette C O F, E O B,segnando i punti F,& B,doue peruengono alla circonferenza poi fra li sei punti A B C D E F, tirate le sei rette A B,B C,C D,D E,E F, F A, sarà nel cerchio dato inscritto l'esagono A B C D E F, quale si prouarà essere equilatero, & equiangolo cosi. Le tre le rette D C, D O, D E, sono eguali fra loro, perche vanno dal centro D,alla circonferenza del suo cerchio; Ancora le tre rette O C,O D, O E, sono eguali fra loro, perche vanno dal centro O, alla circonferenza del suo cerchio, cioè cosi ciascuna delle due O C,O E,come ciascuna delle due D C,D E,sono eguali ad'vna istessa D O, & però tutte esse 5.linee sono eguali fra loro,onde ciascuno delli dui triãgoli egnali O C D,O E D, è equilatero, & però equiangolo (per la 5. del primo) onde (per la 32. del primo) ciascuno delli loro sei angoli è l' $\frac{1}{3}$.di dui angoli retti,cioè importa quanto $\frac{2}{3}$.d'vn'angolo retto,& perche li 3. angoli,che sono fatti dalla retta C F,con le due D O,E O,cioè li 3. angoli C O D, D O E, E O F, importãno quanto dui retti (per la 13.del primo,) leuatine li dui C O D,D O E ciascuno de quali (che e angolo di triangolo equilatero) importa $\frac{2}{3}$. di retto, & però fra tutti due $\frac{4}{3}$. cioe 1. $\frac{1}{3}$. retto,il restante angolo E O F,sarà il restante di 1. $\frac{1}{3}$.fino à dui retti,cioe sarà $\frac{2}{3}$.di retto.& però eguale à ciascuno de gl'altri dui detti,& perche nel triangolo E O F, i dui lati O E,O F, che vanno dal centro O,alla circonferenza del suo cerchio sono eguali fra loro,ancora i dui angoli d'esso O F E, O E F,sopra alla base E F,sarãno eguali fra loro,& perche in somma importano 1. $\frac{1}{3}$.cioe $\frac{4}{3}$.di retti (che e il restante di dui retti cauatone l'angolo E O F, $\frac{2}{3}$. di retto) ciascuno d'essi sarà $\frac{2}{3}$.di retto,& perciò eguale all'altro angolo E O F,onde il triangolo E O F, e equiangolo, & però equilatero,cioe la retta E F,sarà eguale à ciascuna dell'altre dette;Et perche l'angolo A O F, e eguale al suo cõtraposito D O C,delle due rette A D,F C,che si segano in O,esso A O F,sarà $\frac{2}{3}$. di retto, come il D O C, & per la medesma causa,ancora ciascuno delli dui angol A O B, B O C, sarà $\frac{2}{3}$.di retto,onde nelli 3.triãgoli equicrurij A O F, A O B, B O C,(che li lati loro sono semidiametri del cerchio dato,che hà per centro il punto O,) ciascuno delli angoli alle basi F A,A B, B C,sarà $\frac{2}{3}$,di retto come anco l'angolo delli lati,perilche essi triangoli saranno equiangoli,& però equilateri, & le basi loro saranno come le C D, D E, E F, eguali alli semidiametri del cerchio lati loro;onde la figura esagona inscritta nel cerchio dato sarà equilatera. Et perche delli suoi 6. angoli,cosi poniamo il B A F,come ciascuno delli altri 5. e contenuto da dui angoli di triangolo equilatero, ciascuno de' quali importa $\frac{2}{3}$.di retto,& però ambi dui in somma importano $\frac{4}{3}$.cioe quanto 1. $\frac{1}{3}$. retto,ne segue che ciascuno delli 6.angoli delli esagono sia quanto 1. $\frac{1}{3}$. retto,& che perciò essi 6.angoli siano eguali fra loro,sarà dunque esso esagono ancora equiangolo,però hauremo nel cerchio dato inscritto vn'esagono equilatero,& equiangolo,come si e proposto di fare.

Corollario,

Di qui è manifesto il lato dell'esagono essere eguale al semidiametro del cerchio nel quale egli e inscritto.

Et però in pratica per inscriuere nel cerchio vn'esagono equilatero (che sarà anco equiangolo) preso il semidiametro d'esso cerchio,& cominciando da vn punto doue si vogli della circonferenza, egli si vada accomodando di mano in mano nel cerchio segnando i punti doue peruiene alla circonferenza,che egli vi si accomodarà, ò capirà precise 6 volte, onde tirando le 6. corde eguali nel cerchio,elle formaranno l'esagono nel cerchio.& da questa mirabile proprietà data al cerchio(dalla quale dependono poi le considerationi,che si fanno intorno alli lati delle figure inscritte al cerchio,& altre molte) auuiene che il compasso,con il quale girãdo vno de' suoi piedi, ò punte si formano le circonferenze de' cerchi si chiama festo,andando,tale apertura di compasso per linea retta sei volte precise nella circonferenza del cerchio formato con tale apertura, ò semidiametro.

Et notisi, che se vorremo poi intorno à vn dato cherchi descriuere vn'esagono regolare,la potiamo

gliamo fare mediante l'esagono inscritto nel modo che si mostrò nella 12 propositione; di descriuere il pentagono intorno al cerchio, Et anco se ad vn dato esagono regolare, voremo inscriuere, ò circonscriuere vn circolo, lo potremo fare nel modo mostrato nella 13. & 14. propositione, trattando del pentagono, che diuisi dui angoli prossimi dell'esagono per mezo con due rette che concorreranno, ò si segaranno dentro all'esagono, il punto del concorso, ò segamento sarà il centro cosi del cerchio da circonscriuere, come del cerchio da inscriuere, (che si può anco dire essere centro cosi della figura inscritta, come della circonscritta, essendo egli egualmente lontano da ciascuno delli suoi angoli, ò perpendicolarmente lontano egualmente da ciascuno de' suoi lati, ariuando al mezo di ciascuno d'essi lati,) che il semidiametro del cerchio da circonscriuere sara ciascuna retta che da esso centro vada a qual si vogli de gl'angoli dell'esagono, (& diuiderà sempre esso angolo per mezo) ma il semidiametro del cerchio da inscriuere sara ciascuna retta, che dal centro detto vada perpendicolarmente à qual si vogli de i lati dell'esagono, (& diuiderà esso lato per mezo,) Et però si può dire ancora. Che il semidiametro del cerchio da inscriuere sia ciascuna linea che dal centro detto arriua alla mità di qual si vogli delli lati dell'esagono, & sera perpendicolare ad esso lato. Et cosi quando sapremo inscriuere alcuna figura nel cerchio, potremo anco circonscriuerla al cerchio; Et anco a qual si vogli data figura regolare potremo inscriuere, & circonscriuere vn cerchio nel modo medesmo detto mostrato, trattando del pentagono regolare, cioè equilatero, & equiangolo nella propositione 13. & 14.

Propositione. 16 Problema. 16.

IN vn Cerchio dato si può inscriuere vn quindecagono equilatero, & equiangolo.

Nel cerchio dato di diametro A F, & centro C, sia da inscriuere vn quindecagono equilatero, & equiangolo per farlo, in esso cerchio (per la seconda di questo) mediante vn triangolo equilatero già formato doue si vogli si inscriua vn triangolo equilatero, che sara anco equiangolo (ouero segnati nella circonferenza i punti delli termini delli lati dell'esagono mediante la lunghezza del semidiametro, & alli dui, & dui lati d'esso esagono tirate le tre subtense, elle formaranno il triangolo equilatero & equiangolo nel cerchio, & ciascun lato sottotenderà a l'$\frac{1}{3}$. della circonferenza del cerchio, onde inteso la circonferenza totale del cerchio diuisa in 15. parti, o archi eguali, perche l'$\frac{1}{3}$. di 15. e 5. si conosce che il lato del triangolo equilatero, (& sia l'A D H,) sottotenderà a 5. d'esse parti, o vogliamo dire alli $\frac{5}{3\,5}$. della circonferenza del cerchio: Ancora cominciando da vno de gli angoli del triangolo equilatero, & sia dall'A, si inscriua in esso cerchio il pentagono equilatero, (& però anco equiangolo) A B E G L, ciascun lato del quale sottotenderà all'$\frac{1}{5}$. della circonferenza del cerchio cioe alli $\frac{3}{3\,5}$. d'essa circonferenza, onde l'arco A B, sara li $\frac{3}{3\,5}$. della circonferenza, & cosi l'arco B E, e li $\frac{3}{3\,5}$. però tutto l'arco A E, da essi dui contenuto sara li $\frac{6}{3\,5}$. della circonferenza, ma l'arco A D, al quale sottotendente il lato de triangolo equilatero e li $\frac{5}{3\,5}$. della circonferenza, però la differenza D E, in che l'arco A E, $\frac{6}{3\,5}$. supera l'A D, $\frac{5}{3\,5}$. sara solo $\frac{1}{3\,5}$. onde tirata la corda D E, ella sara il lato del quindecagono equilatero, & però anco equiangolo da inscriuere nel cerchio, però andando accomodando essa corda nella circonferenza, ella vi capira precise 15. volte, & cosi sara formato il quindecagono equilatero nel cerchio dato, & sara anco equiangolo, perche ciascuno delli suoi 15. angoli hauurà per base li $\frac{13}{3\,5}$. della totale circonferenza del cerchio che è quanto si voleua fare; Ouero principiando da vn'istesso punto A, nella circonferenza del cerchio in esso da vna medesma banda si accomodi il lato A D. del pentagono equilatero, che l'arco A B, sara li $\frac{3}{3\,5}$. della circonferenza del cerchio, perilche l'arco B D, differenza loro sara li $\frac{2}{3\,5}$. della circonferenza del cerchio, onde diuiso per mezo, & sia in O, l'arco B O, & cosi l'O, sara l'$\frac{1}{3\,5}$. della circonferenza del cerchio, perilche tirata la corda B O, ouero la D O, ciascuna d'esse sara il lato del quindecagono equilatero, & equiangolo, onde condottola intorno, ò vogliamo dire sù per la circonferenza del cerchio, che vi si accomodarà precise perciò 15. volte haueremo inscritto vn quindecagono equilatero, & equiangolo nel cerchio come si e proposto.

Se mò intorno al cerchio si vorrà descriuere vn quindecagono regolare lo potremo fare mediante l'inscritto nel modo che insegna la 12. tratando del pentagono. Et se a vn dato quindecagono regolare vorremo inscriuere, ò circonscriuere vn cerchio lo potremo fare nel modo che

trattando del pentagono mostrarò la decimaterza, & decimaquarta propositione di questo.

Si può hora notare che mediante la inscritione del quindecagono equilatero nel cerchio vi se può facilmente inscriuere vna figura equilatera doppia di lati al quindecagono, cioe vn trent'agono, o figura di 30. lati, che diuiso l'arco che hà per corda il lato del quindecagono in due parti eguali, & tirateci le sue due corde, ciascuna d'esse sara il lato del trent'agono equilatero da inscriuere in esso cerchio. Et questo lato del trent'agono mediante vi potremo inscriuere vna figura di 60. lati eguali diuidendo pure per mezo l'arco del quale e corda il lato del trent'agono che la corda poi di ciascuna delle due mita dell'arco diuiso sara vn lato del sessantagono, Et con questo modo potremo seguire a in scriuere nel cerchio vna figura di 120 lati eguali; Et poi vna di 240. lati, & cosi seguendo; Perilche mediante la inserttione del quad. lel cerchio vi si potra facilmente inscriuere l'ottagono, il sedecagono, il trentaduengono, il sessantaquattro angono, & cosi seguendo all'altre figure di doppio numero di lati; Et mediante il triangolo, l'esagono, poi il dodecagono, il vintiquattro agono, & l'altre dependenti; Et mediante il pentagono, il decagono, il vintiagono, il quarant'anguli, & l'altre; Et quando si sapesse nel circolo inscriuere vn'eptagono; cioè figura equilatera di 7. lati, (il che può dependere dal saper formare vn triangolo equicrure tale che ciascuno delli suoi dui angoli alla base sia triplo all'angolo contenuto dalli dui lati eguali) vi si potria poi inscriuere il quattordecagono, o vogliamo dire il quattordici angoli, & poi il 28. angoli, il 56. angoli, & l'altre figure regolari dipendenti per il suo ordine. Et sempre che sapremo inscriuere vna figura equilatera nel cerchio la potremo anco circonscriuere al cerchio; Et ancora ad esse figure potremo inscriuere, & circonscriuere vn cerchio nel modo che trattando del pentagono si e mostrato come s'è detto nella 12.13.& 14. di questo.

Si può anco notare che perche 3. via 5. fa 15. & la differenza di 3. a 5. e 2. Si e veduto che in vn cerchio cominciãdo da vn medesmo punto A, della circonferenza accomodato vn lato A D, della figura di 3. lati eguali, (cioè del triangolo equilatero,) & vn lato A B, della figura di 5. lati eguali; (cioè del pentagono equilatero) la differenza che e dal punto B, al D, sù la circonferenza del cerchio e l'arco, la corda del quale sottotende a dui lati (perche la differenza di 3. a 5. e 2.) del quindecagono, o figura di 15. lati eguali, perche 15. e il dutto di 3. via 5. Onde diuiso esso arco in due parti eguali in O, la corda B O, & anco la O D, sara vn solo lato del quindecagono equilatero da inscriuere nel cerchio; Noi mo a questa similitudine, perche 4. via 5. fa 20. & 4. e differente da 5. in 1. conosceremo, che di vn cerchio cominciando da vn punto della sua circonferenza accomodandoui vn lato della figura di 4. lati eguali, cioè del quadrato, & vn lato della figura di 5. lati eguali, cioè del pentagono, l'arco che e tra essi dui lati sara l'$\frac{1}{20}$. di tutta la circonferenza, & però la sua corda sara il lato del 20. agono equilatero da inscriuere in esso cerchio, & diuiso per mezo esso arco del 20. agono, le corde d'esse due mita saranno dui lati del 40. agono equilatero da inscriuere in esso cerchio, ma presi dui lati del 20. angono la subtensa a detti dui lati sara il lato del decagono equilatero da inscriuere nel cerchio; Et similmente perche 5. via 6. fa 30. & 5. da 6. resta 1. vediamo che nel cerchio al medesmo modo accomodati il lato del pentagono, & il lato dell'esagono, la differenza de' dui loro archi sara l'arco d'vn lato del 30. agono onde il suo doppio sara l'arco del lato del quindecagono (perche 30. e doppio a 15.) & percio di qui impariamo vn'altro modo facile da inscriuere vn quindecagono equilatero nel cerchio, & e che da vn medesmo punto, & sia G, nella circonferenza del cerchio accomodata, o segnata la G E, lato del pentagono, & anco accomodateui, o segnateui la G P, ouero il suo termine P, lato dell'esagono, o semidiametro, & doppiato l'arco E P, loro differenza, & sia E R, questo E R, sara l'arco del lato del quindecagono da inscriuere nel medesmo cerchio; Ancora perche 4. via 6. fa 24. & la differenza da 4. a 6. e 2. si conosce che l'arco in che sono differenti i lati del quadrato, & dell'esagono e l'arco di dui lati del 24. agono; (cioè e l'arco d'vn sol lato del 12. agono) però presane la mita ella sara l'arco del lato del 24. agono: Et cosi se vorremo inscriuere in vn cerchio vna figura equilatera di 80. lati, perche 8. via 10. fa 80 & la differenza di 8. a 10. e 2. lo potremo fare mediante l'accomodarui vn lato dell'8. agono, & vn lato del 10. agono principianti da vn medesmo punto, & dell'arco in che sono differenti gl'archi loro, pigliare la mita (perche 8. e differente da 10. in 2. & pigliare la mita d'vna cosa e quanto partirla per 2.) che essa mita sara l'arco del lato dell'80. agono; Et volendo inscriuere nel cerchio vn 48. agono equilatero, perche 6. via 8. fa 48. & sono differenti in 2. il lato del 48 agono sara la corda sottotendente alla mita dell'arco in che sono differenti i dui archi delli lati dell'esagono, & dell'ottagono.

Si può anco auuertire, che tutte le figure equilatere inscritte nel cerchio sono di necessita equiangole, perche li suoi angoli hanno tutti egual archi, o parti di circonferenza per base, & la parte di circonferenza di ciascun d'essi e vn rotto che per dominatore ha il numero delli lati, o angoli della figura, & per numeratore vn numero che e 2. manco del numero de lati, & però 2.

man-

manco del denominatore, perche le due linee rette, o lati della figura che formano, o contengono qual si vogli de' suoi angoli occupano due delle parti della circonferenza in che ella e diuisa dalli lati della figura, che perciò nel triangolo equilatero ciascuno delli suoi 3. angoli ha per base arcuale l'$\frac{1}{3}$. della circonferenza, ciascuno angolo del quadrato li $\frac{2}{4}$. del pentagono li $\frac{3}{5}$. dell'esagono li $\frac{4}{6}$. dell'eptagono, o settagono li $\frac{5}{7}$. dell'ottagono li $\frac{6}{8}$. del nosiagono li $\frac{7}{9}$. del decagono li $\frac{8}{10}$. del 12. agono li $\frac{10}{12}$. (o $\frac{5}{6}$.) del 15. agono li $\frac{13}{15}$. del 16. agono li $\frac{14}{16}$. (o vogliamo dire li $\frac{7}{8}$. Et cosi del 20. agono, o 20. angoli li $\frac{18}{20}$. del 50. angoli li $\frac{48}{50}$. o $\frac{24}{25}$. Et cosi dell'altre. Conuersamente mo tutte le figure equiangole inscritte nel cerchio non e necessario, che siano equilatere, perche nel cerchio A B C D, inteso inscritto il quadrangolo rettangolo A B C D, che sia lungo più che largo si vede che egli non e equilatero, benche sia equiangolo, hauendo tutti gl'angoli retti; Et a questi per circonscriuere vn cerchio non si deuono diuidere gl'angoli per mezo, ma dui de' suoi lati angolari perpendicolarmente per mezo, & doue le due rette diuidenti si segano, o concorrono insieme quel punto e il centro del cerchio da circonscriuerli, Ouero diuisi dui de' suoi lati oppositi per mezo, nel mezo della diuidente sara il centro; Ouero tirati i suoi dui diametri il punto O, del loro intersegamento sara il centro del cerchio da circonscriuerli, perche egli sara egualmente lontano da ciascuno delli quattro angoli d'esso quadrangolo rettangolo. Et perche il punto O, detto non e egualmente lontano ad angoli retti a ciascuno delli 4. lati del quadrangolo, ne meno si può trouare alcun'altro punto in esso quadrangolo egualmente lontano ad angoli retti a tutti i suoi 4. lati, si conosceche in esso quadrangolo non si può inscriuere alcun cerchio. Ne meno intorno al cerchio A B C D, si potra descriuere vn quadrangolo rettangolo di lati ineguali, perche all'hora si verria ancora ad hauere inscritto il medesimo cerchio ABCD, in tale quadrangolo rettangolo non equilatero, il che sappiamo essere impossibile.

Notaremo ancora che non tutte le figure equilatere circonstritte al cerchio sono necessaria mente equiangole, ma possono essere equilatere senza essere equiangole il che si mostrara cosi. Nel cerchio E B F D, tirati i dui diametri E F, B D, che si seghino nel centro C, ad angoli non retti; cioè facendone dui acuti, & dui ottusi; ad essi dalli 4. termini loro si tirino le perpendicolari che saranno contingenti al cerchio, allungandole da ciascuna banda finche concorrano insieme, & siano le A G, G H, H L, L A, che cosi le due contingenti A D, A F, da vn'istesso punto A, saranno eguali fra loro, & similmente la L D, sarà eguale alla L E, la E H, alla B H, & la B G, alla F G. Ciascuna mo di queste B G, F G, sara eguale a ciascuna delle due E L, D L, perche imaginato le due rette F B, D E, che sono corde di dui archi eguali F B, D E, (per essere basi di dui angoli al centro F C B, D C E, eguali fra loro, essendo contrapositi de' dui diametri che si segano in C,) esse due rette saranno eguali fra loro, & nel triangolo equicrure E C B, li dui angoli alla base E B, saranno eguali l'vno all'altro, & cosi anco li dui G F B, G B F, nel triangolo equicrure G F B, saranno eguali l'vno all'altro, Et l'istesso auuerrà dell'altra contraposita banda tirata la retta D E, (che sara eguale alla F B,) intesa base delli dui triangoli equicrurij D C E, D L E, & perche li dui angoli L D E, L E D, con la base D E, nel triangolo equicrure D L E, sono eguali alli dui angoli G F B, G B F, con la base B F, nel triangolo equicrure G F B, ne segue (per la 26. del primo,) che anco ciascuno delli lati D L, L E, dall'vn triangolo sia eguale a ciascuno delli lati G F, G B, dell'altro triangolo, & l'angolo L, dell'vno, sara eguale all'angolo G, dell'altro, & ciascun d'essi sara acuto, & il restante di dui retti cauatone l'F C B, o il D C E, ottuso dalla construttione, & però eguale al D C F, ouero al B C E; Nel medesimo modo si mostrara ciascuna delle due rette A F, A D, essere eguale a ciascuna delle due H B, H E, (& l'angolo A, all'H, & ciascun d'essi ottuso eguali al D C E, ouero all'FCB,) & però la totale A G, essere eguale a ciascuna dell'altre tre totali A L, L H, & H G; perilche il quadrangolo A L H G, e equilatero, ma non e equiangolo, (che è Rombo) hauendo solo eguali li dui contrapositi A, & N, ottusi, & i dui G, & L, acuti; Et cosi e manifesto potersi circonscriuere la.

re al cerchio figure che siano equilatere, ma non equiangole.

Notaremo ancora che tutte le figure equiangole circonscritte al cerchio sono bene di necessità equilatere, che inteso la figura a b c d e f, di 6. lati equiangola circonscritta al cerchio il centro del quale è il punto O, si dice che di necessità ella sara anco equilatera, & si dimostra cosi, Dal centro O, a ciascuno delli 6. punti del contatto delli lati, & circolo, si tirino le 6. rette O G, O R, O S, O T, O V, O H, ciascuna delle quali (per il corollario della 16. del terzo) sara perpendicolare; cioe fara angoli retti con il lato sopra al quale ella cade, & anco dal medesmo centro O, a ciascuno delli 6. angoli eguali del le figura si tirino le 6. rette o a, o b, o c, o d, o e, o f, & intesi i dui triangoli a G o, a H o, il lato a G, dell'vno sara eguale al lato a H, dell'altro perche ambedue esse linee che sono contingenti al cerchio le vengono da vn medesmo punto a, Ancora il lato G o, dell'vn triangolo e eguale al lato H o, dell'altro triangolo; cioè la a o, è lato comune ad ambidui i triangoli, perilche (per la 8. del primo) gl'angoli dell'vn triangolo saranno eguali a gl'angoli dell'altro, ciascuno al suo corrispondente, & però l'angolo G a o, dell'vno sara eguale all'angolo H a o, dell'altro, onde l'angolo totale G a H, o vogliamo dire b a f, sara diuiso in due parti eguali dalla retta O a, che viene dal centro O, (si poteua anco dire considerati i dui triangoli rettangoli a G o, a H o, nelli quali i dui G o, o a, dell'vno sono eguali alli dui lati H o, o a, dell'altro, ne segue che il restante lato dell'vno sia eguale al restante lato dell'altro, & gl'altri angoli dell'vno, a gl'altri angoli dell'altro; cioè il G o a, a l'H o a, & il G a o, all'H a o, perilche il totale angolo b a f, della figura equiangola circonscritta al cerchio e diuiso per mezo dalla O a, che le viene dal centro O.) Nell'istesso modo si mostrara anco ciascuno delli altri 5. angoli eguali essere diuiso per mezo dalla retta che le viene dal centro O, detto, Et perche tutti essi 6. angoli sono eguali dal supposito, ancora le 12. loro mitadi sono tutte fra loro similmente eguali: Hora

considerato il triangolo a G o, vno delli dui già adoprato, & quello che gl'è dall'altra banda, cioè il b G o, perche l'angolo b G o, retto dell'vno, è eguale all'angolo a G o, retto dell'altro, & il G b o, dell'vno mita del totale G b A, e eguale al G a O, dell'altro, mita del totale G a H, & di più hanno il lato G o, comune, ne segue (per la 26. del primo) che il lato b f, dell'vno sia eguale al lato a G, dell'altro, (& che perciò la retta a b, sia diuisa per mezo in G, dal semidiametro, ò perpendicolare o G, che la viene dal centro O,) ma al medesmo a G, e eguale l'a H, però ancora G b, sara eguale ad a H. Questo a H, nel medesmo modo si prouarà essere eguale ad H f, cioè a f, essere diuiso per mezo in H, dal semidiametro a lui perpendicolare o H, perilche il totale lato a b, sara eguale al totale lato a f; Nel medesmo modo si prouarà a ciascun lato della figura circõscritta essere eguale il lato a lui prossimo, cioè all'a f; l'f e; & all'f e, l'e d, & all'e d, il d c, & al d e, il b c; Ouero al b e, il e d, al e d, il d e, l'e f, & all'e f, l'f a; Et però tutti essi lati saranno eguali fra loro, Onde la figura circonscritta al cerchio che e equiangola si conosce di necessità douere anco essere equilatera, & di più che ciascun suo lato e diuiso per mezo nel punto doue tocca, o vogliamo dire è contingente al cerchio.

Si può anco notare che considerando le figure rette linee da se stesse si conosce che le equilatere di più di 3. lati non e necessario che siano equiangole, che il quadrato equilatero, & equiangolo stirando dui de' suoi angoli contrapositi varia la grandezza d'essi, & de gl'altri dui, & douenta Rembo figura equilatera, & non equiangola; Et cosi ogn'altra figura di più lati equilatera, & equiangola stirandola da alcuno de' suoi angoli douenta non equiangola restando equilatera; Conuersamente ancora le figure equiangole non e necessario che siano equilatere, che vediamo i quadrangoli rettangoli essere più lunghi che larghi; Et preso anco per esempio il Penta-

Pentagono equiangolo, & equilatero A B C D E, ſe fingeremo in eſſo, tirata la retta n t, ſegante i dui lati BC, Ed, equidiſtãtemente alla baſe Cd, la figura che reſta AB nt E, non è più equilatera, ma è bene equiangola, perche per la equidiſtanza delle n t, C d, l'angolo B n t, è eguale al C, & l'E t n, è eguale al d; Et ſe anco imaginaremo li dui lati B C, E d, allungati egualmente in N, & T, a beneplacito, & tirata la retta N T, che ſara equidiſtante alla C d, la figura A B, N, T E, hauerà 5. lati non eguali (che N T, e più corto di ciaſcuno de gl'altri, & ciaſcuno delli dui B N, E T, e più lungo di ciaſcuno de gl'altri) nondimeno ella e equiangola che l'angolo N e eguale al C, & il T, al d, & però tutti gl'angoli di queſta inequilatera ſono eguali fra loro, come erano anco nella equilatera; Solo fra le figure rette linee il triangolo ſe e equilatero e anco di neceſſità equiangolo, come ſi può moſtrare mediante (la quinta Propoſitione del primo libro;) Et conuerſamente ſe il triangolo e equiangolo e anco neceſſariamente equilatero, come ſi può concludere, o dimoſtrare (per la ſeſta Propoſitione del primo libro.)

Ancora in vna data figura equilatera, & equiangola ſi può facilmente Inſcriuere vna figura equilatera, & equiangola di altre tanto numero di lati, diuidendo ciaſcuno delli lati della data per mezo, & dal mezo dell'vn lato al mezo dello a lui proſſimo tirando di mano in mano vna retta vi ſi ſara inſcritto vna figura di tanto numero di lati quan e il numero de i lati della data, & ſara anc'ella equilatera, & equiangola, che per eſempio dato la figura A B C D E F, di ſei lati equilatera, & equiangola, diuidendo i ſuoi lati per mezo, & tirando le 6. rette h i, i m, m n, n o, o r, r h, ſi inſcriuerà nella data vn'altra figura anc'ella di 6. lati, & ſara ſimilmente equilatera, & equiangola, che conſiderati i dui triangoli equicrurij, A h r, F r o, perche i dui lati A h, A r, dell'vno, con il loro angolo A, ſono eguali alli dui lati F r, F o, dell'altro con il ſuo angolo F, ne ſegue che la baſe h r, dell'vno ſia eguale alla baſe r o, dell'altro, & gl'altri angoli dell'vno a gl'altri angoli dell'altro; & coſi anco vedremo le ſeguẽti rette o n, n m, m i, ih, eſſere eguali fra loro, & alle ro, hr: onde l'eſagono inſeritto ſara equilatero; Ancora perche ſu la retta A F, cadono le due h r, o r, ne ſegue (per 13. del primo) che la ſomma delli 3. angoli A r h, h r o, F r o, ſia eguale a dui retti, & però ſara eguale alla ſomma delli trè angoli A, h, r, del triangolo equicrure h A r, onde dall'vna ſomma leuati li dui angoli A h r, F r o, & dall'altra li dui angoli A r h, A h r, alli dui detti eguali, (che l'A r h, e commune, & l'F r o, del triangolo equicrure r F o, e eguale all'A h r,) ne ſegue che al reſtante angolo A, dell'vno ſia eguale il reſtante angolo h r o, dell'altro; Et nel medeſmo modo a ciaſcuno delli altri angoli FE d, CB, ſi moſtrarà eſſere eguali li ſeguenti angoli r o n, o nm, n m i, m i h, i h r; della figura inſcritta, ma li angoli A, F E D C B, ſono eguali fra loro; però ancora li angoli della figura inſcritta (a queſti eguali) ſaranno ſimilmente eguali fra loro perilche la figura inſcritta che è equilatera, ſara anco equiangola, come ſi voleua moſtrare.

Se hora venendo alla pratica in numeri in queſta (decimaſeſta, propoſitione) vorremo mediante il diametro noto del cerchio venire in cognitione del lato del quindecagono inſcrittoli opéraremo, come ſegue.

Sia A F, diametro del cerchio 10. il ſemidiametro c F, ſara 5. d F, ouero F H, lato dell'eſagono eguale al ſemidiametro c F, ſara 5. però il triangolo c d F, ſara equilatero; & inteſa c F, ſemidiametro ſua baſe ella e diuiſa dalla perpendicolare d m, per mezo, però c m, ouero F m, ſara $2.\frac{1}{2}$ ma per ſchiuare rotti poniamo il diametro 20. che il ſemidiametro ſara 10. & la C m, ſara 5. quadrato della quale 25. cauato da 100. quadrato del ſemidiametro C D, il reſtante 75. è il quadrato di D m, ſemilato del triangolo equilatero, però il lato totale D H, è radice 300. nel quale perche C m, è la mità di C F, ſemidiametro, ſi vede la perpendicolare A m, eſſere li $\frac{3}{4}$ del diametro cerchio nel quale è inſeritto il pentagono, & il quadrato d'eſſa perpendicolare eſſere li $\frac{3}{4}$ del quadrato del lato del triangolo, & conuerſamente il quadrato del lato del triangolo equilatero eſſere li $\frac{4}{3}$ cioè volte $1.\frac{1}{3}$ quanto il quadrato della ſua perpendicolare, & il quadrato del diametro del cerchio eſſere anc'egli li $\frac{4}{3}$ cioè volte $1.\frac{1}{3}$ quanto il quadrato del lato del triangolo equilatero, cioè tal conuenienza ha il quadrato del diametro del cerchio al quadr. del lato del triangolo, quale ha il quadrato del lato del triangolo alla ſua perpendicolare: (Et perciò anco le loro radici cioè il diametro del cerchio al lato del triangolo ha la iſteſſa conuenienza che il lato del triangolo alla ſua perpendicolare. Hora paſſando al pentagono per trouare la lunghezza del ſuo lato, & la ſua altezza ci potremo ſeruire di quello che ſi moſtrò nella (decima ſeconda, propoſitione) che iui vedendoſi, che quando il lato del pentagono inſeritto nel cerchio è 10. il ſemidiametro del cerchio è rad. L. 50. p̃. radice 500. L. hora che ſappiamo il ſemidiametro del cerchio eſſere 10. ſi potrà trouare il lato del pentagono dicendo, ſe radice L 50. p̃. rad. 500. L. ſemidiametro da 10. di lato che darà 10. ſemidiametro? Ouero ſe radice L. 50. p̃. rad. 500. L. ſemidiametro; douentaſſe 10. ſemidiametro, il 10. lato del pentagono che douentaria? Onde il dutto di 10. &

10.(ſeconda,& terza in queſta regola del trè;) cioè 100.partito partito per rad.L.50 p̃.rad.500. L.(prima quantità in eſſa regola del trè) ne viene rad. L. 250. m̃. rad. 12500.L. (che è circa a 11.$\frac{3}{4}$.)quale ſara il lato del pentagono inſcritto nel noſtro cerchio di 20 di diametro.

Radice L. 50. p̃. radice 500. L. 100.
Rad. L. 10000. L.
Via rad.L.50.m̃.rad.500.L. rad. L.5. L.

Via rad.L.50.m̃.rad.500.L.
Fa rad.L.2000.L.partitore.
Fa rad.L.250 m̃.rad.12500.L.

Quaſi 1 1 1. $\frac{1}{2}\frac{7}{2}\frac{9}{2}$.

Cioè quaſi 1 1.$\frac{1}{2}\frac{7}{2}$. 1 3 8.$\frac{-}{2}\frac{*}{2}\frac{2}{2}$ & più

Hora p̃ trouare il lato G H,(corda dell'arco G H,) del quindecagono, conſideraremo (tirata la G V, equidiſtante, (& però eguale) alla u m,che coſi anco la m u. ſara eguale,& equidiſtante alla n G,) che ella ſi oppone , o ſottotende all'angolo retto G u H, nel triangolo rettangolo G u H, & però quando ſi ſapeſſe la lunghezza delli dui lati G n,u H, eſſi mediãte ſi trouaria la lungezza della G H, ma u G, è la differenza di u G, ſemilato del pentagono ad m H, ſemilato del triangolo equilatero,cioè la differenza di rad. L.62. $\frac{1}{2}$. m̃. rad.781.$\frac{1}{4}$. L. à rad.75. che è rad.75.m̃.rad.L.62.$\frac{1}{2}$.m̃ rad.781.$\frac{1}{4}$.L.Et la G u,è la differenza,che ſi troua fra la perpendicolare,ò altezza A m,15.del triangolo equilatero,all'altezza A u,del pentagono,cioè eſſa G u, è quanto la m u, differenza d'eſſe due altezze, ma queſta m u, ſi può anco trouare conſiderato il triangolo rettangolo C u g, inteſo tirata ad eſſo angolo retto la ſubtenſa C G, ſemidiametro del cerchio che è 10.& dal ſuo quadrato 100 cauato il quadrato di n G,ſemilato del pẽtagono qual quadrato è 62.$\frac{1}{2}$.m̃.rad.781.$\frac{1}{4}$.& reſta 37.$\frac{1}{2}$.p̃.rad.781.$\frac{1}{4}$.per il quadrato di C n, però eſſa C n, ſara la radice di queſta quantità, cioè ſara radice 31.$\frac{1}{4}$. p̃. 2.$\frac{1}{2}$. dalla quale cauata C m, che è 5. (mezo ſemidiametro) il reſtante radice 31.$\frac{1}{4}$.m̃.2.$\frac{1}{2}$. ſara la m n, & però la G u,(ſe mò alla m n,giongeremo la A m,15.la ſomma 12.$\frac{1}{2}$.p̃ rad 31.$\frac{1}{4}$.ſara l'altezza A n, del pentagono,& queſta cauata dal diametro A F,20.il reſtante 7.$\frac{1}{2}$.m̃.radice 31.$\frac{1}{4}$.ſara la n F, ſaetta della portione E F G,che hà per corda il lato del pentagono:) Hora al quadrato di G u,che è 37.$\frac{1}{2}$. m̃.radice 781.$\frac{1}{4}$.giongeremo il quadrato di n A,che è 137.$\frac{1}{2}$.m̃.rad.781.$\frac{1}{4}$.m̃.radice L.18750.m̃.radice 70312500.L.& fa 175.m̃.rad.3125.m̃.rad.L.18750.m̃.rad.70312500.L. & queſto e il quadrato di G H, lato del quindecagono, però eſſo lato G H,ſara la rad.di tal ſomma,o quantità; cioè ſara rad.L.62.$\frac{1}{2}$. p̃.rad.781.$\frac{1}{4}$.L.p̃.rad.18.$\frac{3}{4}$.m̃.rad.93.$\frac{3}{4}$ .quale quantita importa alquanto più di 4.

Se ancora vorremo trouare l'altezza del quindecagono, potremo ſegnare i ſuoi trè lati E r, r i,i G,& diuiſo per mezo l'r i, oppoſto all'angolo A, ſommità del quindecagono imaginare la i x, perpendicolare al lato r i,dal termine i,fino alla E G,lato del pentag.equidiſtante all'r i,che coſi n x,ſara eguale ad o i,ſemilato noto del quindecagono, & però ſara nota x G, & anco e noto i G, lato del quindecagono, però nel triangolo rettangolo i x G, mediante i dui lati noti x G, i G, ſi ſara noto l'altro lato i x,& però o n,quale gionto ad A n, altezza nota del pentagono, la ſomma ſara la A o,altezza del quindecagono,quale A o,inteſa diuiſa in C,nelle due parti ineguali C A, C o, la C A, maggiore e il ſemidiametro del cerchio che ſi circonſeriua al quindecagono, & la C o,è il ſemidiametro del circolo che ſi inſeriua nel medeſmo quindecagono,quale C o,moltiplicato per la mità del Giro del quindecagono produce la lunghezza d'eſſo quindecagono che e 15. volte tanto quanto e la grandezza del triangolo equicrure i C r,che ha per baſe vn lato del quindecagono,& per altezza,ò perpendicolare la C o, ſemidiametro del cerchio da inſeriuere in eſſo quindecagono; Et ſe allungaremo la i x,fino alla D H,in ſ,& inteſa la retta i H,ſubtenſa à dui lati del quindecagono potremo trouare la quantità d'eſſa i H, mediante il triangolo rettangolo i ſ H, del qual ſaranno noto i dui lati i ſ, (eguale ad m a,nota,) & ſ H, differenza nota del ſemilato o i,del quindecagono al ſemilato m H,del triangolo equilatero; La ſubtenſa à 3.lati e il lato del pentãgono. Et per la ſubtenſa à 4.lati inteſa per la corda D G, inteſo il triangolo rettangolo D n ſ, la ſomma de' dui quadrati di D u, nota, & di u G, nota ſara il quadrato di eſſa d G, & però la rad.d'eſſo quadrato ſara la D G,la ſubtenſa à 5.lati e il lato del triangolo equilatero, la ſubtenſa à 6.lati inteſa per la corda A G, ſara la ſubtenſa à dui lati del pentagono nota: la ſubtenſa poi à 7.lati che ſerue anco per ſubtenſa ad 8.lati, ſi farà nota mediante il triangolo rettangolo A o i, del quale il lato A o,e l'altezza,nota del quindecagono, & il lato, o i, è il ſemilato d'eſſo quindecagono ; Onde chi vorrà affaticarſi nelli calcoli occorenti potrà trouare tutte le quantità dette.

Qua-

Quadrato di C n. 37. $\frac{1}{2}$. p̄.radice 781. $\frac{1}{4}$.del quale si piglia la radice per sapere la lunghezza d'essa C n.

25. 1406. $\frac{1}{4}$.

Somma 62. $\frac{1}{2}$.restante 12. $\frac{1}{2}$. resta 625.la rad.è 25

Le mità 31. $\frac{1}{4}$. 6. $\frac{1}{4}$.le rad delle quali mità sono rad.31. $\frac{1}{4}$.& 2. $\frac{1}{2}$.però rad.31. $\frac{1}{4}$.p̄.2. $\frac{1}{2}$.sarà C n.

u H, rad.75.m̄.rad.L.62. $\frac{1}{2}$.m̄.rad.78.1. $\frac{1}{4}$. L.si quadra

rad.L.300.L.

70290000.

23500.

Suo quad.137. $\frac{1}{2}$.m̄.rad.781. $\frac{1}{4}$.m̄.rad.L. 18750.m̄.rad.70313500.L.

37. $\frac{1}{2}$.m̄ rad.781. $\frac{1}{4}$.quad. di G n.

Il quad. di G H,lato del quindecag.sarà però radice di questa quantità R, sarà esso lato, & per pigliarne la rad. si intende essa quantità R,essere vn Residuo,composto d'vn Residuo,& d'vna rad. L.L.

Cauasi radice 70312500.da radice 382812500.

28125.	153125.
1125.	6125.
45.	245.
9.	49.
La rad. è 3.	la rad. è 7.

3.entra in 7.volte 2. $\frac{1}{3}$.però la quantità minore entra nella maggiore volte 2. $\frac{1}{3}$.entrarà dunque nella differẽza loro cioè in quello che resta a cauare essa minore dalla maggiore vna volta manco cioè entrarà volte 1. $\frac{1}{3}$.però per 1. $\frac{1}{3}$.cioè per rad. 1 $\frac{6}{9}$.moltiplicato la minora,che è rad.70312500. il prodotto sarà il restante cercato. 7812500.

rad.125000000.

175.m̄. rad.3125. m̄.rad. L.18750. m̄.rad. 70312500.

30625.

350.

℞.122500. 33750. m̄.rad. 382812500. è il quadrato della prima parte maggiore.

℞.3125. 18750.m̄.rad. 70312500.quadrato della radice L.L.minore.

1500.m̄.rad.125000000. e la differenza A, de'quadrati delle due parti della quale si piglia la ℞. e la rad. della differenza de' quadrati delle due parti.

10000. 225.

100.

somma 25000. . . . .

restante 5000. 1 0 0 0 0

le mità loro sono 12500. & 2500.

Le rad. delle quali mità sono rad.12590.& 50.Però rad.12500.m̄.50. e la rad. della differenza A.quale si giunge,& caua alla 175. m̄.rad.31.25. parte maggiore della quantità R.

175.m̄.rad.3125.	175.m̄.rad.3125.
rad.12500.m̄.59.	rad.12500.m̄.50.

Somma 125.p̄.rad.3125.restante 225.m̄.rad.28.125.

Le mità sono 62. $\frac{1}{2}$. p̄.rad.781. $\frac{1}{4}$.F. Et 112. $\frac{1}{2}$. m̄. radice 7031. $\frac{1}{4}$. G.

di ciascuno delli quali si piglia la mità.

12656. $\frac{1}{4}$.

112. $\frac{1}{2}$. 5625. la rad. è 75.

75.

Di ciascuna delle quali si piglia la radic. che di F.la rad. è rad. L. 62. $\frac{1}{2}$. p̄. rad.781. $\frac{1}{4}$.L,& di G,la rad.è m̄ (rad.93. $\frac{3}{4}$. m̄. rad. 18 $\frac{3}{4}$.)il composto delle quali sarà.

Rad L.62. $\frac{1}{2}$.p̄.rad.781. $\frac{1}{4}$.L.m̄ (rad.93. $\frac{3}{4}$. m̄.rad m.rad.18. $\frac{3}{4}$.) il che è il residuo quale, è la rad. della quantità A, residuo contenuto da vn residuo,& da vna rad.LL.ma m̄.(radic. 93 $\frac{3}{4}$.m̄. rad.18. $\frac{3}{4}$.) è quanto a dire rad.18. $\frac{3}{4}$.m̄.rad.93. $\frac{3}{4}$. però haueremo rad. L.62. $\frac{1}{2}$. p̄.℞ 781. $\frac{1}{4}$.L p̄.rad.18. $\frac{3}{4}$.m̄.rad.93. $\frac{3}{4}$.che è la linea G H, lato del quindecag. qual quantità è 4. $\frac{1}{2}$.in circa.

Sõma 187. $\frac{1}{2}$. restante 37. $\frac{1}{2}$. le mità loro sono 93. $\frac{3}{4}$.& 18. $\frac{3}{4}$.le rad.loro accompagnate insieme con il segno m̄. fanno rad.93. $\frac{3}{4}$. m. rad. 18. $\frac{3}{4}$. il qual composto L. è la rad. di G, & è m. perche nella nostra principale quantità R.la minore o seconda parte (cioè la rad. LL.) è m. haueremo dunque m.(rad.93. $\frac{3}{4}$.m.rad.18. $\frac{3}{4}$.)che sciogliendo il m.è quanto a dire radice 18. $\frac{3}{4}$.m. radice 93. $\frac{3}{4}$.

IL FINE DEL QVARTO LIBRO.

delle L M N O, contenesse vna quantità B, similmente 6. volte, come le R S T V, contengono la A; all'hora si diria ciascuna delle R S T V, essere talmente moltipliee alla A, come ciascuna delle L M N O, è moltipliee alla B.

Diffinitione terza.

LA proportione è la conuenienza, ò habitudine che hanno insieme due grandezze, (ò quantità) d'vn medesimo genere rispetto alla quantità loro.

Quando due quantità d'vn medesimo genere, come dui numeri, due linee, dui angoli, due superficie, ò dui corpi si paragonano insieme secondo la quantità loro, cioè secondo che l'vna, è maggiore dell'altra, o minore, e eguale questo paragone, o comparatione che si fa dall'vna all'altra secondo la quantità, o vogliamo dire paragonandosi la quantità, o grandezza dell'vna, alla quantità, o grandezza dell'altra, questa conuenienza si chiama proportione; che le quantità di diuersi generi non si dicono hauere proportione l'vna all'altra, perche non si possono paragonare insieme secondo, o rispetto alle quantità loro, non si potendo dire l'vna essere maggiore, o minore, o eguale all'altra; Che per esempio non si potendo dire, che vna superficie sia maggiore, o minore, o eguale, ne ad vna linea, ne ad vn'angolo, ne ad vn corpo, tutti di diuersi generi fra loro, la diuersità de' generi fa che queste sorti di quantità fra loro non si possono paragonare, & perciò non si può dire che fra loro sia proportione, che se bene intese vna superficie, & vn corpo se potesse dire quanto al colore, vna essere più bianco dell'altro, o egualmente bianchi, perche questa comparatione fra essi non e secondo la quantità (che è secondo la qualità) ella qui non si chiama proportione; Et se bene propriamente la proportione si dice essere fra le quantità d'vn medesimo genere paragonate fra loro similmente rispetto alla loro quantità; si può anco dire essere proportione fra dui tempi, dui suoni, due voci, dui luoghi, dui moti, dui pesi, due Potenze, & simili, mentre però che si fa paragone dell'vno all'altro rispetto, o secondo la quantità, considerando poniamo l'vn tempo essere maggiore, o minore, o eguale all'altro, & così seguendo, che all'hora questa conuenienza de' dui tempi si chiama proportione, perche essi all'hora si considerano, come quantità; Et delle due quantità che si intendono nella proportione paragonarsi l'vna all'altra rispetto alla loro quantità, ò grandezza, quella che si paragona si chiama antecedente, & quella alla quale ella si paragona si chiama consequente, onde paragonandosi, poniamo la superficie 20. alla superficie 10. la 20. si chiama antecedente, & la 10. consequente; ma paragonandosi la 10. alla 20. la 10. saria antecedente, & la 20. consequente.

Diffinitione quarta.

LA proportionalità e similitudine di proportioni.

Quando essendo la proportione che hà la linea 20. alla linea 10. eguale alla proportione che hà la linea 14. alla 7. si fa poi paragone d'vna di queste due proportioni eguali all'altra, questa comparatione di proportioni eguali si chiama proportionalità.

Diffinitione quinta.

LE grandezze si dicono hauere proportione fra loro che moltiplicate si possono l'vna l'altra scambieuolmente eccedere, o superare.

La quantità ancorche siano d'vn medesimo genere non si dicono tutte hauere proportione fra loro, ma quelle solo che possono essere moltiplicate talmente che l'vna ecceda l'altra, come per esempio da vna linea finita ad vna infinita non si dice essere proportione; perche la finita non si può moltiplicare talmente che il prodotto ecceda mai l'infinita che perciò si dice tra il finito, & l'infinito non essere proportione, ò conuenienza; Ancora fra l'angolo retti lineo, & l'angolo del contatto, o della Contingenza si dice non essere proportione, perche l'angolo della contingentia non si può moltiplicare talmente che il prodotto possa eccedere l'angolo rettilineo; Ma fra il diametro del cerchio, & la sua circonferenza si dice bene essere conuenienza, ò proportione, perche il diametro si può moltiplicare talmente che il prodotto eccederà la circonferenza; Che sapendosi che la circonferenza non arriua a contenere volte 3. $\frac{1}{7}$. il diametro, conosciamo che moltiplicando il diametro per 4. ò per 5. ò per altro numero maggiore, anzi anco per il solo 3. $\frac{1}{7}$. il prodotto eccederà, o superarà la circonferenza: Così anco fra il cerchio poniamo di diametro 100. & ciascuna superficie rettilinea, si dice essere proportione; perche presa qual si vogli figura rettilinea per piccola che sia, ella si potrà moltiplicando accrescere talmente che il pro-

detto douentarà maggiore del cerchio, (& lo potrà contenere in se) Et conuersamente sia vna superficie rettilinea di che grandezza si vogli, si potrà sempre moltiplicare, o moltiplicando il cerchio peruenire a prodotto, o ad'altro cerchio che superarà in grandezza la superficie rettilinea per grande, che ella si imagini, ò si consideri.

Diffinitione sesta.

NElla medesma proportione si dicono essere le grandezze, o quantità cioè hauere la istessa proportione la prima alla seconda, che la terza alla quarta, quãdo tolti i moltiplici egualmente, come si vogliono alla prima, & terza; Et anco tolti i moltiplici egoalmente, come si vogliono alla seconda, & quarta, occora sempre chè quello che auuiene al moltiplice della prima rispetto al moltipliee della secõda in esserli maggiore, o minore, o eguale, auenga ancora al moltiplice della terza rispetto al moltiplice della quarta in esserli medesmamente maggiore, o minore, o eguale.

Di quattro quantita proposte A, prima B, seconda a, terza, & b, quarta; si dice la prima A, alla seconda B, hauere la medesma proportione che ha la terza a, alla quarta b, quando tolti i moltiplici egualmente alla prima, & alla terza, cioè alli dui antecedenti A, & a, in qual sorte di moltiplicita si vogli, & ancora tolti i moltiplici egualmente in qual sorte di moltiplicita si voli, alla seconda, & quata, cioè alli dui consequenti B, & b, occore che (secondo l'ordine d'esse 4. quantita) paragonando essi moltiplici, quello che auuiene al moltimlici della prima A, antecedente rispetto al moltiplice della seconda B, suo consequente in esserli maggiore, o minore, o eguale, auuiene ancora al moltiplice della terza a, antecedente, rispetto al moltipliee della quarta b, suo consequente in esserli medesmamente maggiore, o minore, o eguale; cioè che sempre che il moltiplice della prima, sia maggiore del moltiplice della seconda, ancora il moltiplice della terza sia maggiore del moltipliee della quarta; Et cosi sempre che il moltipliee della prima sia minore del moltiplice della seconda, ancora il moltipliee della terza sia minore del moltipliee della quarta; Et che quando il moltipliee della prima fusse eguale al moltiplice della seconda ancora il moltipliee della terza sia eguale al moltipliee della quarta. Per esempio delle 4. quantita prima 10. seconda 4. terza 15. quarta 6. paragonate la prima alla seconda, & la terza alla quarta. Alli dui antecedenti 10 & 15. tolti i moltiplici egualmente poniamo quintupli A, 50. & B, 75. Et alli dui consequenti 4. & 6. tolti i moltiplici egualmente poniamo triplici 12. & b, 18. Che il moltiplice A, 50. della prima, eccede, ò vogliamo dire, è maggiore del moltiplice a, 12. della seconda Ancora similmẽte il moltiplice B, 75. della terza, eccede, cioe è maggiore del moltiplice b, 18. della quarta; quãdo questo auenga sempre in'ogni sorte di moltiplicita; cioè che quando A, sia maggiore di a ancora B, sia maggiore di b, all'hora si dira dette quattro quãtita hauere vna istesso proportione, cioè dalla prima 10. alla seconda 4. essere come dalla terza 15. alla quarta 6.

50. A,	10. prima,	4. seconda,	12. a,
75. B,	terza 15.	quarta 6.	18. b,

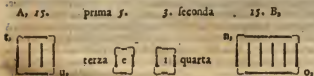
Et se pure tolti i moltiplici egualmẽte A, & B, poniamo quintupli alli antecedenti prima, & terza, & li moltiplici egualmente a, & b, poniamo quindecupli alli consequenti seconda, & quarta, occorra che hora, che A, è minore di a, ancora B, sia minore di b, & questo auuenga sempre; cioè che quando il moltipliee della prima è minore del moltiplice della seconda, ancora il moltiplice della terza sia minore del moltiplice della quarta, all'hora si dira dalla prima quantita alla seconda, essere la istessa proportione che è dalla terza alla quarta;

A, 50.	10.	4.	60. a,
B, 75.	15.	6.	90. b,

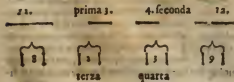
Et se tolti similmente i moltiplici egualmente A, & B, & siano ottupli alla prima, & terza antecedenti, & anco i moltiplici egualmente a, & b, & siano vintupli alla seconda, & quarta consequenti, occorra hora che essendo A, moltiplice della prima eguale ad a, moltiplice della seconda; ancora B, moltiplice della terza sia eguale a b, moltiplice della quarta, & questo auẽga sempre; cioè che quando il moltiplice della prima è eguale al moltiplice della secõda, ancora il moltiplice della terza sia eguale al moltiplice della quarta, all'hora si dira dalla prima quantita alla seconda essere la medesma proportione che e dalla terza, alla quarta;

A, 80.	10.	4.	80. a,
B, 120.	15.	6.	120. b,

Onde quando hauendo 4. quantita prima, seconda, terza, & quarta; Si dimostri che in qual si voglino moltiplicita che si piglino i moltiplici alla prima, & terza intese per antecedenti; Et anco in qual si vogli moltiplicità che si piglino alla seconda, & quarta, intese per consequenti; Sia necessario che sempre quello che auuiene al moltiplice dell'vno anteccedẽte, ò prima rispetto al moltipli-

tiplice del ſuo conſequente, o ſeconda in eſſerli eguale, o maggiore, o minore auenga anco al mol-tiplice dell'altro antecedente, o terza, riſpetto al moltiplice del ſuo conſequente, o quarta in eſ-ſerli medeſmamente eguale, o maggiore, o minore, all'hora mediante queſta Diffinitione ſi po-trà concludere, frà le quattro quantità dette eſſere due proportioni eguali; cioè che la propor-tione quale hà la prima alla ſeconda, è la medeſma, o voliamo dire è eguale alla proportione che hà la terza, alla quarta, (Et conuerſamẽte quando ſapremo, o ſi ſara concluſo che di quattro quan tità, la proportione che è dalla prima alla ſecõda, ſia anco dalla terza alla quarta, ſara ancor ve-ro, che tolti i moltiplici egualmente alla prima, & terza, & anco i moltiplici egualmente alla ſe-conda, & quarta, all'hora quello che auuẽga al moltiplice della prima, riſpetto al moltiplice del-la ſeconda in eſſerli eguale, o minore, o maggiore auuerrà neceſſariamente ancora al moltipli-ce della terza, riſpetto al moltiplice della quarta in eſſerli ſimilmente eguale, ò minore, o mag-giore:) Onde vediamo che in queſto modo per conoſcere facilmente ſe di 4. quantità le due lo-ro proportioni che ſono dalla prima alla ſeconda, & dalla terza alla quarta, ſiano eguali, o iue-guali, potremo pigliare i moltiplici egualmente alla prima, & terza; Et anco i moltiplici egual-mente alla ſeconda, & quarta, ma di ſorte che il moltiplice della prima ſia eguale al moltiplice della ſeconda, che ſe anco il moltiplice della terza all'hora ſia eguale al moltiplice della quarta, ſi conoſcerà le due proportioni delle 4. quantità eſſere anc'elle eguali; Ma ſe all'hora il molti-plice della terza non ſia eguale al moltiplice della quarta, ma che gli ſia maggiore, o minore, queſto ſarà ſegno che le due proportioni non ſiano eguali; cioè che dalla prima quantità alla ſe-conda non ſia la proportione medeſma quale è dalla terza alla quarta. Per eſempio; Per cono-ſcere ſe da 5. a 3. ſia la iſteſſa proportione che è dalla ſuperficie C, alla ſuperficie I. Noi alli ante-cedenti, & alli conſequenti, pigliaremo li moltiplice egualmente, ma in modo che l moltiplice della prima 5. venga ad eſſere eguale al moltiplice della ſeconda 3. il che facilmente ſuccederà, conſiderando noi che, perche 5. via 3. fa quanto 3, via 5. ſe moltiplicaremo il 5. per 3. che fa 15. Et il 3. per 5. che fa pur 15. haueremo li dui moltiplici della prima, & terza; cioè 15. & 15. eguali; Pigliaremo dunque alli dui antecedenti prima, & terza, cioè al 5. & alla ſuperficie c, i moltiplici

tripli, & haueremo 15. A, & la ſuperficie t u; Ancora pigliaremo alli dui conſequenti ſeconda, & quarta; cioè al 3. & alla ſuperficie I, i moltiplici quintupli, & haueremo 15. B, & la ſuperficie n o; Hora perche A, 15. moltiplice della prima, è eguale à B, 15. moltiplice della ſeconda, ſe la ſuperfi-cie t u, moltiplice della terza ſi conoſceſſe eſſere eguale alla ſuperficie n o, moltiplice della quar-ta, ſi potria concludere mediante queſta diffinitione, che la proportione della ſuperficie C, alla I, ſi chiami, o ſi dica eſſere eguale alla ꝓportione di 5. a 3. Mà ſi vede che la ſuperficie tu, moltiplice dell'antecedente C, è minore della ſuperficie n o, moltiplice del ſuo conſequente I, però nõ ſi può dire che queſte due proportioni di 5. à 3. & di C, ad I, ſiano eguali fra loro, anzi quando eſſendo il moltiplice della prima eguale al moltiplice della ſeconda, auenga poi che il moltiplice della ter-za, ſia minore del moltiplice della quarta, come auuiene in queſte, all'hora la proportione della terza alla quarta, (come ſi conoſcerà al ſuo luogo) è ſimilmente minore della proportione che è dalla prima alla ſeconda; (cioè all'hora la proportione della prima alla ſeconda è maggiore del-la proportione che è dalla terza alla quarta,) che ſe il moltiplice della terza fuſſe maggiore del moltiplice della quarta, all'hora la proportione della terza alla quarta ſaria ſimilmente maggio-re della proportione che fuſſe dalla prima alla ſeconda, o vogliamo dire all'hora conuerſamente la proportione della prima alla ſeconda ſaria minore della proportione che fuſſe dalla terza al-la quarta. Et volendo conoſcere ſimilmente ſe dalla retta 3. alla retta 4. ſia proportione eguale à quella che è dall'angolo di gradi 20. all'angolo di gradi, 30. (ò (ſchiſando p 10.) che è dall'angolo di 2. all'angolo di 3. noi pigliando li moltiplici egualmente alli dui antecedenti ſecondo il nume-ro del conſequente 4. cioè quadrupli, fare mo 12. & l'angolo 8. Et pigliando i molti-plici egualmente alli dui conſequenti ſe-condo il numero dell'antecedente 3. cioè tripli, faremo 12. & l'angolo 9. Hora per-che, 12. moltiplice della prima quãtità 3. è eguale à 12. moltiplice della ſeconda quã-

12. prima 3. 4. ſeconda 12.

8 2 3 9

terza quarta

tità

tità 4. Ma l'angolo 8. moltiplice della terza, non è eguale all'angolo 9. moltiplice della quarta, anzi gli è minore, siamo sicuri che la proportione della prima quantità alla seconda non è eguale alla proportione della terza alla quarta, anzi che dalla terza alla quarta è minore che dalla prima alla seconda.

Diffinitione settima.

Le quantità che hanno vna medesma proportione si chiamano proportionali.

Se dalla quãtità a, alla b, sia come dalla c, alla d, queste 4. quantità si chiamano proportionali.

a. 12.	b, 8.
c. 9.	d. 6.

Diffinitione ottaua.

Quando di quattro quantità tolti i moltiplici egualmente alli dui consequenti seconda, & quarta, il moltiplice della prima eccede il moltiplice della quarta: all'hora dalla prima alla seconda, si dirà essere maggiore proportione, che dalla terza alla quarta.

Quando di 4. quantità tali che dalla prima alla seconda, sia come dalla terza alla quarta, si pigliano i moltiplici egualmente alla prima, & alla terza; Et anco i moltiplici egualmente alla seconda, & alla quarta, auien sempre che se il moltiplice della prima è maggiore del moltiplice della seconda, ancora il moltiplice della terza è maggiore del moltiplice della quarta; Ma quando dalla prima alla seconda non è come dalla terza alla quarta, all'hora tolti i moltiplici egualmente, come s'è detto, & alli dui antecedenti, & alli dui consequenti, può occorrere che il moltiplice della prima ecceda, ò sia maggiore del moltiplice della seconda, ma che il moltiplice della 3. nõ ecceda, cioè non sia maggiore del moltiplice della quarta, & all hora, o in tal caso la diffinit. dice che di queste due proportioni ineguali, la prima si chiama maggiore, cioè che la proportione della prima quantità, alla seconda si chiama, o si dice essere maggiore della proportione che è dalla terza, alla quarta, onde, quando di quattro quantità tolti i moltiplici egualmente alla prima, & terza, & anco alla seconda, & quarta, si dimostrarà che essi moltiplici possono essere tolti in tal moltiplicità, cioè che possono trouarsi alcuni moltiplici tali che essendo il moltiplice della prima, maggiore del moltiplice della seconda, non sara necessario che il moltiplice della terza sia ancor egli maggiore del moltiplice della quarta, ma gli sara eguale, o minore, all'hora questo dimostrato si potrà concludere per la presente diffinitione che la proportione della prima quantità alla seconda è maggiore che la proportione della terza alla quarta; Per esempio, Dato a, prima antecedente, & b, secondo suo consequente, Ancora c, terza antecedente, & d, quarta sue consequente, & tolti i moltiplici egualmente poniamo settupli alla prima, & terza A, 84. & C. 28. Et anco tolti i moltiplici egualmente poniamo decupli alla seconda, & quarta B, 80. & D, 30. Perche A, 84. moltiplice della prima supera B, 80. moltiplice della seconda, ma C, 28. moltiplice della terza non supera D, 30. moltiplice della quarta (anzi è minore di lui) si dirà la proportione della prima a 12. alla seconda b, 8. esser maggiore della proportione della terza C, 4. alla quarta d, 3. Et se fussero tolti i moltiplici 15. vpli alla prima, & terza, & 20. vpli alla seconda, & quarta, perche 180. moltiplice della prima supera 160. moltiplice della seconda, ma 60. moltiplice della terza, non supera 60. moltiplice della quarta, (Che gli è solo eguale) pure si dirà perciò che dalla prima quantità alla seconda, è maggiore proportione che della terza, alla quarta.

A, 84.	a, 12.	8. b.	80.	B.
C, 28.	c, 4.	3. d.	30.	D,
180.	12.	8.	160.	
60.	4.	3.	60.	

Ancora hauendo le quattro quantità D E, G H, & paragonate la D, prima rad. 13. alla E, seconda radice 5. Et la G, terza radice 48. alla H, quarta rad. 19. Tolti i moltiplici egualmente poniamo decupli alli antecedenti D, & G, prima, & terza, & tolti i moltiplici egualmẽte poniamo sedecupli alli consequenti E, & H, seconda: & quarta, perche radice 1300. moltiplice della prima, supera radice 1280. moltiplice della seconda, ma rad. 4800. moltiplice della terza non supera rad. 4864. moltiplice della quarta (anzi è minor di di lui) si dirà che

Radice 65.	D,	E,	rad. 65.
Radice 1300.	radice 13.	rad. 5.	1280.
Rad. 4800.	radice 48.	rad. 19.	rad. 4864.
Radice 240.	G.	H.	rad. 247.

rà che la proportione della prima D, alla seconda E, è maggiore che della terza G, alla quarta H. Et hauendo le 4. quantità L M, N O, paragonãdo L, ad M & N, ad O, tolti li moltiplici egualmẽte poniamo quadrupli alli dui antecedenti L, & N, & siano r, & s; Et tolti li moltiplici egualmente poniamo quintupli alli dui consequenti M, & N, & siano t, & u, vediamo che r, rad. quadra 80. eccede t, rad. quadra 79. $\frac{1}{6}$ ma che s, radice cuba 576. non eccede u, rad. cuba 583. $\frac{1}{4}$. anzi è minore d'essa u, perilche diremo la proportione di L, ad M, essere maggiore della proportione che è da N, ad O. Ancora di altre quattro quantità paragonando.

r,	L,	M,	t,
Rad. q. 80.	rad. q. 5.	rad. q. 3. $\frac{1}{5}$.	rad. q. 79. $\frac{1}{5}$.
Rad. cuba 576.	rad. c. 9.	rad. c. 4. $\frac{2}{3}$.	rad. cuba 583. $\frac{1}{3}$.
S,	N,	O,	u,

P. prima. S. seconda. P. prima ad

Rad. q. c. 8000000. rad. q. 200. rad. 2. rad. c. 2. $\frac{17}{20}$. rad. c. 2850. rad. q. c. 8122500. S. seconda.

Rad. q. c. 16810000. rad. c. 4100 rad. c. 4. $\frac{1}{10}$. 1. $\frac{3}{5}$. 16. R. q. 256. R. q. c. 16777216. R. c. 2. $\frac{17}{20}$.

T. Terza. Q. quarta. 65536. Et T. terza.

Rad. c. 4. $\frac{1}{10}$. à Q. quarta 1. $\frac{3}{5}$. Se pigliaremo i moltiplici egualmente, & siano decupli alla P, & T. Et anco i moltiplici egualmente, & siano decupli alla S, & Q vedremo che della prima il moltiplice rad quadra 200. cioè rad. quadra cuba 8000000. è superato dal moltiplice della seconda qual moltiplice è radice cuba 2850. cioè rad. quadra cuba 8122500. Et che della terza il moltiplice rad. cuba 4100. cioè rad. quadra cuba 16810000. non è superato dal moltiplice della quarta qual moltiplice è 16. cioè rad. quadra 256. cioè rad. quadra cuba 16777216. anzi detto moltiplice della terza supera esso moltiplice della quarta; Perche dunque in queste 4. quantità tolti i moltiplici loro egualmente alli antecedenti, & egualmente alli consequẽti, si vede che il moltiplice tiplice della terza supera il moltiplice della quarta, ma che il moltiplice della prima non supera il moltiplice della seconda, si dirà mediante la diffinitione data che dalla terza, alla quarta è maggior proportione che dalla prima, alla seconda, cioè che da T, à Q è maggior proportione che da P, ad S. Et se ci verrà comodo potremo voltando i nomi chiamare T, prima, Q seconda, P, terza, & S, quarta; Et questo basti, hò posti questi esempij nelle quantità irrationali, acciò che i Pratici in esse conoscano che Euclide molto giudiciosamente hà Diffinito in tal modo (seruendosi de i moltiplici detti) le quantità che hanno vna medesma proportione, & quelle che l'hanno diuerse, mostrando delle due diuerse proportioni quale si dica essere la maggiore.

Diffinitione nona.

LA proportionalità consiste, ò si contiene in trè termini almeno.

Essendo la proportionalità similitudine di proportioni, essa proportionalità non può contener si, ò essere formata da manco di due proportioni, ma ciascuna proportione hà dui termini; cioè l'antecedente, & il consequente perilche in due proportioni, & perciò nella proportionalità contenuta da 2. proportioni saranno 2. antecedenti, & 2. cõsequenti; ma questi 2. antecedẽti, & 2. consequẽti, possono ritrouarsi in 3. sole quãtità, o 3. soli termini. pche quel termine che è cõsequente della 1. pportione, può seruire p antecedente della 2. pportione, come se dicẽdo la pportione di 9. à 6. e come la proportione di 6. à 4. perche il 6. antecedente della 2. proportione e eguale, o è l'istesso numero, o quantità che serue per consequente nella prima, noi in cambio di scriuere le quattro quantità 9. 6. 6. 4. per descriuere le due proportioni eguali, potremo scriuere solo queste trè, 9. 6. 4. quali contengono le istesse due proportioni eguali; Et perciò la proportionalità verrà a contenersi in trè termini soli, ne in meno di trè termini, può contersi, perche in manco di trè termini non possono intendersi dui antecedenti, & dui consequẽti, che in dui soli termini non può intendersi altro che vn'antecedente, & vn consequente, & perciò esplicarsi, ò mostrarsi altro che vna proportione; Quando mò in trè termini si esplicano due proportioni eguali dicendo, (& siano essi trè termini 9. 6. 4.) dal primo 9. al secondo 6. è come dal secondo 6. al terzo 4. all'hora essi trè termini si chiamano, ò si dicono essere continui proportionali; come anco quando di molti termini quanti si vogliono, ciascuno delli intermedij serue per consequente al prossimo à lui antecedente, & anco serue per antecedente al prossimo a lui seguente (seruendo li dui termini estremi l'vno per solo antecedente, & l'altro per solo consequente) all'hora tutti essi termini contenendosi fra loro proportioni eguali, si chiamano continui proportionali, & cõtengono tante proportioni fra loro eguali quanto è il numero delli termini manco vno, cioè se saranno, ponia

mo questi sei termini 32. 48.72.108.162.243. continui proportionali essi conteniranno solo 5. proportioni eguali; Et se fussero 10. termini contenirano 9. proportioni, & cosi seguendo.

Diffinitione decima.

QVando saranno trè grandezze,o quantità cõtinue proportionali, la proportione che hà la prima alla terza, si chiamarà,o si dirà proportione duplicata alla proportione che hà la prima alla seconda; Et quando saranno 4.quantità,o grandezze continue proportionali la proportione che è dalla prima alla quarta si chiamarà triplicata alla proportione che è dalla prima alla terza: Et quando fussero molte quantità,o grandezze continue proportionali la proportione della prima alla quinta si chiamaria quadrupla,o quadruplicata, & alla sesta quincuplicata alla proportione che è dalla prima alla seconda, & cosi seguendo.

Douendo Euclide mostrare la proportione che fra loro hanno i triangoli simili,& le figure rettilinee simili,il che fa nella *19.*& 20.propositione del sesto Libro; Dicendo, Che la proportione di dui triangoli simili in l'vna propositione; E di due figure rettilinee simili nell'altra è duplicata alla proportione che è da vn lato dell'vn triangolo,o dell'vna figura al lato à quello relatiua,o corrispondente nell'altro triangolo,o nell'altra figura: Et poi nella *36.*dell'vndecimo Libro per mostrare la proportione che è fra dui solidi,o corpi simili di lati equidistanti dicendo la proportione dell'vn solido all'altro a lui simile essere triplicata alla proportione che è da vn lato dell'vn solido al lato a quello relatiuo, o corrispondente dell'altro solido,era necessario ch'egli diffinisse che cosa egli intendeua,o voleua che s'intendesse per proportione duplicata, & triplicata per potersene seruire nelle sopradette propositioni,& altre onde diffinendolo dice; Che presse 4.quantità continue proportionali poniamo le 4.rette a,b,c,d,vuole che la proportione quale è dalla prima a,alla terza c, si chiami duplicata alla proportione che è dalla prima a, alla seconda b. Et che la proportione quale è dalla prima a,alla quarta d,si chiami triplicata alla medesima detta proportione che è dalla prima a,alla seconda b. Et se seguissero anco continui proportionali la e. & f, & altre alla proportione che è dalla prima a, alla seconda b, si chiamaria quadruplicata la proportione che è dalla prima a, alla quinta è, & quincupla,o quincuplicata quella che è dalla prima a,alla sesta f,che nelle sei quantità dette si contengono cinque proportioni eguali, come similmente nelle cinque sono quattro proportioni eguali, & nelle 4. trè proportioni eguali che constituiscono quella proportione che si chiama triplicata ad vna di loro; Et nelle 3. quantità sono due proportioni eguali dalle quali la proportione che è dalla prima quantità alla terza,si chiama duplicata alla proportione chi è dalla prima quantità alla seconda, o dalla seconda alla terza,che è l'istesso.

a,	b,	c,	d,
27.	18.	12.	8.

Rad.2.	rad 6.	rad.18.	rad.54.
a,	b,	c,	d,

1.	rad.3.	3.	rad.27.	9.	rad.343.
a,	b,	c,	d,	e,	f,

Diffinitione decimaprima.

NElle proportioni,simili quantità si chiamano l'antecedente, all'antecedẽte,& il consequente,al consequente; Et quando di 4.quantità proposte si dice simplicemẽte elle essere proportionali, si intende dall'antecedente al suo consequente essere la proportione, che è dall'altro antecedente all'altro consequente.

Perche le quantità s'intendono essere proportionali in molti modi,come si vedrà;cioè simplicemente, euersamente, permutatamente, congiuntamente, disgiuntamente, conuersamente, & altre, o vogliamo dire si dicono essere simplicemente proportionali,o proportionali nella proportionalità Conuersa,o nella permutata, o nella congiunta, o nella disgiunta, o nella Euersa, o nella Equa,o nella Ordinata,o nella perturbata,l'Autore vien diffinendo, come s'intendano tali sorti di proportionalità,& prima in questa 11.diffinitione, dice che le quantità s'intendono essere simplicemente proportionali,quando si dice dalla prima alla seconda essere come dalla terza alla quarta; cioè dall'antecedente al consequente esse come dall'antecedente al consequente.

Diffi-

Diffinitione decimaseconda.

LA proportionalità Conuersa è; o per proportionalità conuersa s'intende la comparatione, che si fa dal Conseguente preso, come antecedente, all'antecedente preso, come consequente: Et dall'altro consequente preso per antecedente, all'altro antecedente preso, come consequente.

Quando hauendo 4. quantita a b c d, proportionali; cioè che la proportione di a, a, b, sia come di c, a d, si concludera esse 4. quantita essere ancora conuersamente proportionali, si vorra dire, o intendere che ancora dal consequente b, all'antedente a, è la istessa proportione che è dall'altro consequente d, all'altro antecedente c, & cosi quelli b, & d, che erano consequenti douentano, o si pigliano, o si consideremo, come antecedenti, & le a, & c, che erano antecedenti douentano, ò si pigliano, come consequenti.

a, b,
9. 6.

c, d,
3. 2.

Diffinitione decimaterza.

LA proportionalita permutata è, o per proportionalita permutata s'intende la comparatione che si fa dall'antecedente all'antecedente, & dal Consequente al consequente.

Quando essendo 4. quantita simplicemente proportionali, si côcludera esse essere ancora permutatamente proportionali, si douera intendere (prese le 4. sopradette a b c d,) che dall'antecedente a, all'antecedente c, è la proportione istessa che è dal côseguente e, al côsequente d, cioè che quando di 4. quantita dalla 1. alla 2. è come dalla terza alla quarta; Ancora dalla prima alla terza, è come dalla seconda alla quarta; In questa sorte di proportionalita permutata, conuiene che tutte le 4. quantita siano d'vno istesso genere, acciò si possa permutatamente far comparatione, proportionare l'antecedente all'antecedente, & il consequente al consequente.

Raffaele d'Angelo *Diffinitione decimaquarta.* di Tommaso da Rocca d'...

LA proportionalità congiunta si dice essere quando si fa comparatione dal composto dell'antecedente, & suo consequente ad esso consequente, cosi nelle due prime quantità (antecedente; cioè, & consequente) come nelle altre due quantità che sono l'altro antecedente, & l'altro consequente.

Quando le 4. quantità proportionali a b c b, si concluderãno essere ancora congiuntamente proportionali si vorrà, o si douerà intendere che dal composto di a, & b, al b, cioè da 15. a 6. sia, come dal composto di c, & d, al d; cioè da 5. a 3.

Diffinitione decimaquinta.

LA proportionalità disgiunta, si dice essere, o per proportionalità disgiunta si intende quando si fa comparatione da quello eccesso in che l'antecedente supera il consequente ad esso consequente, cosi nelle due seconde quantità; cioè terza, & quarta, come nelle due prima; cioè prima, & seconda.

Quando le 4. quantità proportionali a b c d, si concluderano essere disgiuntamente proportionali si vorrà dire che quello in che l'antecedente supera il consequente paragonato al consequente hà la medesma proportione che e da quello in che l'altro antecedente supera il suo consequente paragonato ad esso suo consequente; cioè che da a, m̃. b, al b, è come da c, m̃. d, al d, ò parlando ordinariamente che da 3. eccesso primo a b, 6. è come da 1. eccesso secondo à d, 2; Et in questa sorte di proportionalità disgiunta, si vede che l'antecedente si suppone essere maggiore del consequente, acciò che lo ecceda.

Diffinitione decimasesta.

LA proportionalità si dice, o si chiama euersa quando nelle quantità si fa paragone dall'antecedente all'eccesso in che egli supera il suo consequente.

Quando le 4. quantità proportionali a, 9. b, 6. c, 3. d, 2. si concludano essere anco euersamente proportionali si vorrà intendere che dall'antecedente a, 9. all'eccesso 3. in che il consequête b, 6. è supe-

eccesso rad. 8.

a,	b,
Rad. 16.	rad. 2.

eccesso 10.

c,	d,
15.	5.

superato dall'antecedente a, 9. è la istessa proportione che è dall'antecedente 3. all'eccesso 1. in che il consequente d, 2. è superato dall'antecedente C, 3. Et se le quantità a, b, c, d, fussero rad. 18. rad. 2. 15. & 5. cioè che da rad. 18. a rad 2. fusse come da 15. à 5. concludendosi esse 4. quantità essere anco proportionali nella proportionalità euersa si, verria a dire, che da radice 18. a radice 8. fusse, come da 15. a 10.

Diffinitione decima settima.

LA proportionalità Equa si dice essere, quando poste più di due quantità da vna banda, & altre tante dall'altra banda tali che la proportione delle quantità da vna banda siano ad vna ad vna eguali alle proportioni delle a quelle corispondenti quantità, da l'altra si fa comparatione della prima quantità all'vltima di quelle da vna banda; Et della prima quantità all'vltima di quelle dall'altra banda.

Essendo, poniamo le 3. quantità A B C, da vna banda, & l'altre 3. a b c, dall'altra, tali che dalla A, alla B, sia come dalla a, alla b, & dalla B, al la C, come dalla b, alla c, quando si concluda che queste sei quantità siano ancora nella Equa proportionalità, si vorrà dire che dalla prima A, all'vltima C, nelle vne, e la medesma proportione che e dalla prima a, all'vltima c, nelli altre; Et se da ciascuna banda fussero anco altre quantità, & altre tante dall'altra, poniamo dall'vna le D E F, & dall'altra le d e f, essendo pure di continuo dalla C, alla D, come dalla c, alla d, & dalla D, alla E, come dalla d, alla e, & dalla E, alla F, come dalla e, alla f, concluder dosi queste quantità essere nella Equa proportionalità proportionali si verrà intendere che fra le estreme A, & F, dall'vna banda e la medesma proportione, che e fra le estreme, a, & f, dall'altra banda.

A,	B,	C,	D,	E,	F,
8.	12.	6.	4.	3.	2.
12.	18.	9.	6.	$4.\frac{1}{2}.$	3.
a,	b,	c,	d,	e,	f,

Diffinitione decima ottaua.

LA proportiolita si chiama ordinata, o le quantita si chiamano ordinatamente proportionali, quando da vna banda essendo dall'antecedente al consequente, come dall'altra banda è dall'antecedente al consequente, ancora poi dall'vna banda sia si come dal consequente ad vn'altra quantita, cosi dall'altra banda sia similmente dal consequente ad vn'altra quantita.

Se dalla A, 30. alla B, 10. da vna banda, sia come dalla a, 12. alla b, 4. dall'altra banda, & dalla B, 10. ad vn'altra quantita C, 5. dalla detta prima banda, sia come dalla b, 4. ad vn'altra quantita C, 2. dall'altra banda, all'hora queste 6. quantita si chiamano ordinatamente proportionali.

Diffinitione decima nona.

LA proportionalità si chiama perturbata, o le quantità si dicono essere perturbatamête proportionali, quando da vna banda essendo dall'antecedente al consequente, come e dall'altra banda dall'antecedente al consequente sia poi dall'vna banda dal consequente ad vn'altra quantità si come e dall'altra banda vn'altra quantità all'antecedente.

A,	C,	Q,
18.	12.	6.
q. 30.	a, 15.	c. 10.

Se dall'antecedente A, 18. al consequente C, 12. nelle quantità superiori, o da vna banda sia come dall'antecedente a, 15. al consequente c, 10. nelle quantità inferiori, o vogliamo dire dall'altra banda, & che poi come e il consequente C, 12. alla quantità Q. 6. nelle superiori sia non dal consequente c, 10. delle inferiori ad vn'altra quantità, ma sia all'antecedente a, 15. cosi vn'altra quantità q. 30. cioè che essendo delle tre quantità superiori continenti due proportioni, & delle trè quantità inferiori continenti similmente due proportioni; la prima proportione delle superiori sia eguale alla prima proportione delle inferiori, & la seconda proportione delle supe-

superiori sia eguale alla prima proportione delle inferiori queste 6. quantita si chiamarāno perturbatamente, (ò potressimo dire inordinatamente) proportionali.

Petitione, ò Domanda.

Si domanda essere concesso che qual proportione ha vna quantita, & sia A, ad vn'altra, & sia B, la medesma proportione habbi vna proposta quantita, & sia P, a qualche altra quantita, cioè che qualche altra quantita si ritroui alla quale la proposta quantita P, habbi la proportione istessa che ha la A, alla B, Et che anco la medesma proportione di A, a B, habbi qualche altra quantita alla proposta P, cioè che qualche altra quantita si ritroui quale alla proposta P, habbi la proportione che ha la A, alla B.

Comuni Concessioni.

LE cose che sono eguali a vna medesma cosa sono eguali fra loro.
Se a cose eguali si giungono cose eguali, le somme sono eguali.

Propositione 1. Theorema 1.

SE quante si vogliono quantità siano egualmente moltiplici ad altre tante, è necessario che si come l'vna è moltiplice all'vna, così la somma, ò composto di tutte queste sia moltiplice alla somma di tutte quelle.

Siano le tre quantita A, B, C, egualmente moltiplici alli tre a, b, c, cioè la A, sia talmente moltiplice alla a. come la B, alla b, & la C, alla c; Si dice che la somma, o composto di tutte le A B C, alla somma, o composto di tutte l'altre a b c, sara talmente moltiplice, qualmente è vna sola di quelle ad vna sola di queste; cioè come la sola A, alla sola a; Per dimostrarlo; Si dice che; Perche la A, è moltiplice alla a, la A, si potra diuidere precise in parti eguali alla a; Et per la istessa causa la B, si potra diuidere precise in parti eguali alla b, & la C, in parti eguali alla c; Et perche talmente è moltiplice la A, alla a, come la B, alla b, & la C, alla c, tanto sara il numero delle parti della A, eguali alla a, quanto il numero delle parti della B, eguali alla b; & quanto il numero delle parti della C, eguali alla c; Si che se le parti della A, eguali alla a, siano tre (cioè che A, sia moltiplice tripla alla a, o vogliamo dire contenga tre volte la a,) ancora tre saranno le parti della B, eguali alla b, & similmente tre le parti della C, eguali alla c.

A,	12.	4.	a,
B,	15.	5.	b,
C,	9.	3.	c,
	36.	12.	

Hora inteso giunto la prima parte della A, alla prima parte della B, la somma sara quanto il composto di a, & b; (per comune concessione,) & alla somma detta giunto la prima parte della C, & anco al composto detto giunto la c, la totale somma delle tre parti delle A B C, sara eguale al composto delle tre quantita a b c; Et così la somma delle seconde parti delle A B C, sara eguale al composto detto delle tre quantita a b c; Et similmente la somma delle terze parti delle A B C, sara eguale al composto delle dette tre quantita a b c; Et se più fussero le parti in A B C, eguali alle a b c, la somma delle quarte parti di esse A B C, saria medesimamente eguale al composto delle tre quantita a b c; Et così la somma delle quinte parti, & delle seste parti, & dell'altre quante vi fussero ciascuna d'esse somme saria eguale al composto delle tre quantita a b c; Et perche tanto è il numero di queste somme eguali al composto delle tre quantita a b c, quanto è il numero delle parti della A, eguali alla a, & così della B, eguali alla b, & della C, eguali alla c, o vogliamo dire quanto è il numero della moltiplicita delle A B C, ne segue che la somma delle somme dette; cioè la somma delle A B C, che contiene tutte esse somme sue parti, contenga tante volte vna sola d'esse somme; cioè tante volte il composto delle tre quantita a. b, c, quante volte la sola A, contiene la sola a, o la B, o la C, la c; Adunque talmente sara moltiplice la somma delle tre quantita, o moltiplici A B C, al composto, o somma delle 3. quantita a b c, qualmente è moltiplice vna sola delle tre A B C, ad vna sola delle tre a, b, c, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 2.

SE di sei quantità la prima alla seconda sia talmente moltiplice, come la terza alla quarta, & ancora la quinta alla seconda sia talmente moltiplice, come la sesta alla quarta, all'hora il composto della prima, & quinta alla seconda: Et il composto della terza, & sesta alla quarta saranno egualmente moltiplici.

Sia la prima 9. talmente moltiplice alla seconda 3. come la terza 12. alla quarta 4. Et ancora la quinta 15. alla seconda 3. talmente moltiplice, come la sesta 20. alla quarta 4. si dice che ancora il composto della quinta, & prima, & sia 24. alla seconda 3. Et il composto della terza, & sesta, & sia 32. alla quarta 4. saranno egualmente moltiplici. Dimostratione. Perche la prima 9. è talmente moltiplice alla seconda 3. come la terza 12. alla quarta 4. ne segue che tante saranno le parti della prima eguali alla seconda, quante le parti della terza eguali alla quarta, cioe il numero delle parti, & sia A, 3. contenute nella prima 9. eguali alla seconda 3. sara eguale al numero delle parti contenute nella terza 9. eguali alla quarta 4. perilche questo numero di parti sara ancegli a, 3. Similmente perche la quinta 15. e talmente moltiplice alla seconda 3. come e moltiplice la sesta 20. alla quarta 4. ne segue che tante saranno le parti della quinta eguali alla seconda, quante siano le parti della sesta eguali alla quarta, cioe che il numero delle parti, & sia B, 5. contenute nella quinta eguali alla seconda, sara eguale al numero delle parti contenute nella sesta eguali alla quarta, perilche questo numero di parti sara ancegli b, 5. Onde il numero delle parti contenute nella somma, o composto della prima, & quinta eguali alla seconda sara il numero composto dall'A, 3. & B, 5. & sia D, 8. Et similmente il numero delle parti contenute nella somma, o composto della sesta, & terza eguali alla quarta sara il numero composto da a, 3. & b. 5. & sia d. 8. Ma A, e eguale ad a, & B, a b; però (per la seconda comune concessione) il composto D, sara eguale al composto d, cioe tanto sara il numero delle volte D, che la quinta, & prima contengono la seconda, quanto e il numero delle volte d, che la sesta, & terza contengono la quarta, perilche cosi sara moltiplice della seconda il composto della prima, & quinta, come e moltiplice della quarta il composto della terza, & sesta, che e quello che si voleua mostrare. Che se la prima quantita, & la terza fussero eguali alla seconda, & quarta, ma la quinta, & sesta egualmente moltiplici alla seconda, & quarta, Ouero se la prima, & terza fussero egualmente moltiplici alla seconda, & quarta, ma la quinta, & sesta eguali alla seconda, & quarta, sara per la medesima ragione il composto della prima, & quinta cosi moltiplice alla seconda, come il composto della terza, & sesta sia moltiplice alla quarta perche all'hora al numero M, significante l'vna moltiplicita giunto l'vnita E, significante l'vna egualita, & sia il composto, ò somma M E. Et anco all'altro numero m, significante l'altra moltiplicita all'vna detta eguale, & però eguale all'M, giunto la vnita e significante l'altra egualita, & sia il composto, o somma m e, il numero di questa somma, cioe M E, sara (per la seconda comune concessione) eguale al numero dell'altra somma, cioe a m e, ma l'vno di questi e il numero delle volte che il composto della prima, & quinta contiene la seconda; Et l'altro a lui eguale e il numero delle volte che il composto della terza, & sesta contiene la quarta però l'vn composto contiene tante volte la seconda, come l'altro composto contiene la quarta; cioè l'vn composto della prima, & quinta sara cosi moltiplice alla seconda, come l'altro composto della terza, & sesta, & sia moltiplice alla quarta. Et se la 1. fusse eguale alla seconda, & anco la quinta fusse eguale ad essa seconda, che cosi il composto della prima, & quinta conteniria 2. volte la seconda; Et similmentente la terza fusse eguale alla quarta, & anco la sesta fusse eguale ad essa quarta, che cosi il composto della terza, & sesta conteneria 2. volte la quarta, e chiaro, che per essere vn numero 2. eguale altro 2. cosi sara moltiplice (cioe doppio) il composto della prima, & quinta alla seconda, come sia moltiplice, (& sara pur doppio) il composto della terza, & sesta alla quarta, che e il proposito.

Propositione 3. Theorema 3.

SE la prima quantità sia cosi moltice alla seconda, come la terza alla quarta; Et alla prima, & alla terza si piglino i moltiplici egualmente, il moltiplice della prima alla seconda, & il moltiplice della terza alla quarta saranno egualmente moltiplici.

Sia la prima quantita A,coſi moltiplice alla ſeconda B,come e moltiplice la terza C,alla quarta D,& ſi piglino la E,& F,egualmente moltiplici alla prima,& terza A,& C,ſi dice che coſi moltiplice ſara la E,alla ſeconda B,come la F,alla quarta D. Dimoſtratione. Eſſendo E,& F,egualmente moltiplici ad A,& C,tante ſarãno le parti della E, eguali alla A,quante ſiano le parti della F,eguali alla C,& perche A alla B, & C, alla D, ſono egualmente moltiplici ſarà ciaſcuna delle parti della E, coſi moltiplice alla B, come ciaſcuna delle parti della F, e moltiplice alla D, onde (per la antecedente ſeconda propoſitione) il compoſto della prima, & ſeconda parte della E,ſarà coſi moltiplice alla B, come il compoſto della prima, & ſeconda parte della F, ſia moltiplice alla D, (cioè inteſo la prima parte della E,come prima quantità,& la B,ſeconda, ancora la prima parte della F,inteſa, come terza,& la D,quarta; Et di più la ſeconda parte della E,inteſa,come quinta, & la ſeconda parte della F, come ſeſta, perche la prima alla ſeconda, & la terza alla quarta, ſono egualmente moltiplici, & ancora la quinta alla ſeconda, & la ſeſta alla quarta ſono egualmente moltiplici ne ſegue (per la antecedente ſeconda propoſitione) che il compoſto della prima, & quinta, (cioè il compoſto delle due prime parti della E,) alla ſeconda B; Et il compoſto della terza, & ſeſta; (cioè il compoſto delle due prime parti della F, alla quarta D, ſiano egualmente moltiplici,) Et nell'iſteſſo modo inteſo il compoſto della prima,& ſeconda parte della E, come prima quantità B, ſeconda: Il compoſto della prima, & ſeconda parte della F, come terza, Et la D, quarta; Et di poi la terza parte della E, come quinta, & la terza parte della F, come ſeſta; Perche la prima quantità della ſeconda B; Et la terza quantità della quarta D, ſono egualmente moltiplici, (come di già ſi è moſtrato:) Et anco la quinta quantità della ſeconda B, & la ſeſta quantità della quarta D,ſono ancor elle egualmente moltiplici,ne ſegue per la antecedente ſeconda propoſitione) che il compoſto della prima,& quinta(cioè il compoſto delle tre prime parti della E,)alla ſeconda B. Et il compoſto della ſeſta,& terza, (cioè il compoſto delle delle tre prime parti della F,)alla quarta D, ſiano egualmente moltiplici: Et coſi, ſe più parti ſaranno nelle E,& F, eguali alle A & C,perche la ſeguente quarta parte della E,è ancora talmente moltiplice alla B,come la ſeguente quarta parte della F,è moltiplice alla D,ne ſeguirà ſimilmente(per l'antecedente ſeconda propoſitione)che il compoſto delle quattre prime parti della E,ſia coſi moltiplice alla B, come il compoſto delle quattre prime parti della F, è moltiplice alla D. Et coſi ſeguendo all'altre parti della E,& F,ad vna ad vna fin che ſiano adoprate tutte,finalmente ſi concluderà,che il compoſto di tutte le parti della E; cioè la iſteſſa E, alla ſeconda B. Et il compoſto di tutte le parti della F, cioè la iſteſſa F, alla quarta D, ſaranno egualmente moltiplici; che è quanto ſi voleua moſtrare.

Quinta.		
	Prima,	ſeconda.
E,	A,	B,
40.	8.	2.
F,	C,	D,
60.	12.	3.
Seſta,	terza,	quarta.

Propoſitione 4. Theorema 4.

SE la proportione della prima quantità alla ſeconda, ſia come della terza alla quarta; Et ſiano tolti i moltiplici,come ſi voglino egualmente alla prima,& terza; Et anco tolti i moltiplici egualmente,come ſi voglino alla ſeconda,& quarta,all'hora queſti quattro moltiplici ſaranno nel medeſimo ordine proportionali.

Sia la proportione della a, 8.prima alla b,6. ſeconda, come dalla c, 12. terza alla d, 9. quarta, & ſiano tolti alla prima, & terza, cioè alli dui antecedenti a 8. & c,12. li moltiplici egualmente poniamo tripli e 24 & f,36. Et alla ſeconda,& quarta;cioè alli dui conſequenti b,6.& d,9.ſimilmente li moltiplici egualmente (poniamo dupli) g,12. & h,18. Si dice che ancora queſti quattro moltiplici ſaranno nel medeſimo ordine proportionali; cioè che da e, moltiplice della prima al g,moltiplice della ſeconda, ſara la iſteſſa proportione, che è da f, moltiplice della terza ad h, moltiplice della quarta. Per dimoſtrarlo. Alli dui moltiplici e, & f, delli antecedenti a, & c,ſi piglino i moltiplici egualmente l,& m,che coſi(per l'antecedente terza propoſitione)eſſi l, & m, (per eſſere egualmente moltiplici alli egualmente moltiplici di a, & c,) ſaranno anc'eſſi egualmente moltiplici alle due quantità a,& c; Ancora alli dui moltiplici g,& h, delli conſequenti b, & d,ſi piglino i moltiplici egualmente n,& o,che coſi(per la antecedente terza propoſitione)eſſi n,& o,ſimilmente (per eſſere egualmente moltiplici alli egualmente moltiplici di b,& d,) ſaran-

no an-

l,	e	prima,	feconda	g,	n.
120.	24.	a, 8.	b, 6.	12.	120.
180.	36.	c, 12.	d. 9.	18.	180.
m.	f,	terza,	quarta,	h,	o.

no ancor essi egualmente moltiplici alle due quantità b, & d. Et perche le 4. quantità a b c d, fono proportionali, & alla prima, & terza a, & c, antecedenti li l, & m, fono egualmente moltiplici; Et anco alla feconda, & quarta b, & d, li n, & o, fono egualmente moltiplici, ne fegue (per il conuerfo della fefta diffinitione) che quello, che auuiene ad l, moltiplice della prima a, rifpetto ad n, moltiplice della feconda b, in efferli eguale, o maggiore, o minore auuenga anco ad m, moltiplici della terza c, rifpetto ad h, moltiplice della quarta d, cioè fe l, fia maggiore di n, ancora di neceffità m, fara maggiore di o, Et fe l, fia minore di n, ancora m, fara minore di o, & fe l, fia eguale ad n, ancora m, fara eguale ad o, (che quando quefto non aueniffe le 4. quantità a b c d, non fariano proportionali il che faria contro al fuppofito.) Hora intefe le quattro quantità e, prima, g, feconda, f, terza, & h, quarta, perche ad e, & f, prima, & terza fono tolti i moltiplici egualmente l, & m, & à g, & h, feconda, & quarta fono tolti i moltiplici egualmente n, & o, & fi è prouato, che fe l, moltiplice della prima, e, fia maggiore, o minore, o eguale ad n, moltiplice della feconda g; ancora fimilmente di neceffità m, moltiplice della terza f, fara maggiore, o minore, o eguale ad o, moltiplice della quarta h, ne fegue (per la 6. diffinitione) che le dette quattro quantità e g f h, fiano proportionali; cioè che la proportione di e prima, à g, feconda, fia come di f, terza ad h, quarta, che è quanto fi voleua moftrare.

Corollario.

DAlle cofe dette fi manifefta, che fe quattro quantità fiano proportionali, elle conuerfamente ancora faranno proportionali.

Che effendo e g, f h, quattro quantità proportionali alli dui antecedenti e, & f, prima, & terza, delle quali le l, & m, fono egualmente moltiplici, & alli dui confequenti g, & h, feconda, & quarta le n, & o, fono egualmente moltiplici, effendo che fe l, eccede, o vogliamo dire è maggiore di n; effo n, conuerfamente fara minore di l; Et fe l, fia minore di n; effo n, conuerfamente fara maggiore di l; Et fe l, fia eguale ad n, effo conuerfamente fara eguale ad l; Et perche quello, che auuiene ad l, rifpetto ad n, in efferli maggiore, o minore, o eguale, auuiene anco ad m, rifpetto ad o; Conuerfamente ancora quello che auuiene ad n, rifpetto ad l, in efferli minore, o maggiore, o eguale. auuerrà ancora ad o, rifpetto ad m, in efferli fimilmente minore, o maggiore, o eguale, onde delle quattro quantità dette e g f h, conuerfamente prefa, o intefa g, prima, e, feconda, h, terza, & f, quarta; & intefi n, & o, egualmente moltiplici alli dui antecedenti g, & h, prima, & terza, & anco l, & m, egualmente moltiplici alli dui cofequenti e, & f, perche fi è prouato che quello che auuiene ad n, moltiplici della prima g, rifpetto ad l, moltiplice della feconda e, in efferli minore, o maggiore, o eguale, auuiene ancora ad o, moltiplice della terza h, rifpetto ad m, moltiplice della quarta f, in efferli fimilmente minore, o maggiore, o eguale, ne fegue (per la fefta diffinitione) che la proportione di g, prima ad e, feconda, fia come di h, terza ad f, quarta; Onde le quattro quantità e g, f h, proportionali ancora conuerfamente faranno proportionali; cioè da g, ad e, fara come da h, ad f.

Propofitione 5.

SE vna quantità fia talmente moltiplice ad vn'altra, come è vna parte leuata, dall'vna ad vna parte leuata dall'altra, ancora il reftante dell'vna farà talmente moltiplice al reftante dell'altra, come è l'vna quantità all'altra, o come è il leuato dall'vna, al leuato dell'altra.

Sia la quantità A B, prima talmente moltiplice alla C D, feconda, come è la parte A G, della prima moltiplice alla parte c o, della feconda fi dice che il reftante G B, della prima fara talmente moltiplice al reftante O D, della feconda, come è la prima quantità A B, alla feconda C D, o vogliamo dire come è la parte A G, della parte C o; Per dimoftrarlo; Piglifi la C L, alla quale la G B, fia talmente moltiplice, come è la A G, alla C o, onde intefe le due quantità A G, G B, egualmente moltiplici alle due o c, c l, ne fegue (per la prima propofitione di quefto) che la fom-

ma

ma delle due A G, G B, cioè la totale A B, sia talmente moltiplice alla somma delle due O C, C L, cioè alla O L, come è la sola C O, ma come è moltiplice la A G, alla C O, cosi è moltiplice la A B, alla C D, & perche anco è cosi moltiplice la A B, alla O L, ne segue che la A B, sia egualmente moltiplice alle due C D, & O L, perilche esse due C D. O L, saranno eguali fra loro onde leuantone communemente la C O, il restante O D, sara eguale al restante C L, ma la G B, e moltiplice alla C L, dal supposito, o construttione, come e la A G, alla C O, però ancora la G B, alla O D, sara talmente moltiplice, come la A G, alla C O, & però come la totale A B, alla totale C D. Ouero.

12. p̃. radice 8.
A, ——— B,
12. G. radice 8.
C, 4. p̃ radice 2.
L, ... ——— D,
Radice 2. 4. o radice 2.

Essendo A B, cosi moltiplice à C D, come la parte A G, alla parte C O, per prouare, che anco il restante G B, sara cosi moltiplice al restante O D, come è la totale A B, alla totale C D. Noi pigliaremo la A N, cosi moltiplice alla O D, come è moltiplice la A G, alla C O, che perciò (per la prima propositione) ancora la totale N G, alla totale C D, sara cosi moltiplice, come la sola A G, alla sola C O, & però come è la A B, alla C D, perilche N G, & A B, sono egualmente moltiplici alla istessa C D, & però esse N G, A B, sono eguali fra loro, onde leuatone communemente la A G, la restante G B, sara eguale alla restante N A, ma N A, è cosi moltiplice alla O D, come e la totale A B, alla totale C D, però ancora la G B, sara cosi moltiplice alla detta O D, come e la totale A B, alla totale C D, & perciò come è anco la parte A G, alla parte C O, cioè il restante G B, al restante O B, sara cosi moltiplice, come è il tutto A B, al tutto C D, ò come la parte A G, alla parte C O, che è quanto si voleua mostrare.

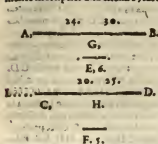
Radice 8. A, 12. p̃. radice 8.
N, p, ... ——— B,
G,
C, ——— D,
4. radice 2.

Propositione 6. Theorema 6.

SE due quantità siano egualmente moltiplici à due altre quantità, & dalle prime, ne siano leuate due che siano egualmente moltiplici alle due altre dette, all'hora i dui restanti saranno, ò eguali alle altre due quantità dette, ouero saranno ad esse egualmente moltiplici.

Siano le due quantità A B, C D, egualmente moltiplici alle due E, & F. Et ancora le due parti A G, C H, delle prime A B. C D, siano egualmente moltiplici alle medesme due E, & F. Si dice, che le due restanti G B, H D, delle A B, C D, prime saranno anc'elle egualmente moltiplici, ouero eguali alle medesme E, & F, dette. Per dimostrarlo. Sia prima, che dalla A B, leuata la A G, la restante G B, sia eguale alla E, si dice che all'hora ancora la H D, restante della C D, leuatane la C H, sara di necessità eguale alla F. Perche tolta la C I, eguale alla F, come è la G B, alla E, & considerate le sei quantità A G, prima, E, seconda, C H, terza, F, quarta, G B, quinta, & C L, sesta, perche la A G, prima, è talmente moltiplice alla E, seconda come la C H, terza alla F, quarta. Et anco la G B, quinta e cosi eguale alla E, seconda, come la I C, sesta alla F, quarta, ne segue (per la seconda di questo) che il composto A B, della prima A G, & quinta G B, sia talmente moltiplice alla seconda E, come sara il composto H L, della terza H C, & sesta C L, moltiplice alla quarta F. Ma ancora C D, (dal composito) e cosi moltiplice alla F, come e moltiplice la A B, alla E, onde la H L, & la C D, saranno egualmente moltiplici alla medesma F, perilche queste due H L, C D, perciò saranno eguali fra loro, & leuatone communemente la C H, ancora la restante C L, sara eguale alla restante H D, ma C L, dalla construttione è eguale alla F, perilche ancora la H D, sara eguale alla istessa F, quando dunque il restante G B, della A B, sia eguale

30.
A. ——— B.
24. 6.
G.
E. 6.
L, ——— D,
5. C. 20. 5.
H.
F. 5.

alla E,ancora il restante H D,della C D,sara eguale alla F: Ma se la restante G B, sia moltiplice alla E,ancora il restante H D,sara moltiplice alla F,& cosi come è la G B, alla E; Perche presa pure la C I,cosi moltiplice alla F,come e la G B,alla E,& intese le sei quantità, come di sopra ne seguità similmente,che il composto di A G,'& G B, cioè la totale A B, (per la seconda di questo) sara cosi moltiplice alla E,come il composto di H C, C I,cioè la totale H L, sia moltiplice alla F, ma ancora la C D, e cosi moltiplice alla F, come e moltiplice la A B, alla E, però la C D, alla F, sara cosi moltiplice, come e la HI, alla istessa F. Perilche queste due quantità C D; H I, egualmente moltiplici alla istessa F, saranno eguali fra loro,onde da ciascuna leuata la a, loro commune C H, la restante H D, sara eguale alla restante C I, ma C I,e moltiplice alla F,come e la G B,alla E,perilche ancora H D, sara talmente moltiplice alla F, come e moltiplice la G B,alla E, che e quello che si voleua mostrare.

24. 30.
A, B.
G,
E, 6.
20. 25.
L D.
C, H.
F. 5.

Si potria ancor dire. Perche A B, & C D, sono egualmente moltiplici alle E, & F, tanto sarà il numero delle parti in A B,eguale alla E,quanto sia il numero delle parti in C D egua i alla F,& chiamiamoli N,& n. Et perche anco A G & C H sono egualmente moltiplici alle medesime E,& F,tãto sarà il nu.delle parti in A G,eguale alla E, quanto sia il nu. delle parti in C H, eguali alla F, & chiamiamoli O,& o; E perche se da cose eguali si leuano cose eguali rimanenti sono eguali,ne segue,che dalli dui num.ò moltit.di parti N,& n,che sono eguali,leuandone i dui num.ò moltitudine di parti O,& o,che ancor essi sono eguali(cioè leuando O, da N,& o da n;)i dui restanti numeri,ò moltitudini di parti, & chiamiamoli R,& r,di necessità saranno frà loro eguali. Et quando R fosse la vnità,ò significasse vna sola parte in A B, delle eguali alla E,che restasse à cauarne A G,ancora r,saria la vnità,& significaria vna sola parte in C D, delle eguali alla F,che restaria à cauarne C H;Onde quando la restante G B sia eguale alla E,ancora la restante H D,sara eguale alla F; Et se la restante G B continerà alcune volte R,la E,ancora la restante H D conterrà l'istesso,ò vogliamo dire egual numero di volte r,la F, perilche si come la restante G B,sia moltiplice alla E,cosi ancora la restante H D,sarà moltiplice alla F, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 7. Theorema 7.

LE quantità eguali comparate ad vna istessa quantità ad essa hanno vna medesma proportione;Et conuersamente essa alle dette quantità eguali hà vna medesma proportione.

Siano le due quantità A,& a,eguali comparate ad vna istessa quantità C,si dice,che la proportione di ciascuna d'esse alla C,è vna medesma,cioè che da A,alla C,è come dalla a, alla C. Perche in queste tre quantità A, a,C,si considerano due proportioni,in esse tre quatità vengono ad intendersi dui antecedenti, & dui consequenti,& però à pigliarsi come quattro quantità dicendosi la proportione di A,alla C,essere come di a,alla C;Onde C,essendo conseguente,& di A,& anco di a,si può intẽdere,che dalla A,prima alla C,secõda,sia come dalla a,terza alla C,quarta, stante questo noi alle A,& a,prima,& terza,cioè alli dui antecedenti pigliaremo i moltip.egualmente come si voglino,& siano M.& m,quali saranno ancora essi egõali frà loro(perche in M. saranno tante parti eguali alla A,quante parti siano in m,eguali alla a,& però ciascuna delle parti della A, sarà eguale à ciascuna delle parti della a,cosi come A,è eguale alla a,Onde intesa la 1. parte della A,& la prima parte della a,che sono eguali,& cosi la seconda parte della A,& la 2. parte della a, che sono eguali,perche (per la seconda commune concessione) se à cose eguali si giungono cose eguali le somme sono eguali,ne segue,che se alla prima parte della A,si giunge la seconda,& che alla prima parte della a,si giunga la seconda,cioè à cose eguali si giungano cose eguali,la somma delle due parti della A,sarà eguale alla somma delle due parti della a; Et se all'vna somma si gionge la terza parte della A,& all'altra somma si giunga la terza parte della a, i dui resultanti,ò somme(per la istessa seconda commune concessione)saranno similmente eguali frà loro,& cosi procedendo ne segue,che la somma di tutte le parti della A,cioè la A.istessa sia egu.alla som.di tutte le parti della a,cioè alla a, istessa) Ancora alle C, & C,seconda,& quarta si piglino i moltiplici egualmente

A 1 20 I C 5
a 1 20

60 | M A | 20 | c 5 | R 60

60 | m. a | 20 | c 5 | r 60

te come si voglino,& siano R,& r,quali ancor essi saranno eguali fra loro(essendo anzi vn medesmo, cosi come C,& C,è vna medesima quantità, & perciò si può dire, Piglisi il moltiplice della C,come si vogli intendendolo due volte cosi come la C,si intende,ò si piglia due volte,cioè come seconda, & come quarta;Hora perche M,è eguale ad m,& r,ad r, ne segue,che quello che auuienne ad M,rispetto ad R,in essergli eguale,ò maggiore,ò minore,auuerrà anco al medesimo M,rispetto all'altro r(per la egualità d'essi R,& r;)Et anco quello, che auuiene ad M,rispetto ad r,auuerrà anco all'altro m,rispetto ad r(per la egualità di detti M,& m) cioè se M,sia eguale,ò maggiore,ò minore di R,ancora m,sarà eguale,ò maggiore, ò minore di r. Et perche M,& m,sono moltiplici egualmente alla prima A,& terza a;Et R,& r, sono moltiplici egualmente alla seconda C,& alla quarta C,& si è prouato quello,che auuiene al moltiplice M,della prima A,rispetto al moltiplice R,della seconda e,auuiene anco al moltiplice m,della terza a,rispetto al moltiplice r,della quarta c,ne segue(per la sesta diffinitione delle quantità proportionali)che dalla prima A,alla seconda C,sia come dalla terza a,alla quarta c. Ancora inteso la C,due volte come prima,& terza antecedenti,& le A, & a,come seconda,& quarta consequenti,Et tolti li R,& r,moltiplici egualmente alle C,& C,prima,& terza;Et anco li moltiplici egualmēte M,& m,alla seconda,& quarta,essendosi di già prouato,che se M, è maggiore di R, ancora m,sarà maggiore di r,cioè che se R,minore di M,ancora r,sarà minore di m,& che se M, è minore di R,che ancora m sarà minore di r,cioè se R,è maggiore di M,ancora r, sarà mag. di m;Et che se M,è eguale ad R,ancora m,sarà eguale ad r,cioè che se R, è egu.ad M,cheancora r. sarà eguale ad m si viene ad hauer prouato che quello che auuiene ad R,moltipl.della C, r.rispetto ad M, moltip.della A. 2.in esserli minore,ò maggiore,ò eguale auuiene anco medesmamente ad r,moltip.della C terza rispeto ad m, moltip. della a, quarta,perilche (per la 6. difinitione delle quātità perpotionali)ne segue che dalla C, prima allla A. seconda sia come dalla C. terza alla a, quarta, Dalla istessa C. dunque à ciascuna delle due quantità A,& a, eguali è vna medesma perpotione,& anco da ciascuna delle due A,& a,eguali alla istessa C,e vna medesma proportione come si e mostrato, che e quanto occorreua prouare. Ancora doppo che si è mostrato, dalla A. alla C. essere come dalla a, alla C. intesa la C, come seconda, & quarta si poteua (per il Corollario della 4.propositione concludere, che per essere queste quattro quantità A,C, a, C, proportionali, ancora conuersamente elle siano propotionali,cioè che da C, ad A. sia come da C ad a, &perciò da vna quātità à due quantità eguali essere vna medesima, ò vogliamo dire eguali porpotioni.

Ancora nell'hauere intesa la C,due volte,ò nel paragonarla alle A,& a,eguali, ò nel paragonare dette A,& a,eguali ad essa C,si conosce che le quantità eguali paragonate à quantità eguali gli hanno eguali,ò vogliamo dire vna medesima proportione.

Propositione 8. Theorema 8.

SE due quantità ineguali siano paragonate ad vna istessa quantità,la maggiore di esse à quella hauerà maggior proportione,che l'altra; Ma quella conuersamente paragonata alle due quantità ineguali,alla minore d'esse hauerà proportione maggiore.

Siano le due quantità A B,maggiore,& C,minore paragonate alla quantità D, si dice la proportione di A B,maggiore alla D,essere maggiore,che la proportione di C,minore ad essa D.Et che conuersamente paragonata la quātità D,alle due ineguali A B,& C, che la proportione d'essa D,alla minore C,sarà maggiore,che la proportione d'essa alla A B,maggiore. Per dimostrarlo. Segnisi nella A,B,maggiore la parte A E,eguale alla C,minore,essendo E B,il restante; Et à ciascuna delle due E B,A E,piglinsi i moltiplici egualmente,ma in tale moltiplicità, che il moltiplice di E B,sia maggiore di D,ma che il moltiplice di A E,non sia minore della medesma D, ma gli sia(ò maggiore,ò eguale.)Ma per comodità in cambio di lettere diamo nome di numeri ad esse quantità,& anco le due quantità A B,maggiore,& C,minore paragonate ciascuna d'esse come antecedenti alla D,come consequente a ciascuna di loro,chiamaremo AB,prima C,teraa, & D,seconda,& anco quarta,secondo,che ci tornarà comodo,ò a proposito,chiamiamo dunque A B,prima maggiore 14.C,terza minore 12. Et D.seconda,& anco quarta 3;Per prouare hora che dalla prima 14.alla seconda 3.sia meggior proportione,che dalla C,solo 12.terza,alla istessa D,quarta 3. Dalla ptima 14.maggiore seghisi la parte A E, 12.eguale alla C 12.&sia il restante BE 2. Et alle tre quantità A E 12.E B,2.& C.12.piglinsi i moltiplici egualmente, ma tali che

cia-

A | D 3 | M
R 24 | 12 | E 14 | O | 27
S 4 | 2 B | 24 | N
r 24 | C 12 | D 3

ciaſcun d'eſſi ſuperi la D.3.& ſiano R, 24. alla A B, 12.S 4.alla E B 2,& r.24.alla C.12. Et perche R,24. è coſi moltiplice ad A E,12.come S 4. ad E B, 2. ne ſegue (per la prima propoſit.) che il compoſto di R. & S. cioè 28; ſia coſi moltiplice al compoſto di 12.& 2.cioè alla 14.A B, prima, come è il ſolo R, 24.al ſolo A E 12.& però come è la R 24.alla C. 12. (che ſono tolti i moltiplici egualmente alle A E, E B, & C.) cioè R S. 28. è coſi moltiplice alla A.B, 14. prima quantità, come r, 24. moltiplice alla C, 12. terza quantità (& ambidui A B, & C, antecedenti alla D, ſeconda, & quarta conſequenti.) Ancora alla D 3.ſi pigli vn moltiplice tale, che ſia maggiore della r.24.ma manco maggiore, che ſi può, cioè pigliſi alla D.il primo minor moltiplice, che ſia maggior della r. 24. (che hora ſarà il nonuplo 27.che l'ottuplo 24.non è maggiore di r.24.) & chiamaremolo M. N, 27.dal quale cauaſi la D, 3.& reſti O, 24.quale O, reſtante 24. perciò ſarà il moltiplice della D, proſſimo inferiore, o minore della M N 27, per il che eſſo O, non ſarà maggiore della r. 24. (perche la M N ſi è preſa moltiplice alla D, manco maggiore, che ſi puo della r, 24) ma gli ſarà minore, o eguale, cioè conuerſamente r 24 non ſarà minore di O, 24.& percio R.24.eguale ad r 24.) eſſendo eſſi egualmente moltiplici alle A E 12.& C.12.eguali) non ſarà minore di O. Ma S 4 è maggiore di D 3.ſara maggiore del compoſto di O,& D, ma il compoſto di R.& S.e R.S 28, & il compoſto di O.& D, è M N 27.per il che R.S.28.ſi conclude eſſere maggiore di M.N.27. del quale M N, è minore r 24, dalla conſtruttione (eſſendo preſo M N, moltiplice alla D, talmẽte che ſia maggiore in manco, che ſi puo della r 24.) onde ſappiamo, che R S e maggiore di M N. ma r, non è maggiore (anzi è minore) di M N, Et perche A S, & r, ſono moltiplici egualmẽte ad A B prima, & C terza antecedenti; Et M N, & M N ſono moltiplici egualmente alla D, & alla D ſeconda, & quarta conſequenti, & ſi è moſtrato, che R S moltiplice della prima, ſupera M N, moltiplice della ſeconda, & quarta conſequenti, & ſi è moſtrato, che R S, moltiplice della prima, ſupera M N, ſeconda, ma che r, moltiplice della terza non ſupera M N, moltiplice della quarta. perciò ne ſegue (per l'ottaua diffinitione) che la proportione della prima quantità A B, alla ſeconda D, ſi chiami maggiore della proportione, che è della terza C, alla quarta D, Onde delle due quantità A B, maggiore, & C minore paragonate ciaſcuna d'eſſe alla D, e chiaro la proportione di A B, maggiore alla D, eſſere maggior proportione, che di C, alla medeſma D.

Ancora ſtante le ſopradette coſe nel medeſimo loro eſſere, eſſendoſi prouato, che R S è maggiore di M N, ne ſegue conuerſamente, che M N, è minore di R S. Et eſſendoſi anco prouato, che r è minore della medeſima M N, ne ſegue conuerſamente, che M N è maggiore di r; Et pero M N, è maggiore di r, ma M N, non è maggiore di R S (anzi è minore di eſſa R S.) Hora inteſo D prima quantità C, ſeconda D, terza, & A B quarta.

Et alla prima, & terza B & D antecedenti preſi i moltiplici egualmente M N, & M N; Et ancora alla ſeconda, & quarta conſequenti C, & A B preſi i moltiplici egualmente r, & R S, perche ſi è prouato, che M N, moltiplice della prima D, ſupera r, moltiplice della ſeconda C, ma che M N, moltiplice della terza D, nõ ſupera R S moltiplice della quarta A B (anzi è ſuperato da eſſo R S), ne ſegue (per la 8. diffinitione) che la proportione di D, prima a C, ſecõda ſi chiami maggiore della proportione, che è da D terza, ad A B, quarta; cioe ne ſegue, che la proportione di B, alla C, minore delle due A B, & C, ſia maggiore della proportione della iſteſſa D, alla A B, maggiore, onde è chiaro quanto occorreua di moſtrare.

Propoſitione 9. Theorema 9.

LE quantità che ad vna iſteſſa hanno vna medeſma proportione ſono eguali fra loro; Et le quantità alle quali vna iſteſſa quantita hà vna medenſima proportione, fra loro.

Sia la proportione di A, alla C, & anco di B, alla iſteſſa C, vna medeſma, o vogliamo dire eguali ſi dice che eſſe due quantità A & B ſono eguali fra loro. Perche ineguali non poſſono eſſere, che ſe poteſſero eſſere ineguali l'vna di loro per l'aduerſario poniamo la A, ſaria maggiore, onde la proportione di eſſa A maggiore (per Aduerſario) alla C, ſaria anco (per la antecedente 8. propoſitione maggiore, che la proportione di B all'iſteſſa C, il che è contro al ſuppoſito, per il che non potendo eſſe-

A B
C

te ineguali esse A. & B. elle saranno eguali fra loro. Ancora se la istessa quantità C, habbi la proportione alla A. che ella ha anco alla B. pur si dice che le due A.& B. sono eguali fra loro: Perche se (per l'Aduersario) l'vna A, fusse maggiore dell'altra B. all'hora (per la antecedente ottaua propositione) la proportione di C, alla minore che saria B, saria maggiore, & non eguale, come si suppone alla proportione della istessa C, alla A. non possono dunque dette A.& B. essere ineguali, per il che conuiene che elle siano eguali, che è quello che si voleua mostrare.

Questa nona propositione è il conuerso della settima pigliando questa nona per supposito quello che nella settima si dimostra, & togliendo a dimostrare quello che in detta settima è preso per supposito, ò si suppone.

Propositione 10. *Theorema* 10.

DI due quantità paragonate ad vna istessa quantità quella che gli hà proportione maggiore, è quantità maggiore, & essendo paragonata vna istessa quantità à due altre, quella alla quale detta istessa hà maggior proportione, è la minore.

A	B
10	8
c. 4.	

Sia che delle due quantità A, & B. paragonate alla C, la A habbi maggior proportione ad essa C, di quello che ha la B, alla istessa C, si dice che la A, è anco maggiore della *B*. Perche se A. fusse (per l'Aduersario) eguale alla B. ancora per la settima propositione, la proportione di essa A, alla C, saria eguale alla proportione della *B*, alla istessa C, che è contro il supposito; Et se la A fusse minore della B, all'hora di necessità (per la ottaua propositione) ancora la proportione di essa A, alla C. saria minore che della *B*. alla istessa *C*. il che è pure contro il supposito, onde non potendo la A. essere ne eguale, ne minore della *B*, conuiene che ella sia maggiore di essa B, come si voleua mostrare. Ancora sia la proportione di C, alla B. maggiore che della istessa C, alla A. si dice la B. essere di necessità minore della A. Perche eguale essa B. non può essere alla A. poiche all'hora (per la settima propositione ancora la proportione di C, alla *B*. saria eguale alla proportione della istessa C, alla A. & non maggiore come si suppone. Nè meno può essere la *B*. maggiore della A. perche all'hora (per la ottaua propositione) la proportione di C, alla *B*. maggiore saria minore della proportione della istessa C, alla A. che è pure contro il supposito. Non può dunque la *B*. essere eguale, nè maggiore della A. però sarà minore d'essa A. come si voleua mostrare. E' anco chiaro che di due quantità A.& *B*. paragonate ad vna istessa *C*, quella che gli ha minor proportione, & sia *B*. è minor quantità che l'altra A. Perche eguale a detta A. non può essere, che all'hora esse *B*, & A. (per la settima propositione) alla C, haueriano vna istessa proportione (che è contro il supposito,) ne meno la *B*. può essere maggiore della A. perche all'hora (per la ottaua propositione) conuerria che da essa *B*. alla C. fusse maggior proportione che dalla A. alla medesima C. il che è pure contro il supposito, non potendo dunque *B*. essere eguale, ne maggiore di A. ella sarà minore d'essa A. come si voleua mostrare. Et cosi anco quando alcuna quantità paragonata a due quantità ad vna d'esse ha minor proportione questa vna è maggiore dell'altra: Che se *C*. paragonata ad A.& *B*. alla A. habbi minor proportione, che alla *B*. la A, sarà maggiore della B. Perche non può la A, essere eguale alla *B*, che all'hora essendo la *C*. paragonata ad esse ella (per la settima propositione) gli haueria vna medesima proportione, che è contro il supposito, ne meno può la A, essere minore della *B*. cioè la *B* maggiore della A. perche all'hora ad esse paragonata la *C*. maggior proportione hauerebbe alla minore A, (per la ottaua propositione,) che alla B. che è pure contro il supposito, volendo noi che la proportione di C, alla A, sia minore, & non maggiore di quella che è da C, alla *B*. non potrà dunque la A, essere eguale ne minore della *B*. quando vna istessa C. alla A. habbi minor proportione che alla B. sarà dunque essa A. maggiore della B. come si voleua mostrare.

Questa decima propositione è il conuerso della ottaua.

Propositione 11. *Theorema* 11.

QVelle proportioni, che sono eguali ad vna istessa proportione sono eguali fra loro.

Sia la proportione della A. prima, alla *B*. seconda, & anco della C. terza, alla D. quarta eguale alla proportione che è dalla M. quinta alla N. sesta, si dice che le due proportioni, cioè della A. prima, alla *B*. seconda, & della C. terza alla D. quarta saranno eguali fra loro. Per dimostrar-

lo. Alle tre antecedenti prima,terza,& quinta si tolghino i moltiplici egualmente a beneplacito, & siano a, e, m. Et anco alli tre consequenti seconda, quarta, & sesta, si tolghino i moltiplici egualmente,& siano b d n,& perche la proportione della prima A.alla seconda B.è dal supposito,come da M.ad N.& alle A.& M.antecedenti sono a,& m,egualmente moltiplici, & anco alle B.& N.consequenti sono b,& n,egualmente moltiplici, ne segue (per il conuerso della sesta diffinitione) che quello che auuiene ad a, moltiplice della prima, rispetto à b, moltiplice della seconda in esserli eguale, ò maggiore,ò minore, auuenga anco ad m, moltiplice di M.rispetto ad n,moltiplice di N.Et per la medesma causa, perche delle quattro quantità proportionali C,D,M,N. alli dui antecedenti C.& M. sono e,& m, egualmente moltiplici,& anco alli dui consequenti D.& N.sono d,& n,egualmente moltiplici,ne segue che quello che auuiene al moltiplice e, rispetto al moltiplice d, in esserli eguale, ò maggiore, ò minore, auuiene anco al moltiplice m, rispetto al moltiplice n, ma ancora a quello che auuiene al moltiplice m, rispetto al moltiplice n, si è prouato auuenire al moltiplice a,rispetto al moltiplice b.però a quello che auuiene ad m,rispetto ad n,cosi auuiene ad a,rispetto al b; come anco al e, rispetto al d. Onde quando a, sia eguale,ò maggiore,ò minore di b, ancora e, sarà eguale, ò maggiore, ò minore di d. Perilche delle quattro quantità A. prima, B.seconda, C,terza, & D.quarta alli antecedenti A.& C. delle quali li a.& e. sono egualmente moltiplici a beneplacito, & anco alli consequenti B.& D.sono li b & d. egualmente moltiplici come si voglino; prouandosi che quello che auuiene al moltiplice della prima A. rispetto al moltiplice della seconda B. auuiene anco sempre di necessità al moltiplice della terza C, rispetto al moltiplice della quarta D.ne segue, per la sesta diffinitione,che dalla prima A. alla seconda B.sia la medesma proportione quale è dalla terza C,alla quarta D che è quello che si voleua prouare.

a 30.	e 18	m 24
A 15	C 9	M 12
B 10	D 6	N 8
b 30	d 18	n 24

Propositione 12. Theorema 12.

SE quante quantità si voglino siano proportionali, cosi come è vno delli antecedenti al suo consequente, cosi sarà il composto, ò somma di tutti li antecedenti al composto,ò somma di tutti li consequenti.

Siano quante quantità si voglino proportionali, poniamo la prima 15. a la sua consequente 5, come la seconda rad.45. alla sua consequente rad.5. & come la terza 12. cose, alla sua consequente quattro cose,& anco come la quarta 21.p̃ rad.54. al suo consequente 7 p̃ rad.6. Si dice,

a — b — c — d — M —

prima 15. | seconda rad.45. | terza 12 cose | quarta 21.p̃ rad.54. | somma A 5 p̃ rad. 45 p̃ 12.cose p̃ 21.p̃ rad.54.

n

5 | rad. 5 | 4.cose | 7.p̃ rad.6 | somma C 5.p̃ rad.5. p̃ 4.cose p̃ 7 p̃ rad.6.

A — B — C — D — n —

che la somma A.di tutti li antecedenti alla somma C.di tutti i consequenti, sarà come da vn solo antecedente ad vn solo consequente, Per dimostrarlo, Piglisi alli quattro antecedenti li quattro moltiplici egualmente come si voglino a,b,c,d,& sia M.la somma di tutti essi moltiplici, che perciò (per la prima propositione) si come è moltiplice l'vno d'essi a,b,c,d, al'vno delli antecedenti. ò quantità prima, seconda, terza, & quarta, cosi anco sarà moltiplice la somma M. delli quattro moltiplici,alla somma A.delle dette quattro quantità,ò antecedenti. Ancora si piglino alli quattro consequenti i moltiplici egualmente come si voglino A, B, C, D, & sia n, la somma di tutti essi moltiplici, che perciò (per la prima propositione) si come è moltiplice l'vno d'essi al suo consequente, cosi anco sarà moltiplice la somma n, delli quattro moltiplici, alla somma C, delle quattro quantità consequenti. Hora perche li quattro antecedenti, alli quattro consequenti

quenti hanno vna istessa proportione, & alli antecedenti sono presi li quattro moltiplici egualmente, & anco alli quattro consequenti sono presi i moltiplici egualmente ne segue, per il conuerso della sesta diffinitione, che se il moltiplice dell'vno antecedente sia eguale al moltiplice del suo consequente, ancora il moltiplice di ciascuno delli altri antecedenti sarà eguale al moltiplice di ciascuno delli altri suoi consequenti, & perciò la somma M. di tutti i moltiplici delli antecedenti, similmente sarà eguale alla somma n, di tutti i moltiplici delli consequenti, perche se a cose eguali si giongono di mano in mano cose eguali, i resultanti, o somme sono anch'esse di mano in mano eguali. Ma se il moltiplice dell'vno delli antecedenti sia maggiore del moltiplice del suo consequente, ancora il moltiplice di ciascuno delli altri antecedenti sarà maggiore del moltiplice di ciascuno delli altri suoi consequenti, & perciò la somma M. di tutti i moltiplici delli antecedenti sarà similmente maggiore della somma n, di tutti i moltiplici delli consequenti. (Che se 12. è maggiore di 8. & 15. e maggiore di 10. ancora 12. & 15. cioè 27. sarà maggiore di 8. & 10. cioè di 18. & così seguendo, se a quantità grande, ò maggiore, si andarà giongendo quantità grande, ò maggiore, la somma sarà più grande, ò maggiore, che se a quantità piccola, ò minore si andarà giongendo quantità piccosa, o minore.) Et se il moltiplice dell'vno delli antecedenti sia minore del moltiplice del suo consequente, ancora il moltiplice di ciascuno delli altri antecedenti sarà minore del moltiplice di ciascuno delli altri suoi consequenti, & perciò la somma M. di tutti i moltiplici delli antecedenti, sarà similmente minore della somma, n, di tutti i moltiplici delli consequenti, (che se a quantità piccole, o minori si andaranno giungendo quantità piccole, o minori, la somma sarà più piccola, o minore, che se a quantità grandi, o maggiori si andaranno giongendo quantità grandi, o maggiori.) Prouato dunque che quello che auuiene ad a, moltiplice del primo antecedente rispetto ad A. moltiplice del suo primo consequente r. in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene ancor sempre ad M. moltiplice della somma A. di tutti li antecedenti, rispetto ad n, moltiplice della somma C, di tutti li consequenti, in esserli similmente per ordine eguale, o maggiore, o minore, ne segue, per la sesta diffinitione, che le quattro quantità u, primo antecedente, r. primo consequente, A. somma di tutti li antecedenti, & C. somma di tutti li consequenti siano quattro quantità proportionali, cioè, che alla proportione di u, ad r. o vogliamo dire d'vno delli antecedenti al suo consequente sia eguale la proportione di A. somma delli antecedenti ad n, somma delli consequenti, che è quāto si voleua mostrare.

Propositione 13. Theorema 13.

SE la prima quantità alla seconda habbi la medesima proportione, che la terza C alla quarta, ma che la terza alla quarta habbi maggior proportione, che la quinta alla sesta, ancora la prima alla seconda hauerà maggior proportione, che la quinta alla sesta.

Sia dalla prima quantità A. alla seconda B. la medesima proportione che è dalla terza C alla quarta D. ma questa della C, alla D. sia maggiore che la proportione quale è dalla quinta E. alla sesta F. si dice che ancora dalla A, alla B. sarà maggior proportione che dalla E, alla F. secondo che diffinisce la ottaua diffinitione, cioè che tolti i moltiplici egualmente alla prima, & quinta antecedenti, & anco alla seconda, & sesta consequenti, potrà auuenire che il moltiplice della prima A. antecedente superi il moltiplice della seconda B. suo consequente, ma che all'hora il moltiplice della quinta E, antecedente non superi il moltiplice della sesta F suo consequente. Per dimostrarlo, Alli tre antecedenti A, C, E, si piglino i moltiplici egualmente come si vogliono G, H, I, & anco alli tre consequenti B, D, F, si piglino i moltiplici egualmente come si voglino g, h, i. Hora essendo dalla prima A. alla seconda B. come dalla terza C, alla quarta D. ne segue (per la sesta diffinitione) che se G. moltiplice della prima, eccederà g moltiplice della seconda, che ancora di necessità H, moltiplice della terza, eccederà h. moltiplice della quarta. Ma perche dalla terza C, alla quarta D. è maggior proportione che dalla quinta E, alla sesta F, ne segue (per il conuerso della ottaua diffinitione) che se l'H, moltiplice della C, eccede l'h, moltiplice della D. non è necessa-

		prima		seconda		
G	45	A	15	B	10	g 40
		terza		quarta		
H	36	C	12	D	8	h 32
		quinta		sesta		
I	18	E	6	F	5	i 20

necessario che l'I, moltiplice della D, eccceda l'i, moltiplice della F. ma perche quando H, eccede h, è ben necessario che G. ecceda g. (come s'è detto) ne segue che quando G. moltiplice della prima A. eccede g. moltiplice della seconda B. non e necessario che I, moltiplice della quinta E. ecceda i, moltiplice della sesta F, ma se bene G. sia maggiore di g. puo essere I, eguale, & anco minore d'i; perilche (per la ottaua diffinitione) maggior proportione e da A. prima, alla B. seconda, che dalla E. quinta, alla F. sesta, che e quanto si voleua mostrare.

Propositione 14. Theorema 14.

SE la prima quantità alla seconda habbi la istessa proportione, che ha la terza alla quarta, ma che la prima quantità sia maggiore della terza, ancora la seconda quantità sarà maggiore della quarta, & se la prima quantità sia eguale alla terza, ancora la seconda sarà eguale alla quarta, & se la prima quantita sia minore della terza ancora la seconda sarà minore della quarta.

Sia A. prima alla B. seconda, come C, terza alla D. quarta. Et sia A, prima antecedente maggiore di B. seconda suo consequente, si dice che ancora C, terza antecedente, sarà maggiore di D. quarta suo consequente (& se A. fusse eguale, o minore di B. ancora similmente C, saria eguale, o minore di D.) Per dimostrarlo diremo. Perche A. prima 30. è maggiore di C. terza 18. paragonando ciascuna di loro alla B. quella che è maggiore, cioe la A, (per la ottaua propositione) ad essa B. gli hauerà maggior proportione di quella, che gli habbi la minore, cioe la C, onde sappiamo la A, alla B. hauer maggior proportione, che la C. alla istessa B. ma come è da A. alla B. cosi è dalla C. alla D. perilche ancora dalla C. alla D. sarà maggior proportione che dalla istessa C. alla B. ma quando vna quantità è paragonata a due diuerse quella al a quale ha maggior proportione è minore (per la decima propositione) onde perche la C, paragonata alle due B. & D. ha maggior proportione alla D. ne segue che essa D. sia minore dell'altra B. è dunque chiaro che se A. prima è maggiore di B. seconda, ancora C. terza sarà maggiore di D. quarta. Ma quando A. prima fusse vguale alla C. terza, ancora B. seconda, saria eguale alla D. quarta. Perche essendo A. & B. eguali, paragonate ciascuna di loro alla B. elle gli haueriano vna medesima proportione, cioe come da A. a B. cosi saria C, a B. ma come è da A, a B. cosi è anco dal supposito da C, a D, però ancora da C, a D. saria come da C, a B. cioe la C. paragonata alle due B. & D. hauerìa tal proportione all'vna come all'altra; perilche (per la nona propositione) esse due quantità B. & D. sariano eguali fra loro, onde è chiaro che quando A. antecedente prima è eguale a C, antecedente terza, ancora B. consequente seconda, sarà eguale a D. consequente quarta. Et se A, prima, sia minore di C, terza, ancora B. seconda sarà minore di D. quarta. Perche paragonate A, & C, alla B. la A, che è minore gli hauerà minor proportione, o vogliamo dire la C. che è maggiore gli hauerà (per la nona propositione) maggior proportione, cioe da C, a B. sarà maggior proportione che da A, a B. ma come da A, a B. cosi è da C, a D. perilche ancora da C, a B sarà maggior proportione che di C, a D. onde paragonata C, alle due quantità B, & D. vediamo che essa C, alla B. ha proportione maggiore, che alla D. onde (per la decima propositione) la B alla quale essa C. ha proportione maggiore, è minore quantità che la D. perilche è anco chiaro che quando l'vno antecedente A. è minore dell'altro antecedente C. ancora l'vn consequente B. è minore dell'altro consequente D. Si è dunque mostrato, che di quattro quantità proportionali A, B, C, D. quando la prima A. sia maggiore, o eguale, o minore della terza C. che ancora similmente la seconda B. sarà maggiore, o eguale, o minore alla quarta D. che è quanto si è proposto.

A	30	C	18
B	20	D	12

Propositione 15. Theorema 15.

SE ad alcune quantità siano tolti i moltiplici egualmente, la proportione d'essi moltiplici fra loro, & la proportione d'esse quantita fra loro sarà vna medesima.

Siano alle due quantità A, & a, tolti i moltiplici egualmente M, N. m, n, si dice, che la proportione, che ha la quantità A. alla a. la istessa hauerà ancora M, N. moltiplice della A. alla m, n, moltiplice

12	M			
3	R	3		
3	T		A	
3	V			
3	N			
4	m	4		
4	r		a	
4	t			
4	u			
16	n			

moltipliee della a; Perche essendo M,N. moltiplice della A. & la m,n,nel medesmo modo moltipliee della a, essa M,N. si potrà diuidere in tante parti eguali ciascuna d'esse alla A. in quante parti si diuida la m n.ciascuna d'esse eguali alla a. Onde dalla prima parte di M,N,alla prima parte di m,n, che è come da A, ad a, sarà come dalla seconda parte di M,N, alla seconda parte di m, n, che è pure come da A.ad a. & cosi per la medesma causa dalla terza parte di M,N,alla terza parte di m,n.(se ve ne saranno tante) sarà come dalla seconda parte alla seconda parte, & come dalla prima parte alla prima parte,& essendoui più parti in dette M.N.m.n. da ciascuna parte della M,N. a ciascuna parte a lei corrispondente di m,n. sarà come dalla prima parte alla prima parte, & dalla seconda alla seconda, & cosi dell'altre, essendo sempre dall'vna all'altra, come da A. ad a. Onde essendo tanti antecedenti in M, N, quanti conseguenti in m, n. & essendo da ciascuno antecedente a ciascuno conseguente vna medesma proportione, ne segue (per la duodecima propositione) che la somma di tutti li antecedenti che è la M,N,alla somma di tutti i conseguenti che è la m,n,habbi tal proportione, quale ha vn solo antecedente ad vn solo conseguente,& però qual ha la A,alla a. tal proportione è dunque da M, N, moltipliee di A. ad m, n, moltiplice di a. quale è dalla A, alla a. che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 16. Theorema 16.

SE quattro quantità siano proportionali ancora permutatamente saranno proportionali.

Sia dall'antecedente A.prima quantità al conseguente B, seconda, come dall'antecedente C, terza, al conseguente D.quarta, si dice che anco permutatamente dall'antecedente A.prima, all'antecedente C.terza,sarà come dal conseguente B,seconda, al conseguente D.quarta. Per dimostrarlo. Alle due prime quantità A.antecedente,& B.suo conseguente si piglino i moltiplici egualmente come si voglino G, & H. che cosi (per la antecedente quintadecima propositione) da G.ad H. sarà come da A.a B. Ancora alle due vltime quantità C.antecedente,& D.suo conseguente si piglino i moltiplici egualmente come si voghno L, & M. che cosi (per la antecedente 15.propositione) sarà similmente da L.ad M.come da C,a D. onde (per la 11.propositione) da L,ad M. & da G,ad H. sarà vna istessa proportione,o vogliamo dire eguale proportione, cioè da G.prima quantità ad H.seconda, sarà come da L,terza ad M,quarta, per il che (per la 14. di questo) se G.prima sia eguale, o maggiore,o minore di H. seconda, anco a similmente L.terza, sarà pure eguale, o maggiore, o minore di M quarta, cioè quello che auuiene a G rispetto ad H.in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene anco ad L, rispetto ad M. in esserli similmente eguale,o maggiore,o minore. Hora intese essere le quattro quantità A.prima, C seconda,B.terza,& D.quarta. Et hauendo tolti i moltiplici egualmente come si voglino alla prima A,& terza B.& anco i moltiplici egualmente come si voglino alla seconda C, & quarta D. essendosi prouato che quello che auuiene a G. moltipliee di A.prima, rispetto ad L. moltiplice di C.seconda in esserli eguale, o maggiore,o minore,auuiene anco ad H.moltiplice di B.terza, rispetto ad M. moltiplice di D.quarta,in esserli similmente eguale,o maggiore,o minore,ne segue (per la sesta diffinitione) che da A prima, a C.seconda, sia come da B.terza,a D.quarta, e cioè che intese hora le quattro quantità proportionali come prima si posero,A.antecedente,B suo conseguente,& anco C.antecedente & D.suo conseguente; ne segue che permutatamente ancora la proportione dell'antecedente A.all'antecedente C.sia come dal conseguente B.al conseguente D. che è quanto si era proposto di mostrare. Auuertendo che si viene a supponere che le quattro quantità prese siano d'vn medesmo genere,acciò si possa anco paragonare l'vno antecedente all'altro antecedente,& cosi l'vno conseguente all'altro conseguente. Che se dicendo da A.a B.d'vn genere poniamo di linee, essere come da C,a D. d'vn'altro genere poniamo di superficie, cioe dalla li-

G —— L
A 12 —— 8 C
B 9 —— 6 D
H —— M

nea A.alla linea B.essere come dalla superficie C.alla superficie D. Douendosi pigliare i molti plici egualmente alla prima A.& terza C.antecedenti,che siano G.& H.& pero G.linea,& H.superficie, non si potria dire, che G.linea fusse maggiore,o minore,o eguale ad H. superficie, perche fra la linea, & la superficie non è proportione, o conuenienza, & il medesmo auuerria nelle L,& M.moltiplici di C,& D.consequenti di diuersi generi.

Propositione 17.Theorema 17.

SE quattro quantità congiuntamente siano proportionali,elle ancora disgiuntamente saranno proportionali.

Sia da a r.14.ad r.6.come da A R 21.ad R 9.si dice che da a,8.in che a r.14.supera r,6. ad essa r.6.sarà come da A,12.in che A R,21.supera R.9.ad essa R.9. o vogliamo dire, sia dal composto di 8.a.& 6.r.cioè da 14,a r.a 6.r. (che si può dire sia dalla somma di 8.a,antecedente, & 6.r.consequente al 6.r. consequente) come dal composto di 12.A.& 9.R, cioè da 21.A,R, a 9.R. (che si può dire dalla somma di 12.A.antecedente,& 9.R,consequente a 9.R consequente) si dice che ancora disgiuntamente dal solo 8.a, antecedente al 6.r. consequente, sarà come dal solo A 12. antecedente al 9.R.consequente. Per dimostrarlo. Ad essi a,8.r,6.A,12.R,9.si piglino i moltiplici egualmente come si voglino m,24.n,18. M,36 N,27. che (per la prima propositione) cosi moltiplice sarà tutto m,n,42.a tutto a,r,14. come è il solo m,24 al solo a,8. & similmente (per la istessa prima propositione) cosi moltiplice sara tutto M,N,63. a tutto A,R, 21. come è il solo M,36. al solo A,12. Et perciò come è il solo m,24. al solo a,8. & perciò anco come è il totale m,n,42. al totale a,r,14. cioe cosi sara moltiplice M,N,63. ad A,R,21. come è m,n,42. ad a,r,14. Ancora alli r,6. & R,9.consequenti, si piglino i moltiplici egualmente come si voglino, & siano u,30.& V,45.&,seruendoci della seconda propositione,diremo. Perche n,18.prima,è cosi moltiplice ad r,6.seconda,come N,27.terza,ad R,8.quarta,& ancora cosi è moltiplice u,30.quinta, ad r,6. seconda, come V,45, sesta, ad R,9. quarta , ne segue che il composto di n, & u, prima, & quinta,cioe 48.sia cosi moltiplice alla seconda r,6. come è il composto di N,& V,terza,& sesta, cioe 72.alla quarta R,9.Hora iotesa prima a,r,14.seconda r.6.terza A,R,21.& quarta R 9.perche alla prima 14.& terza 21. si è mostrato essere egualmente moltiplici m,n,42. & M.N,63. & ancora alla seconda r,6. & alla quarta R,9. essere egualmente moltiplici n,u,48. & N,V,72. Essendo dal supposito esse quattro quantita prima,seconda,terza,& quarta proportionali (dicendosi da a,r,14. ad r,6. essere come da A,R,21.ad R,9.) ne segue,per il conuerso della sesta diffinitione,che quello che auuiene ad m,n,42.moltiplice della prima 14.rispetto ad n,u,48. moltiplice della seconda r,6.in esserli eguale,o maggiore,o minore,auuenga anco ad M,N,63.moltiplice della terza A,N,21. rispetto ad N,V, 72. moltiplice della quarta R,9. in esserli similmente eguale , o maggiore , o minore. Quando mo m,n,sia eguale ad n,u,leuato comunemente la n, la sola m,restera eguale alla sola u; Ma all'hora, che m,n, sia eguale ad n,u,ancora m,n,sara eguale ad N,V. onde leuatane comunemente la N, restara la sola M. eguale alla sola V. cioe quando m,sia eguale ad u, ancora M. sara eguale ad V. & quando m,n, sia maggiore di n, u, leuata da ciascuna d'esse la comune n,ancora la sola m,(della maggiore m,n.)sara maggiore della sola u, ma all'hora,che m,n,sia maggiore di n,u,ancora M,N, sara maggiore di N,V, onde leuata da ciascuna d'esse la comune N,restara la sola M.della maggiore M.N.maggiore della sola V.cioe quando m,sia maggiore di u. ancora M,sara maggiore di V.& quando m,n, fusse minore di n,u, leuata da ciascuna d'esse la comune n,ancora la sola m.della minore m.n. sara minore della sola u. Ma all'hora,che m,n, sia minore di n,u, ancora M,N, sara minore di N,V. perilche leuato da

24 m | 42 | 18 n | 48 u | 30

14 | a 8 | r 6

21 | A 12 | R 9

M 36 | 63 | N 27 | 72 | V 45

ciascuna

ciascuna d'esse la comune N, restarà la sola M. della minore M, N. minore della sola V. cioe quando m. sia minore di u; ancora M, sarà minore di V. & così si è mostrato che quello che auuiene ad m, rispetto ad u, in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene anco ad M, rispetto ad V. in esserli similmente eguale, o maggiore, o minore. Hora inteso à 8. prima quantità r. 6. seconda, A. 12. terza, & R. 9. quarta, & m. & M. essere moltiplici egualmente tolti alla prima, a. & terza A. & ancora u. & V. essere moltiplici egualmente tolti alla seconda r. & quarta R. & esserli prouato che quello che auuiene al m, moltiplice della prima a. rispetto ad u, moltiplice della seconda r. in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene anco similmente ad M. moltiplice della terza A. rispetto ad V. moltiplice della quarta R. in esserli, come s'è detto, eguale, o maggiore, ò minore, ne segue, per la sesta diffinitione, che la proportione della prima a 8. alla seconda r 6. sia eguale alla proportione della terza A, 12. alla quarta R, 9. o vogliamo dire, ne segue che esse quattro quantità siano proportionali, è dunque la proportione di a, ad r. come di A, ad R. cioe dal solo antecedente 8. al solo consequente 6. è come dal solo antecedente 12. al solo consequente 9 cioe le quattro quantità a, r, r. A, R, R quali congiuntamente sono proportionali, sono disgiuntamente ancora proportionali, che è quanto si volea mostrare. Di qui si può facilmente dimostrare il modo d'argumentare, che si suol chiamare Diuisione conuersa delle proportioni; & è che se da a, r, 14. composto di a, & r. ad r, 6, sia come da A, R, 21. composto di A, & R ad R, 9. Ancora da r, 6. ad a, 8. sarà come da R, 9. ad A. 12. Perche essendo a 8. ad r. 6. come A, R, 12. ad R 9. perilche conuertendo, o vogliamo dire conuersamente da r, 6. ad a, 8. sarà come da R, 9. ad A, 12. cioe dal consequente all'eccesso in che egli è superato dal suo antecedente è la medesma proportione che è dall'altro consequente all'eccesso in che egli è superato dal suo antecedente.

Si può anco dimostrare il modo d'argomentare che si suol chiamare Diuisione contraria delle proportioni. Et e che se da a, 8. ad a, r, 14. composto di a, & r. sia come da A, 12. ad A R, 21. composto di A, & R. ancora dal solo r, 6. ad a, 8. sarà come dal solo R, 9. ad A, 12. Perche essendo da a, 8. ad a, r, 14. come da A, 12. ad A, R, 21. sarà conuersamente da a, r, 14. ad a, 8. come da A, R, 21. ad A, 12. & diuidendo, o disgiuntamente sarà dal solo r, 6. ad a, 8. come dal solo R, 9. ad A, 12. cioe dall'eccesso in che il consequente supera l'antecedente, ad esso antecedente e la medesma proportione, che e dall'altro eccesso in che l'altro consequente supera il suo antecedente, ad esso suo antecedente.

Propositione 18. Theorema 18.

SE quattro quantità siano proportionali elle ancora congiuntamente saranno proportionali.

Sia dalla prima quantità a 8. antecedente, alla seconda r 6. suo consequente, come dalla terza A 12. antecedente, alla quarta R 9. suo consequente: si dice che ancora congiuntamente da a, r. 14. composto dell'antecedente a. & suo consequente r. ad r, 6. consequente, sarà come da A R, 21. composto dall'antecedente A. & suo consequente R. ad R, 9. consequente. Per dimostrarlo. Se per l'Aduersario non fusse a r. 14. ad r. 6. come da A, R. 21. ad R, 9. hauerebbe A. R, 21. a qualche altra quantità, o maggiore, o minore della R, 9. la medesma proportione che ha a, r, 14. ad r, 6.

a 8 — 14 — r 6
A 12 — 21 — R 9
11 — 5 — 10 T
A — R

Hor sia che fusse possibile ella hauerla ad S, T, 10. maggiore di R, 9, (che essendo S, T, 10. maggiore di R, 9 la restante A, S 11. sarà minore di A, 12.) cioe che da A, R. o vogliamo dire A, T. 21. ad S, T. 10. fusse come da a. r. 14. ad r. 6. Perche dunque come da a, r. 14. ad r. 6 così è da A, R. 21. ad S. T. 10. sarà diuidendo, o disgiungendo, cioe disgiuntamente come è da a, 8. ad r. 6. così da A, S. 11. ad S. T cioe ad S, R. 10 ma come è a, 8 ad r, 6. così, dal supposito, è A, 12. ad R. 9. adunque ancora come è da A, S. 11 prima, ad S, T. 10. seconda, così sarà A. 12. terza, ad R 9. quarta. (onde conuersamente come da S, T. 10. prima ad A. S. 11. seconda così sarà R, 9. terza ad A, 12. quarta.) ma A, S. 11. prima è minore di A, 12. terza, però ancora (per la 14. propositione) S, T. 10. seconda sarà minore di R, 9. quarta, il che è impossibile essendosi posta per l'aduersario S, T. maggiore di R. impossibile dunque è anco che A, R. 21. ad alcuna quantità maggiore di R, 9. habbi la istessa proportione

che ha a,r.14 ad r.6. Ne meno essa A,R.21. ad alcuna quantità minore di R.9. potrà hauere la proportione che ha a,r.14. ad r.6. che se per l'aduersario la potesse hauere ad S,V.5. minore di R,9. (che così essendo di A,S,V. o vogliamo dire di A,R.21. la parte S,V.5. minore della parte R,9. il restante A.S 16. resteria poi maggiore del restante A,12.) all'hora perche da a,r.14. ad r.6. saria per l'aduersario come da A,R. o vogliamo dire A,V.21. ad S,V.5. ne seguiria, che diuidendo, o disgiuntamente ancora come da a,8. ad r, 6. così fusse A,S.16. ad S,V.5. ma come da a,8. ad r,6. così è anco dal supposito da A.12. ad R 9. però come da A,S.16. ad S,V.5. così saria A,12. ad R 9. onde A,S.16. S,V.5. A,12. & R,9. sariano quattro quantità proportionali, ma la prima A,S.16. è maggiore, come si è veduto, di A.12. terza, però ancora S,V.5. seconda deueria essere maggiore di R,9. quarta. Ma essa S,V.5. è per l'aduersario minore di R 9 per ilche è impossibile che essa possa essere anco maggiore della istessa R 9. che all'hora essa S,V. saria, & minore & maggiore della R. ilche è impossibile; però impossibile è anco quello che a questa impossibilità ci condurria, cioè è impossibile che la A,R.21. ad alcuna quantità minore di R,9. habbi la istessa proportione che ha a,r.14. ad r.6. ne meno può hauerla ad alcuna quantità maggiore di R.9. come si è mostrato, però la hauerà ad essa R,9 precise come si voleua prouare, se dunque quattro quantità siano disgiuntamente proportionali le istesse congiuntamente ancora saranno proportionali.

8 a | 21 | 6 r | 21 | 12 A | 16 | 9 R | 5 | 5 V | A | R

Si potrà hora facilmente dimostrare il modo d'argumentare che si suol chiamare conuersa compositione delle proportioni, & e che essendo da a 8 ad r.6 come da A.12. ad R.9. si dice che per la conuersa compositione delle proportioni, ancora sarà da a,r.14. ad a 8. come da A,R.21. ad A 12. Perche essendo da a 8. ad r 6. come da A 12. ad R 9. sarà conuersamente come da r 6. ad a 8. così R 9. ad A 12. & perciò componendo come da tutto r a.14. al solo a 8. consequente, così sarà da tutto R A 21. al solo consequente A 12. che si può dire intenderli che quando dalla prima, o antecedente a,8. alla seconda, o consequente r,6. è come dalla terza, o antecedente A, 12. alla quarta, o consequente R.9. Ancora per la conuersa compositione delle proportioni, dal composto della prima a, & seconda r. cioe da 14. alla sola prima a.8. sarà come dal composto della terza A. & quarta R. cioe da 21. alla sola terza A.12. cioe che dalla somma dell'antecedente, & consequente al solo antecedente, sarà come dalla somma dell'antecedente, & consequente al solo antecedente.

Ancora si può dimostrare il modo che si chiama contraria compositione di proportioni, & è che essendo da a.8. ad r.6. come da A,12. ad R,9. si dice che per la contraria compositione delle proportioni ancora da a,8. al composito a,r.14 di a, & r sarà come da A,12. al composto A,R, 21. di A. & R. Perche essendo da a.8. ad r.6. come da A.12. ad R.9. sarà conuertendo, o conuersamente, da r,6. ad a,8. come da R.9. ad A.12. & componendo (o vogliamo dire congiuntamente) sarà ancora dalla totale a,r.14. alla detta a.8. come dalla totale A,R.21. alla A.12. & di nuouo conuertendo, o conuersamente sarà dalla a.8. alla totale a,r.14. come dalla A.12. alla totale A, R,21. Onde quando dall'antecedente a.8. al consequente r.6. sia come dall'antecedente A.12. al consequente R.9. ancora per la contraria compositione delle proportioni sarà dall'antecedente a.8. al composto a,r.14. dell'antecedente, & consequente, come dall'antecedente A.12. al composto A,R.21. dell'antecedente, & consequente, o vogliamo dire quando dalla prima quantità alla seconda, è come dalla terza alla quarta; ancora per la contraria compositione delle proportioni sarà dalla prima, al composto della prima, & seconda, come dalla terza, al composto della terza, & quarta.

Propositione 19. Theorema 19.

SE in dui tutti siano segnate due parti, & che dal tutto al tutto sia la proportione, che è dalla parte alla parte, ancora dal restante al restante sarà la proportione, che è dal tutto al tutto.

Sia la A,R.24. alla a,r.16. come la parte A.9. alla parte a.6. si dice che anco il restante R.15. al restante r.10. sarà come è dal tutto A,R.24. al tutto a,r. 16. Perche essendo da 24. prima a 16. seconda, come è da 9. terza a 6. quarta, ancora permutatamente sarà dall'antecedente 24.

	A	9	a	6
24				16
	R	15	r	10

all'antecedente 9. come è dal consequente 16. al consequente 6. cioe dalla totale A,R.24. alla A.9. farà come dalla totale a.r.16.alla a.6. perilche dividendo, o disgiuntamente farà da R. 15. ad A.9. come da r.10.ad a.6. Onde permutatamente da R. 15.ad r.10.farà come da A.9.ad a.6.ma come da A.9.ad a.6. cosi è dal supposito tutto A,R.24. a tutto a,r.16. però ancora dal residuo R. 15. al residuo r.10.farà come dal tutto A,R.24.al tutto a,r.16.che è quanto si voleua prouare.

Corollario.

Di qui si manifesta il modo d'argumentare nella proportionalità euersa diffinita nella 16.diffinitione, che è quando si fa paragone dall'antecedente a quello in che egli supera il suo consequente,che essendo da A,R.24.antecedente ad A.9.consequente,come da a,r. 16. antecedente ad a.6. consequente, ancora euersamente dal detto A,R.24. antecedente ad R.15. (in che egli supera il suo consequente) farà ancora da a,r.16. antecedente ad r.10. in che egli supera il suo consequente.Perche essendo da tutto A,R.24.alla sua prima parte A.9.come da tutto a,r.16.alla sua prima parte a.6.farà ancora permutatamente dal tutto A,R.24.al tutto a,r.16.come dalla parte A.9.alla parte a.6,perilche (per la superiore 19.propositione) ancora come è dal tutto A,R.24.al tutto a,r.16. cosi farà il restante,o eccesso R 15. al restante,o eccesso r.10. Onde essendo da A,R.ad a,r.come da R. ad r.ancora permutatamente da A,R.ad R.farà come da a,r. ad r. cioe dall'antecedente a quello in che egli eccede il suo consequente in l'vna, è come dall'antecedente a quello in che egli eccede il suo consequente nell'altra. Ma accioche cosi si concluda dette quantità essere euersamente proportionali seruendoci cioè della proportionalità permutata,conuiene che tutte esse quantità siano d'vn'istesso genere,perche quando l'vno antecedente fusse d'vn genere, & l'altro antecedente d'vn'altro genere non si potria permutando paragonare l'vno antecedente all'altro. Si può nondimeno quando essi dui antecedenti fussero di diuersi generi dimostrare le quantità essere pure ancora euersamente proportionali dicendo. Perche da A R,24.ad A.9.è come da a.r.16. ad a.6. farà ancora disgiuntamente da R.15.ad A.9.come da r.10 ad a.6 perilche conuersamente da A.9.ad R.15. farà come da a.6.ad r.10. & perciò congiuntamente da tutta A,R. 24. alla detta R.15. come da tutta a,r.16. alla r.10. che è il proposito.

Propositione 20.Theorema 20.

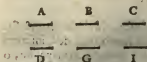
SE faranno tre quantità superiori da vn lato,& altre tre inferiori dall'altro lato,& siano le proportioni delle superiori à due à due eguali alle proportioni delle inferiori similmente à due à due all'hora equamente se la prima delle superiori sia maggiore, ò minore, ò eguale all'vltima, ancora la prima delle inferiori farà similmente maggiore, ò minore,ò eguale all'vltima.

Siano le tre quantità superiori A,B,D.& le tre inferiori a,b,d.& sia dalla A,alla B.come dalla a,alla b.& dalla B,alla D.come dalla b,alla d.si dice che se A.prima farà maggiore, o minore, o eguale a D,terza in l'vne; ancora a,prima farà similmente maggiore, o minore, o eguale a d,nelle altre. Per dimostrarlo, Sia prima A.maggiore di D.che perciò paragonate ambedue alla B.maggior proportione(per la ottaua propositione)gli hauerà la A.maggiore,che la D.cioè maggiore farà la proportione di A,a B.che di D,a B.ma come da A,a B. nelle superiori,cosi è da a,a b. nelle inferiori,però anco da a,alla b.(per la 13.propositione) farà maggior proportione che di D,a B. Ancora perche come di B.a D cosi è di b,a d. onde conuersamente come di D.a B. cosi farà di d,a b.& perciò essendo da A,a B.maggior proportione che di D,a B.ancora da a,a b.farà maggior proportione che di d,a b. Delle due quantità dunque a,& d. paragonate alla istessa b. maggior proportione gli ha la a,che la d.però(per la decima propositione)maggior quantità è la a, che la d. cioè la prima delle inferiori farà maggiore della terza, quando la prima delle superiori sia maggiore della terza. Et se la prima superiore A.sia minore della terza B.ancora la pri-

la prima inferiore a, sarà minore della terza d. Perche essendo A, minore di D. minor proportione sarà di A, a B. che di D, à B. ma come di A, a B. così è da a, a b. però ancora da a, a b. sarà minor proportione che di D, a B. ma come di D, a B. così è di d, a b. (perche conuersamente dal supposito come è B, a D. così è da b, a d.) perilche similmente minor proportione sarà di a, a b. che di d, a b. Onde perche paragonate le due quantità a, & d. ad vna istessa b. la a gli ha minor proportione, ne segue che essa a. (per la 10. di questo) sia anco minore della d. cioe la prima delle inferiori sarà minore della terza, sempre che la prima delle superiori sia minore della terza. Et se la prima A, superiore sia eguale alla terza D. ancora la prima a, inferiore sarà eguale alla terza d. Perche essendo A, eguale a D. sarà da A, a B. & perciò da a, a b. come di D, a B. & però come di d, a b. onde essendo da a, a b. come di d, a b. queste due quantità quali ad vna medesma b. hanno vna istessa proportione saranno eguali fra loro, cioè ancora a, sarà eguale a d. nelle inferiori, quando A. sia eguale a D. nelle superiori, quello dunque che auuiene ad A. prima rispetto à D. terza nelle superiori in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene anco ad a, prima rispetto a d, terza nelle inferiori.

Propositione 21. Theorema 21.

SE saranno tre quantità da vn lato, ò superiori, & altre tre quantità dall'altro lato, ò inferiori, & siano le proportioni delle superiori à due, à due, eguali, alle proportioni delle inferiori, ma sia perturbata, ò inordinata la proportionalità loro, all'hora di necessità nella equa, ò equamente, se la prima quantità delle superiori sia maggiore, ò minore, ò eguale alla terza. Ancora similmente la prima delle inferiori sarà maggiore, ò minore, ò eguale alla terza.

Siano le tre quantità A, B, C. da vna banda superiori, & l'altre tre D, G, I. dall'altra banda inferiori, & sia da A prima superiore, alla B seconda, come da G seconda delle inferiori ad I terza, & dalla B seconda delle superiori alla C terza, come dalla D prima delle inferiori alla G seconda, cioe di queste 3. & 3. quantità sia la proportionalità perturbata, o inordinata, cioe che la prima proportione superiore sia eguale alla seconda inferiore, & la seconda superiore eguale alla prima inferiore, si dice che quello che auuiene alla prima A delle superiori rispetto alla terza C, in esserli maggiore, o minore, o eguale, auuiene anco alla prima D delle inferiori rispetto alla terza I, in esserli similmente maggiore, o minore, o eguale. Per dimostrarlo. Poniamo prima che A. sia maggiore di C. che così maggior proportione sarà di A alla B. & però di G. alla I. che di C alla istessa B & però che di G. a D. (che essendo da B. a C. come da D. a G. dal supposito, ancora conuersamente da C. a B. sarà come da G. a D) perche dunque da G. ad I. è maggior proportione, che dalla medesma G. alla D. la I. (per la decima propositione) sarà minore della D. cioe la D. sarà maggiore della I che è il proposito. Et se la A prima sia minore della C terza, ancora la proportione di A alla B. & però di G. alla I. sarà minore che la proportione di C. alla istessa B. & però che di G. alla D. perche dunque la G. paragonata alle D. & I. ella alla I. ha minor proportione che alla D. cioe alla D. ha maggior proportione, che alla I. ne segue (per la decima propositione) che la D. sia minore della I. come si voleua mostrare. Et se anco A. prima sia eguale a C. terza, sarà similmente D. prima, eguale ad I. terza; perche all'hora da A. a B. & però da G. ad I sarà come da C. a B. & però come da G. a D. onde G. così ad I come a D. hauerà vna istessa proportione; perilche (per la nona propositione) esse D. & I. saranno eguali fra loro; quando dunque A. sia eguale a C. sara similmente ancora D. eguale ad I. che è quanto si voleua mostrare.

A	B	C
D	G	I

Propositione 22. Theorema 22.

SE siano quante quantità si voglino da una banda, & altre tante quantità dall'altra, & che le une à due à due habbino le istesse proportioni di mano in mano che le altre, all'hora esse quantità nella equa proportionalità saranno proportionali.

Quì si mostra il modo d'argomentare nella proportionalita Equa, quando nelle quantita la proportionalita è ordinata, & a questo viene a seruire la 20. propositione, si come seruira la 21.

propositi-

propositione a prouare che le quantita siano pure nella proportioonalita equa proportionali, quando la proportionalita d'esse sia perturbata, o inordinata. Siano perciò prima le tre quantita A,B,C. da vna banda, o superiori, & altre tre a,b,c. dall'altra banda, o inferiori, & sia da A. a B. come da a, a b. & da B. a C. come da b, a c. si dice che ancora nella equa proportionalita dalla prima A. all'vltima C. nelle superiori, sarà come dalla prima a, all'vltima c. nelle inferiori. Per dimostrarlo: Alle due A. & a. prima superiore, & prima inferiore si piglino i moltiplici egualmente come si voglino M. & m. Ancora alle due seguenti B. & b. seconde superiore, & inferiore si piglino i moltiplici egualmente come si voglino, & siano N. & n. & di più alle due vltime, o terze C. & c. superiore, & inferiore si piglino i moltiplici egualmente a beneplacito, & siano O. & o. Hora considerate A, & B. superiori come prima quantità, & seconda, & a, & b, inferiori come terza, & quarta, che sono proportionali, essendo da A, a B. come da a, a b. Perche alla prima, & alla terza A, & a, sono moltiplici egualmente tolti M. & m. & alla seconda, & quarta B, & b sono moltiplici egualmente tolti N. & n. ne segue, per la quarta propositione che essi quattro moltiplici, per l'ordine delle quattro quantita dette siano ancor essi proportionali, cioe che da M. ad N. sia come da m. ad n. Ancora considerate le quattro quantita proportionali B. & C. superiori; & b. & c, inferiori, perche alli dui antecedenti B. & b. sono tolti i moltiplici egualmente N. & n. & anco alli dui consequenti C, & c. sono pure tolti i moltiplici egualmente O. & o. ne segue (per la detta quarta propositione) che similmente essi quattro moltiplici siano ancor essi per l'ordine medesmo delle quattro quantità dette B, C. b, c. proportionali, cioe che da N, ad O. sia la medesma proportione che da n, ad o. Essendo dunque le tre quantita M. N, O. superiori da vna banda, & l'altre tre m, n, o. inferiori da vn'altra banda, le quali a due a due sono in vna istessa proportione, cioe da M. ad N. è come da m, ad n. & da N, ad O. come da n, ad o. (come già si è prouato) ne segue (per la 20. propositione) che quello che auuiene ad M, rispetto ad O. nelle superiori in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuenga anco di necessità similmente ad m, rispetto ad o. nelle inferiori, in esserli medesmamente eguale, o maggiore, o minore. Hora intese le quattro quantità A, & C. estreme superiori, come prima, & seconda, o vogliamo dire come antecedente, & consequente, & le a, & c. estreme inferiori, come terza, & quarta antecedente, cioe, & consequente, perche hauendo tolti i moltiplici egualmente come si voglino M, & m. alla prima, & terza A, & a. antecedenti, & anco i moltiplici egualmente come si voglino O, & o. alla C, & c. seconda, & quarta consequenti, si è prouato che sempre che M moltiplice della prima sia eguale, o maggiore, o minore di O. moltiplice della seconda, ancora di necessità similmente m. moltiplice della terza, sarà eguale, o maggiore, o minore di o. moltiplice della quarta, cioe che quello che auuiene al moltiplice dell'vno antecedente rispetto al moltiplice del suo consequente, auuiene anco sempre necessariamente al moltiplice dell'altro antecedente rispetto al moltiplice del suo consequente in esserli eguale, o maggiore, o minore, ne segue (per la sesta diffinitione) che da A, a C. antecedente, & consequente sia come da a, a c. antecedente, & consequente. Onde perche A, & C. sono le estreme delle tre quantità A, B, C. superiori da principio prese, & a, b, c. sono le estreme dell'altre tre a, b, c. inferiori, essendosi prouato che la proportione delle due estreme in l'vne è eguale alla proportione delle due estreme nelle altre, è chiaro le tre, & tre quantità dette essere nella equa proportionalità proportionali.

M	N	O
30	8	14
10	4	2
A	B	C
a	b	c
15	6	3
45	12	21
m	n	o

Et quando le quantità da vna banda siano più di tre, & altre tante dall'altra hauenti come è detto a due a due le medesime proportioni, & poniamo che fussero cinque superiori A, B, C, R, V. & le cinque inferiori a, b, c, r, u. che dalla prima alla seconda superiore sia, come s'è detto, come è dalla prima alla seconda delle inferiori, & dalla seconda alla terza come dalla seconda alla terza, & dalla terza alla quarta come dalla terza alla quarta, & dalla quarta alla quinta come dalla quarta alla quinta, pure si prouarà che dalla prima A. all'vltima, o quinta V. delle superiori, è come dalla prima a. all'vltima, o quinta u. delle inferiori. Perche hauendo prima prouato che dalla A. alla C, è come dalla a. alla c.

A	C	R.	V
10	2	12	8
15	3	18	12
a	c	r	u

a.alla c.pigliandone hora vna sola seguente di sopra,cioe la R. & similmente vna sola seguente r.di sotto, & intendendo di sopra le tre quantità A,C,R. & di sotto ancora le tre a,c,r. diremo dalla prima A,alla seconda C.è come dalla prima a,alla seconda c.(che questo è gia prouato)& dalla seconda C,alla terza R.è(dal supposito)come dalla seconda c,alla terza r: però per quello che di sopra si è mostrato esse tre,& tre quantita A,C,R. a,c,r. saranno nella equa proportionalita proportionali,cioe dalla prima A,alla vltima R.sara come dalla prima a,alla vltima r. Hora di nuouo pigliando di sopra la A,come prima,& la R,per seconda, & di sotto similmente la a, come prima,& la r,per seconda,che cosi dalla prima alla seconda delle superiori,sara come dalla prima alla seconda delle inferiori, & alle superiori inteso accompagnata la V.seguente come terza,& similmente alle inferiori ancora accompagnata la u,seguente come terza,diremo. Dalla prima A.alla seconda R.di sopra,è come dalla prima a.alla seconda r.di sotto,& dalla seconda R,alla terza V.è come dalla seconda r,alla terza u. però (per quello che di gia si è mostrato qui)esse quantita saranno nella equa proportionalita proportionali,cioe dalla prima A,alla vltima V.delle superiori,sara come dalla prima a, alla vltima u, delle inferiori, & cosi quando vi fussero altre quantita superiori, & altre tante inferiori, pure a due a due, come s'è detto nelle medesime proportioni,si potra di mano in mano pigliando vna di sopra, & vna di sotto per volta andar conclu dendo,che dalla prima all'vltima delle superiori,sia come dalla prima all'vltima delle inferiori;se saranno dunque quante si voglino quantita da vna banda,& altre tante dall'altra, a due a due in vna medesma proportione, esse quantita saranno ancora nella equa proportionalita proportionali,che è quanto si è proposto di dimostrare.

Propositione 23. Theorema 23.

SE saranno tre quantità da una banda, & altre tante da un'altra banda, quale a due a due siano nella medesima proportione,ma sia perturbata,ò inordinata la loro proportione,elle ancora nella equa proportionalità saranno proportionali.

Siano le tre quantita A,B,C.superiori, & le tre d,a,b.inferiori, & sia dalla prima A.6. alla seconda B.4.nelle superiori,non come dalla prima d,alla seconda a. delle inferiori, ma sia inordinatamente,o perturbatamente come da a,seconda 15.a b,terza 10.& anco da B.4.seconda superiore a C.2.terza sia perturbatamente, o inordinatamente come da d.30. prima inferiore ad a. 15.seconda. Si dice che esse sei quantita saranno nella equa proportionalita proportionali. Per mostrarlo. Alla prima A.6.& seconda B.4.superiori,& anco alla prima d.30. inferiore si piglino i moltiplici come si voglino egualmente G,I,M.& anco alle tre quantita rimanenti C.2. terza superiore.& a.15.seconda, & b.10.terza inferiori si piglino i moltiplici egualmente come si voglino L.N.O.che all'hora(per la 15.propositione)si come è A.a B.cosi sara G.moltiplice di A.ad I.moltiplice di B. ma come è A.a B. cosi è a.a b. però ancora da G.ad I. sara come da a.a b..ma come è a,a b.cosi è il moltiplice N.al moltiplice O. però similmente come è da G.ad I. cosi sara da N. ad O. Di nuouo intese B.prima, C.seconda, d.terza,& a.quarta, & esse proportionali, che (dal supposito) da B, a C. è come da d, ad a. essendosi presi I.& M. egualmente moltiplici a B.& d. (che hora s'intendono per prima,& terza) & anco presi L. & N. egualmente moltiplici a C,& a. (che hora s'intendono per seconda,& quarta)ne segue(per la quarta propositione) che cosi come B.a C. ha la proportione di d.ad a. cosi ancora I,ad L. (moltiplici della prima B,& seconda C.)habbi la proportione di M.ad N.(moltiplici della terza d,& quarta a.)Hora intese le tre quantita G,I,L.da vna banda superiore, & le altre tre M, N, O. da vn'altra banda inferiori,quali a due a due sono inordinatamente, o perturbatamente in vna medesma proportione,cioe che dalla prima G.alla seconda I.superiori è(come si è dimostrato) la proportione che ha la seconda N,alla terza O.inferiori, & dalla seconda I,alla terza L.delle superiori, è la proportione che ha la prima M,alla seconda N.delle inferiori,ne segue (per la 21.di questo) che

G	I	L
12	8	10
A 6	B 4	C 2
d 30	a 15	b 10
M	N	O
60	75	50

quello

quello che auuiene nelle superiori alla G.prima rispetto ad L.terza,o vltima, in esserli eguale,o maggiore, o minore, cosi auuenga nelle inferiori ad M. prima rispetto ad O. terza in esserli similmente eguale,o maggiore,o minore. Hora intese A.prima,C.seconda,d.terza,& b.quarta,& essendo G.& M.egualmente moltiplici alla prima,& terza(antecedenti A.& d.) & anco L. & O. egualmente moltiplici alla seconda,& quarta(consequenti C.& b.)perche si è prouato che quello che auuiene a G. rispetto ad L. (cioe al moltiplice della prima A. rispetto al moltiplice della seconda G.)in esserli eguale,o maggiore,o minore, auuiene anco sempre ad M.rispetto O.(cioe al moltiplice della terza d, rispetto al moltiplice della quarta b.) in esserli similmente eguale,o maggiore,o minore, ne segue (per la sesta diffinitione) che la proportione della prima quantita A.alla seconda C.sia eguale alla proportione della terza quantita d,alla qnarta b. ma la A,& la C. sono le estreme prima, & terza delle nostre tre quantita superiori, & la d. & la b. sono le estreme prima, & terza delle nostre tre quantita inferiori, & si sono (esse due, & due estreme A. C. & d. b.) prouate elle hauere vna istessa proportione, però esse tre, & tre quantita sono nella equa proportionalita proportionali, che è quanto si voleua dimostrare. Con modo simile ancora, quando fussero molte quantita superiori, & altretante inferiori a due a due proportionali inordinatamente,o perturbatamente pure si prouaria elle ancora nella equa proportionalita essere proportionali.

Propositione 24. Theorema 24.

SE di sei quantità la prima alla seconda habbi la proportione, che ha la terza alla quarta,& anco la quinta alla detta seconda habbi la proportione che ha la sesta alla quarta. All'hora il composto della prima,& quinta hauerà alla seconda la proportione istessa che sia dal composto della terza,& sesta alla quarta.

Sia da a,prima 9.a g,seconda 6.come da A,terza 12.a G,quarta 8.& di più da b,quinta 3. alla detta g,seconda 6. come da B,sesta 4. a G, quarta 8. si dice che dal composto della prima, & quinta a,9.& b,3. cioe dalla a b. 12. alla seconda g.6. fara la istessa proportione che è dal composto della terza, & sesta A,12. & B,4. cioe dalla A B. 16. alla quarta G.8. Per dimostrarlo, diremo. Perche da b,3 a g,6.come è da B,4.a G,8. sara ancora conuersamente da g,6.a b,3. come da G,8.a B,4. Hora intese le tre quantita a,g,b. da vna banda, & le altre tre A,G,B,dall'altra, perche dalla prima a,alla seconda g. da vna banda, è come dalla prima A,alla seconda G.dall'altra,

prima	quinta	terza	sesta
a	b	A	B
9	3	12	4
g 6		G 8	
seconda		quarta	

& dalla seconda g,alla terza b.è come dalla seconda G,alla terza B.ne segue (per la 22.propositione)che ancora nella equa proportionalita dalla prima a,9.alla terza b,3 sara come dalla prima A,12.alla terza B,4. & congiuntamente (per la 18.propositione) da a,& b.12. alla sola b,3. sara come da A,& B.16.alla sola B.4. Hora intese da vna banda le tre quantita a b.12. prima, b,3.seconda,& g,6.terza,& da vn'altra banda le altre tre quantita A B.16.prima, B.4.seconda, & G.8.terza,perche dalla prima 12.alla seconda 3.nelle vne, è come dalla prima 16. alla seconda 4.nelle altre, & dalla seconda 3. alla terza 6. nell'vne, è come dalla seconda 4. nella terza 8. nelle altre,ne segue che nella equa proportionalita(per la 22.propositione) dalla prima 12.a b, alla terza 6.g.nelle vne,sia come dalla prima 16. A B.alla terza.8.G.nelle altre,cioe (intese hora le quantita tutte come da principio furono poste)dal composto della prima a,9.& quinta b,3. alla seconda g,6.sara come dal composto della terza A,12.& sesta B,4.alla sola G,8.che è quanto si voleua mostrare.

Questo anco facilmente si potria proponere dicendo,se due quãtita prima,& seconda da vna banda siano paragonate ad vna terza; & due altre quantita da vn'altra banda prima,e seconda siano paragonate ad vn'altra terza, essendo in l'vne dalla prima alla terza come in l'altre dalla prima alla terza,& anco in l'vne dalla seconda alla terza,come in l'altre dalla seconda alla terza, si dice che dal composto della prima, & seconda in l'vne alla terza,sara come dal composto della prima,& seconda in l'altre alla terza.

Si può auuertire che quello che dimostrò la sesta propositione nelli moltiplici, si può hora mostrare auuenire ancora in ogni sorte di proportione dicendo. Se la prima quantita da vna

prima	seconda	prima	seconda
9 — 3		12 — 4	
12		16	
terza 6		terza 8	

banda diuisa in due parti, ad vna seconda habbi la istessa proportione che ha la prima quantita da vn'altra banda diuisa anchella in due parti ad vn'altra seconda,& ancora che la prima parte della prima quantita alla seconda quantita da vna banda,habbi la istessa proportione che ha la prima parte della prima quantita alla seconda quantita dall'altra banda; all'hora ancora la seconda parte alla seconda quantita da vna banda, hauera la istessa proportione che ha la seconda parte alla seconda quantita dall'altra banda.

Che se a,b.prima quantita 15.da vna banda diuisa in due parti prima 12.a,& seconda 3.b, ad vna seconda quantita g.6.habbi la proportione che ha A,B.prima quantita 20.dall'altra banda diuisa in due parti prima 16.A & seconda 4.B.ad vn'altra seconda quantita G.8.& di più la prima parte a,12 della prima quantita da vna banda,alla seconda quantita g,6.habbi la istessa proportione che ha la prima parte A, 16. della prima quantita dall'altra banda alla seconda quantita G,8.si dice che ancora b,3.seconda restante parte alla g,6.hauera la istessa proportione che ha B,4 restante parte alla G,8. Perche essendo da 12.a 6.come da 16.a 8.sara conuersamente da 6.a 12. come da 8.a 16. perche dunque di 15.6.12.tre quantita da vna banda, & di 20. 8.16. tre quantita da vn'altra banda, dalla prima 15. alla seconda 6. è come dalla prima 20. alla seconda 8.& dalla seconda 6 alla terza 12.come dalla seconda 8.alla terza 16. ne segue che esse tre,& tre quantita siano nell'equa proportionalita proportionali,cioe che da a,b.15.ad a,12.sia come da A,B.20. ad A,16. Onde disgiuntamente da b.3. ad a,12. sara come da B,4. ad A,16. & hora intese le tre quantita b,3.a,12.g,6.da vna banda,& altre tre B,4.A,16.G,8. da vn'altra banda, perche dalla prima b,3. alla seconda a,12.in l'vne,è come dalla prima B,4.alla seconda A,16.nell'altre, & dalla seconda a,12. alla terza g,6.è come dalla seconda A,16.alla terza G,8.ne segue che esse tre,& tre quantita siano ancora nella equa proportionalita proportionali, cioe che dalla prima b, 3. all'vltima g,6. nell'vne,sia come dalla prima B,4.all'vltima G,8.nelle altre; Onde è chiaro,che dalla seconda, ò restante parte b,3.della prima quantita a b,15.da vna banda,alla g,6. è la istessa proportione, che è dalla restante parte B,4.della A,B.20.dall'altra banda,all'altra G,8.cioè se da 15.a 6.è come da 20.a 8.& che anco dalla parte 12.all'istesso 6.sia come dalla parte 16.all'altro istesso 8.sara anco sempre dal restante 3.al 6.come dall'altro restante 4.all'8.

a	b	A	B
12	3	16	4
g	6	B	8

Propositione 25. Theorema 25.

SE quattro quantità siano proportionali il composto, ò somma della maggiore, & minore d'esse sarà maggiore del composto dell'altre due.

Se di quante quantità proportionali si voglino l'antecedente dell'vna è maggiore del suo conseguente, ancora l'antecedente di ciascuna delle altre sarà maggiore del suo consequente; che se il consequente dell'vna fusse maggiore del suo antecedente, ancora il consequente di ciascuna dell'altre saria maggiore del suo antecedente. Et se l'antecedente dell'vna proportione sia maggiore dell'antecedente d'vn'altra proportione, ancora il consequente dell'vna sarà similmente maggiore del consequente dell'altra, che se l'antecedente dell'vna fusse minore dell'antecedente dell'altra,ancora il consequente dell'vna saria minore del consequente dell'altra, come s'è prouato nella 14.propositione; onde di quattro quantità proportionali se la prima che è antecedente sia maggiore della seconda suo consequente,& che ancora essa prima sia maggiore della terza secondo antecedente,all'hora perche questo secondo antecedente è similmente maggiore del suo secondo consequente,tanto maggiormente il primo antecedente (che è maggiore del secondo antecedente)sarà maggiore del secondo consequente, & perche anco essendo il primo antecedente maggiore del secondo antecedente,il primo consequente sarà ancora maggiore del secondo consequente, si conosce che se la prima di quattro quantità proportionali sia maggiore della seconda,& della terza, all'hora la quarta sarà minore, & della terza, & della seconda,& perche ella è anco minore della prima,essa quarta sarà minore di ciascuna delle altre, tre & però sarà la minima. Hor siano delle quattro quantità proportionali A B,C D, E,F. dalla A B.alla C D. come dalla E,alla F. & di esse quattro quantità sia A B. la maggiore, quale per

commo-

commodità chiamaremo prima, che perciò C D. sarà seconda, E. terza, & F. quarta. Di queste perche A B maggiore è la prima sarà F. quarta la minima. Hor si dice che il composto o somma di queste A B. massima, & F. minima, è maggiore del composto, o somma dell'altre due seconda, & terza, (che perciò conuiene le quattro quantità essere d'vn medesimo genere, accioche si possano sommare insieme.) Per dimostrarlo. Dalla A B. si lieui la B. eguale alla E. & dalla C D. si lieui la D. eguale alla F. che cosi dalla A B. alla C D. sarà come dalla B (eguale alla E) alla D. (eguale alla F.) Onde perche dal tutto A B. al tutto C D. è come dalla parte B. alla parte D. ancora (per la 19. propositione) come è il tutto A B. al tutto C D. cosi sarà il restante A, al restante C. & perche A B. massima è maggiore di C D. ancora A. sarà maggiore di C. & perche B. 8. & E. 8. sono eguali, & anco eguali sono D. 6. & F. 6. se a B. 8. si giunge F. 6. & a D. 6. si giunge E. 8. sarà il composto 14. di B. 8. & F. 6. eguale al composto 14. di D. 6. & E. 8. & delli dui composti eguali B F. 14. & D E. 14. al primo B F. giunto A. 12. & al secondo D. E. giunto C. 9. perche A, 12. che si giunge al primo, è maggiore di C, 9. che si gionge al secondo, ne segue che anco la somma con il primo, & sarà B F A. cioe A B F. sia di necessità maggiore che la somma con il secondo, qual somma sarà D E C. cioe C D E. ma la prima A B F. è il composto della prima quantità A B. & della quarta F. massima, & minima delle quattro quantità proposte, & la seconda C D E. è il composto delle altre due quantità seconda, & terza, perilche si è dimostrato che il composto della massima, & minima è maggiore del composto delle altre due.

	20		
A	B		E
12	8		8
C 15	D		F
9	6		6

Nelle antecedenti propositioni si è dimostrato che quando le quantità sono simplicemente proportionali elle ancora nelle altre sorti di proportionalità, cioe nella conuersa, permutata, congiunta, disgiunta, euersa, & equa, saranno di necessità proportionali. Hora si segue a dimostrare che quando le quantità nella simplice proportionalità non siano proportionali, (& si chiamano disproportionali) elle ancora non saranno proportionali in alcuna dell'altre sorti di proportionalità.

Propositione 26. Theorema 26.

SE la prima quantità alla seconda habbi maggior proportione che la terza alla quarta, all'hora conuersamente la seconda alla prima hauerà minor proportione che la quarta alla terza.

Sia dalla A, alla B. maggior proportione che dalla C, alla D. si dice che dalla B. alla A. sarà minor proportione che dalla D, alla C. Per dimostrarlo. Intendasi la E. hauere alla B. la istessa proportione che ha la C, alla D. che perciò da A, alla B. sarà maggior proportione che dalla E. alla B. perilche (per la decima propositione) la A. sarà maggiore della E. & però la B. (paragonata alla A, maggiore, & alla E, minore) alla A. hauerà (per la ottaua propositione) minor proportione che la istessa B. alla E. ma come da B, ad E. cosi è da D, a C. (che essendo da E, a B. come da C, a D. ancora conuersamente da B. ad E. è come da D. a C.) però medesimamente da B, ad A. sarà minor proportione che da D, a C. che è quanto si voleua mostrare.

A	40	C	15
B	8	D	5
E	24		

Propositione 27. Theorema 27.

SE la prima quantità alla seconda habbi maggior proportione che la terza alla quarta, ancora permutatamente la prima alla terza hauerà maggior proportione che la seconda alla quarta.

Habbi A, alla B. maggior proportione che C, alla D. si dice che permutando ancora maggior proportione sarà da A, alla C. che da B, alla D. Per prouarlo. Intendasi la E, alla B. hauere la istessa proportione che ha la C, alla D. che perciò dalla A, alla B. sarà maggior

antecedente	A	20	C	27	antecedente
consequente	B	8	D	12	consequente
antecedente	E	18			

maggior proportione che dalla E, alla B. perilche (per la decima propoſitione) maggiore ſara A,di E. onde (per la ottaua propoſitione)maggior proportione hauera A,alla C.che E,alla medeſima C.& perche ſi è poſto E,alla B. eſſere come C,alla D. ne ſegue che (per la 16.propoſitione) permutatamente da E,alla C.ſia come da B,alla D. Onde perche da A,a C. è maggior proportione che di E, a C. ſara ancor pure da A, a C. maggior proportione che di B, a D. come ſi voleua moſtrare.

Propoſitione 28. Theorema 28.

SE dalla prima quantità alla ſeconda ſia maggior proportione che dalla terza alla quarta, ancora congiuntamente il compoſto della prima, & ſeconda alla ſeconda hauerà maggior proportione che il compoſto della terza,& quarta alla quarta.

Sia da A,30.a *B*,8.maggior proportione che da C,18.a D,6. ſi dice che anco congiuntamente da A *B*. 38. alla ſola *B*, 8. ſara maggior proportione che da C D.24. alla ſola D.6.Per dimoſtrarlo. Intendaſi la G,24.alla *B*, 8.hauere la proportione iſteſſa che ha la C,18.alla D.8. che coſi la proportione di A,30.alla *B*,8.ſara maggiore che dalla G,24. alla *B*,8.& perciò la A,30. ſara maggiore della G,24. onde aggiuntali comunemente la *B*,8. ſara A *B*. 38. maggiore di G *B*. 32. perilche maggiore ancora ſara la proportione di A *B*. 38. a *B*,8.che di G,32. alla iſteſſa *B*,8. ma congiuntamente per la 18. propoſitione,coſi è G.*B*.32.alla *B*.8.come C D.24.alla D.6 (eſſendoſi poſto G,a *B*.come C,a D.)& però da A *B*.38.a *B*,8.(che e maggior proportione, che di G.*B*.32. a *B*.8.) ſara pure maggior proportione che di C D.24. alla D,6.che e quanto ſi voleua moſtrare.

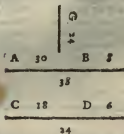
G 24

A 30 *B* 8

C 18 D 6

Propoſitione 29.Theorema 29.

SE di quattro quantità il compoſto della prima, & ſeconda alla ſola ſeconda habbi maggior proportione,che il compoſto della terza, & quarta alla ſola quarta. Ancota diſgiuntamente la prima alla ſeconda hauerà maggior proportione, che la terza alla quarta.

Sia da A.B.38.compoſto della prima A.30 & ſeconda B.8.alla ſola B.8.maggior proportione che da C.24.compoſto della terza C.18. & quarta D.6. alla ſola D.6. ſi dice che diſgiuntamente ancora da A.30.prima,a B.8.ſeconda,ſarà maggior proportione che di C.18.terza.a D.6. quarta. Per dimoſtrarlo. Intendaſi la G B. alla B.8. hauere la iſteſſa proportione che C D.24.compoſto della terza C.18. & quarta D.6.alla ſola D.6.che coſi la proportione di A B. 38.alla B.8.(che è maggiore della proportione di C D.24. alla D.6.) ſarà anco medeſmamente maggiore della proportione che è da G *B*.32.a B.8.perilche (per la 10.propoſitione)maggior quantità ſarà A,B.38. che G,B.32. onde da ciaſcuna d'eſſe cauato la comune *B*.8. ancora il reſtante *A*.30.ſarà maggiore del reſtante G.24. perilche alla *B*.paragonate queſte A,& G. perche A. è maggiore di G. maggior proportione ſarà da *A*.30. a *B*.8. che da G.24. alla iſteſſa *B*.8.& perche ſi è poſto G,*B*.32. a *B*.8, eſſere come è C,D.24. a D.6. ne ſegue che diſgiuntamente ſarà ancora (per la 17.propoſitione)come da G.24.a D.8.coſi C.18.a D.6.ma da A,*B*.30 a *B*.8.ſi è moſtrato eſſere maggior proportione che di G.24. a *B*.8. però ſarà ſimilmente maggior proportione che da C.18. a D.6. cioè dalla prima quantità A. alla ſeconda *B*. ſara maggior proportione che della terza C alla quarta D.come ſi voleua moſtrare,o vogliamo dire,ſe le quantita congiuntamente ſono diſproportionali ancora diſgiuntamente nel medeſmo modo, & per il medeſimo ordine ſaranno diſproportionali.

Propoſi-

Propositione 30. Theorema 30.

SE di quattro quantità il composto della prima, & seconda alla seconda habbi maggior proportione, che il composto della terza, & quarta alla quarta sarà poi euersamente dal composto della prima, & seconda alla prima minor proportione che dal composto della terza, & quarta alla quarta.

Sia dalla A B. composto della prima 30, A, & seconda B 8, alla B 8, maggior proportione che di C D. composto della terza C 18, & quarta D 6. alla quarta D 6. Si dice che poi euersamente sarà minor proportione dal composto A B. 38, alla sola prima A 30, che dal composto C D. 24. alla sola C. 18; Per dimostrarlo, Essendo maggiore la proportione del composto A B 38, a B 8, di quella che è dal composto C D 24, a D 6. ne segue che disgiontamente (per la antecedente 29) maggior proportione ancora sia da A 30. a B 8, di quello che è da C 18. a D 6, per ilche conuersamente (per la 26) minor proportione sarà da B 8. ad A 30, che di D 6. a C, 18; cioè maggior proportione da D 6. a C 18 che da B 8. ad A 30,

A 30	B 8	C 18	D 6
38		24	

Onde congiuntamente (per la 28) medesimamente maggior proportione sarà da D C 24. a C 18; che da B A 38. ad A 30; cioè minor proportione sarà da B A. Ma diremo A B, 38. ad A 30. di quel lo che è da D C, ma diremo C D 24. alla C 18; che è quanto si voleua mostrare, Cioè si può di e si è dimostrato, che Perche dall'antecedente A, & consequente B. al solo consequente B. è maggior proportione che dall'antecedente C, & consequente D. al solo consequente D, ne segue che dal composto A B. al solo antecedente A. sia poi minor proportione che dal composto C D. al solo antecedente C, Ouero si può dire Perche dall'antecedente A B, al suo consequente B. è maggior proportione che dall'antecedente C D. al suo consequente D, ne segue che poi euersamente dall'antecedente A B. all'eccesso A. in che esso antecedente A B. supera il suo consequente B. sia minor proportione che dall'antecedente C D. all'eccesso C, in che esso antecedente C D. supera il suo consequente D.

Propositione 31. Theorema 31.

SE saranno tre quantità da vna banda, & altre tre quantità da vn'altra banda, & sia maggior proportione della prima da vna banda alla seconda che dalla prima dall'altra banda alla seconda. Et ancora dalla seconda da vna banda alla terza, sia maggior proportione che dalla seconda dall'altra banda alla terza. Sarà ancora di necessità equamente dalla prima quantità da vna banda alla terza maggior proportione che dalla prima dall'altra banda alla terza.

Siano le tre quantità da vna banda, o superiori A B C, Et l'altre tre dall'altra banda, o inferiori D E F, & sia maggior proportione di A. a B, che di D. ad E, & anco maggior proportione di B. a C. che di E, ad F, Si dice che all'hora dalla prima A. alla terza C, sarà similmente maggior proportione che nelle inferiori dalla prima D, alla terza F, Per dimostrarlo, Intendasi G, a C. hauere la istessa proportione che ha E ad F, & anco si intenda la H alla G, hauere la istessa proportione che ha D, ad E, che cosi equamente (per la 22. propositione) all'hora sarà da H a C, come da D. ad F, Hora perche da B 3, a C 2, è dal supposito maggior proportione, che da E 4. ad F 3. sarà ancora maggior proportione che da G $2\frac{2}{3}$. a C 2, perilche (per la 10. propositione) maggior quantità sarà B, che G, onde (per la 8. propositione) maggior proportione sarà da A 9. a G $2\frac{2}{3}$ (minore delle due B. & G) che di esso A 9. a B 3. (maggior quãtità che non è G,) ma da A 9. a B 3, si pone dal supposito essere maggior proportione che di D. 10. ad E 4. perilche, perche di più è anco maggior proportione di A 9. a G $2\frac{2}{3}$, che di A 9. a B 3; tanto maggiormente maggior proportione sarà da A 9. a G $2\frac{2}{3}$. che da D. 10, ad E 4; Et perche da H $6\frac{2}{3}$. a G $2\frac{2}{3}$. è come da D 10 ad E 4, sarà medesimamente

A 9	D 10
B 3	E 4
C 2	F 3
G $2\frac{2}{3}$	
H $6\frac{2}{3}$	

da A 9. a G $2\frac{2}{3}$, maggior proportione che di H $6\frac{2}{3}$, a G $2\frac{2}{3}$, cioe delle due quantita A 9. & H $6\frac{2}{3}$. paragonate ad vna istessa quantita G $2\frac{2}{3}$. la A 9. gli ha maggior proportione che la H. $6\frac{2}{3}$. però (per la decima propositione) la A 9. sara maggiore di H $6\frac{2}{3}$. Onde A 9 maggiore alla C 2, hauera maggior proportione (per la ottaua propositione) che H $6\frac{2}{3}$. alla istessa C. 2; Ma come da H $6\frac{2}{3}$ a C 2. cosi è da *D*. 10. ad *F*. 3. (il che gia di sopra si conclude per la Equa proportionalita) perilche essendo da A 9, a C 2, maggior proportione che da H $6\frac{2}{3}$. a C 2; sara ancora similmente maggior proportione da A a C, che da *D* a *F*, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 32. Theorema 32.

SE saranno tre quantità da vna banda, & altre tre da vn'altra banda, & sia maggior proportione dalla prima da vna banda alla seconda, che dalla seconda dall'altra banda alla terza, Et ancora dalla seconda quantità da vna banda alla terza, sia maggior proportione che dalla prima dell'altra banda alla seconda, all'hora di necessità Equamente sarà ancora maggior proportione dalla prima da vna banda alla terza, che dalla prima dall'altra banda alla terza.

Siano le tre quantita A *B* C da vna banda, & le tre *D* E *F*, dall'altra, & sia maggior proportione da A a *B*, che da E a *F*. Et anco maggior proportione sia da *B*. a C, che da *D* ad E. Si dice che ancora equamente maggior proportione sara da A. a C, che da *D*, ad *F*; Per dimostrarlo. Intendasi, o facciasi, o imaginisi essere G. a C. come è da *D*. ad E, che cosi da *B*. a C, sara maggior proportione che da G, a C. perilche maggior quantita sara *B*. che G. & però ad esse paragonate la A. da A a G (minore) sara maggior proportione che da A. a *B*. (maggiore) Ma da A a *B*. è dal supposito maggior proportione che di E ad *F*. però maggiormente è maggiore la proportione di A. a G. che quella di E ad *F*. Ancora intendasi essere H a G. come E ad *F*. che cosi maggior proportione sarà da A, a G. che da H, a G; & però maggior quantita sara A, che H. Perilche la A. maggiore al la C, hauera maggior proportione che la H, minore, Ma come è da H a C, cosi equamente (per la vigesimaterza propositione) è *D* ad *F*, (che dalla construttione si è inteso da G a C esser fatto come da *D*. ad E. & da H a G. come da E ad *F*) Perilche è dunque ancora maggior proportione quella di A, a C, che quella di *D* ad *F*, che si voleua mostrare.

A	24	*D*	
B	6	E	
C	4	*F*	
G	$5\frac{1}{3}$		
H	14		

Propositione 33. Theorema 33.

SE sia maggior proportione del tutto al tutto, che dal leuato al leuato, ancora dal restante al restante sarà maggior proportione che dal tutto al tutto.

Sia maggior proportione dal tutto A B. al tutto C *D*. che dal leuato *A*. al leuato C, si dice che dal restante *B*. al restante *D*. sara ancora maggior proportione che dal tutto *A B*. al tutto C *D*. Per dimostrarlo. Essendo maggior proportione da *A B*. 40. a C *D*. 28. che da *A* 16. a C 15, sara ancora permutatamente (per la vigesimasettima propositione) maggior proportione da *A B*. 40. a *A*. 16. che da C *D*. 28. a C 15. perilche conuersamente (per la trigesima propositione) minor proportione sara da *A B* 40. a *B*. 24. che da C *D*. 28. a *D* 13; Et permutatamente (per la vigesimasettima propositione) ancora minor proportione sara da *A B*. 40. a C *D*. 28. che da *B* 24. a *D* 13. che è quanto a dire maggior proportione sara da *B* 24. a *D* 13. che da *A B*. 40. a C *D*. 28. cioè il restante *B*. al restante *D*. hauera maggior proportione, che il tutto *A B*. al tutto C *D*. che è quanto si voleua mostrare.

A 40		*B*
16		24
C 28		*D*
15		13

Propo-

Propositione 34. Theorema 34.

QVando saranno quante si vogliono quantità da vna banda, & altre tante dall'altra banda, & che dalla prima dall'vna banda alla prima dall'altra banda sia maggior proportione, che dalla seconda alla seconda, & questa sia maggior proportione che dalla terza alla terza, & cosi seguendo, all'hora il composto, o somma delle quantità tutte che siano da vna banda al composto, o somma delle quantità tutte che sono dall'altra banda hauerà maggior proportione che tutte quelle da vna banda, lassata la prima a tutte quelle che sono dall'altra banda lassata la prima, ma hauerà minor proportione che la prima quantità da vna banda alla prima quantità dall'altra banda, ma maggiore proportione che l'vltima quantità da vna banda, all'vltima quantità dall'altra banda.

Siano prima le tre quantità A B C, sinistre, & altre tre D E F, destre, & sia maggior proportione dalla prima A. alla prima D. che dalla seconda *B*. alla seconda E, & questa proportione delle seconde, sia anco maggiore che della terza C, alla terza F, Si dice che la proportione del composto, o somma di tutte le sinistre A *B* C. al composto, o somma di tutte le destre D E F. sarà maggiore della proportione, che è dalle sole *B* C, sinistre cioè lassata la prima A. alle sole E F. destre lassata cioè la prima D; ma sarà proportione minore che di A prima sinistra a D. prima destra; ma finalmente poi maggiore che di C, vltima sinistra ad F, vltima destra. Dimostratione. Perche da A a D. è maggior proportione che di *B* ad E, sarà ancora permutatamente (per la vigesimasettima) maggiore di A. a *B*. che di D. ad E, Et ancora congiuntamente (per la vigesimaottaua) sarà maggior proportione dal composto di A, & *B*. alla sola *B*. che dal composto di D, & E, alla sola E, onde di nuouo permutatamente maggior proportione sarà dal composto di A. & *B*. al composto di D. & E, che dalla sola *B*. alla sola E, Et cosi hauendo la totale A *B*. alla totale D E, maggior proportione che la leuata *B* alla leua E, ne segue (per la antecedente trigesimaterza propositione) che anco la restante A. alla restante D. habbi maggior proportione che la totale A *B*, alla totale D E, Per la medesma ragione, maggior proportione sarà dalla sola *B*. alla sola E. che dal composto totale di *B* C, al composto totale di E F. perilche molto maggior proportione sarà da A a D. che dal composto *B* C, al composto E F, Et perciò permutatamente maggior proportione sarà da A. al composto *B* C, che da *D*. al composto E F, Et anco congiuntamente maggior proportione sarà da tutte le A *B* C, a tutte le *D* E F, che dal composto delle sole *B* C, al composto delle sole E F, Et di nuouo permutatamente maggior proportione sarà dalla somma di tutte le A *B* C sinistre, alla somma di tutte le *D* E F, destre che dal composto delle sole *B* C, al composto delle sole E.F, che è il primo proposito. Hora perche maggior proportione è dal tutto A *B* C, al tutto *D* E F, che dal leuato *B* C, al leuato E F, ne segue (per la trigesimaterza propositione) che dal restante A. al restante *D*. sarà pure maggior proportione che dal tutto A *B* C, al tutto *D* E F, cioè che dal composto delle tre quantità sinistre A *B* C, al composto delle tre destre *D* E F, è minor proportione che dalla prima sinistra A. alla prima destra *B*, che è il secondo proposito. Et perche è maggior proportione da *B* ad E che da C ad F, sarà permutatamente ancora maggior proportione da *B* a C, che da E ad F, & congiuntamẽte sarà pure maggior proportione dalla somma *B* C, alla sola C, che dalla somma E F, alla sola F; Et di nuouo permutatamente maggior proportione sarà dalla somma *B* C, alla somma E F, che da C, ad F, Ma si è mostrato essere maggior proportione da tutta la somma A *B* C, a tutta la somma *D* E *F*, che dalla somma *B* C, alla somma E *F*, perilche molto maggior proportione sarà da tutta la somma A *B* C, a tutta la somma delle *D* E *F*, che dalla vltima quantità C, alla vltima *F*. che è il terzo proposito.

A 9 ———— *D* 4 ————

B 8 ———— E 4 ————

C 10 ———— F 7 ————

G ———— H ————

Siano hora quattro quantità A *B* C G, da vna banda, & altre quattro *D* E *F* H, dall'altra banda hauenti le istesse conditioni dette, cioè che dalla prima A. alla prima *D*. sia maggior proportione che dalla seconda *B*. alla seconda E, & questa maggiore che la proportione della terza C, alla terza *F*, & questa maggiore che la proportione della quarta G. alla quarta H. Si dice che pure in esse si concluderanno auenire ciascuna delle tre qualità, o cose proposte, Perche essendosi gia mostrato quello che si propone quando sono tre sole quantita da ciascuna banda, ne segue, intese le tre B C G, sinistre, & le tre E *F* H destre, che maggior proportione

tione è da B ad E che dal composto delle tre B C G. al composto delle tre E F H; onde molto maggiore sarà la proportione di A. a D. che dalle B C G alle E F H, & permutatamente maggior proportione ancora sarà da A. alle B C G. che da D. alle E F H; & congiuntamente sarà pure maggior proportione da tutte le quattro A B C G. alle tre B C G. che da tutte le quattro D E F H. alle tre E F. H, & anco permutatamente dalle quattro A B C G, alle quattro D E F H; sarà ancora maggior proportione che dalle tre B C G, alle tre E F H. che è il primo proposito. Et hora essendo la proportione del tutto A B C G. al tutto D E F H, maggiore che dal leuato B C G al leuato E F H, sarà ancora dal restante A. al restante D. maggior proportione che dal tutto A B C G, al tutto D E F H, che è il secondo proposito. Ancora perche in tre quantità da ciascuna banda si è dimostrato maggior proportione essere dalla somma delle tre alla somma delle tre, che dall'vltima all'vltima, Intese le tre quantità sinistre B C G. & le tre destre E F H, maggior proportione sarà dalle tre B C G, alle tre E F H, che da G, ad H. Et perche anco maggior proportione è dalle quattro A B C G, alle quattro D E F H, che dalle tre B C G. alle tre E F H, come si è mostrato, molto maggiore sarà la proportione delle quattro A B C G, alle quattro D E F H, che dall'vltima G all'vltima H. Et con questo modo concluderemo auuenire quello che si propone in cinque quantità da ogni banda mediante l'hauerlo dimostrato auuenire in quattro, Et poi in sei mediante le cinque, Et in sette mediante le sei, Et così seguendo per ordine finche si comprenda tutto il numero delle quantità che fussero intese da ciascuna banda.

FINE DEL QVINTO LIBRO.

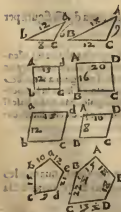
DE

DE GL'ELEMENTI D'EVCLIDE.

LIBRO SESTO.

IN questo sesto libro doppo l'hauer diffinito quello che s'intenda per figure rettilinee simili, & per superficie di lati reciproci, Et che sia il diuidere vna linea nella proportione hauente il medio, & dui estremi, Et quale si dica essere l'altezza d'vna figura: Et l'essere vna proportione composta da due, o più proportioni. Si viene a dimostrare la proportione che hanno fra loro i Triangoli, & paralellogrammi di eguali altezze, & quello che auenga alli Triangoli segati con linee equidistanti alle loro basi, Et alli Triangoli ne' quali alcun suo angolo si seghi per mezo, Et che li Triangoli Equiangoli sono di lati proportionali. Et conuersamente che essendo di lati proportionali sono equiangoli; Et della proprietà delli Triangoli rettangoli diuisi da vna retta che vada dal suo angolo retto perpendicolare alla base, Dipoi si insegna come fra due linee rette si troui vna media proportionale; Et a due rette la terza continua proportionale, Et anco a tre rette la quarta proportionale; Et di vna retta pigliare vna data parte, Et diuidere vna retta a similitudine della diuisione d'vn'altra retta: Poi si dimostrano alcune qualità intorno alli lati delli Paralellogrammi, & delli Triangoli eguali, Et la proprietà di quattro rette proportionali, o di tre rette continue proportionali; Et le proportioni che hanno fra loro i Triangoli, & le superficie simili, Poi come si formi vna superficie simile ad vn'altra, Et alcune proprietà delle superficie simili, & proportioni loro, & de' lati loro, Et si segue a mostrare come si formi vna superficie simile ad vna proposta, & eguale ad vna data, Et come sopra ad vna retta si formino paralellogrammi che habbino diuerse qualità proposte; Dipoi come si diuida vna retta nella proportione del medio, & dui estremi, Et che nelli Triangoli rettangoli le superficie simili fatte sopra alli dui lati continenti l'angolo retto, sono eguali a quella che sia fatta sopra alla subtensa ad esso angolo retto; Et finalmente che nelli Cerchi eguali la proportione delli settori in essi, & degli angoli, o al centro, o alla circonferenza è eguale alla proportione delli archi che sono basi di essi angoli, o Settori. Onde perche questo libro contiene Dottrina amplissima, & applicabile al-l'vso vtilissimamente, si potrà con diligente studio apprenderlo, con quello di più che noi vi andaremo aggiungêdo, accioche i Prattici se ne possino facilmête seruire nelle diuerse occorrêze.

Diffinitione prima.

FIgure rettilinee simili si dicono essere quelle, che hanno gli angoli ad vno ad vno eguali, & li lati corrispondenti fra loro attorno ad essi angoli eguali proportionali.

Che nelli dui Triangoli a, b, c, A. B, C, essendo l'angolo a. dell'vno eguale all'angolo A. dell'altro, il b. al B, & il c. al C, & di più che dal lato a b, al b c, nell'vno sia come dal lato A B. al B C, dell'altro, & dall'a c, al c b, come dall'A C, al C B. perciò questi dui Triangoli si dicono essere simili, Cosi anco i due paralellogrammi rettangoli a b c d, A B C D. si dicono essere simili, Et li dui non rettangoli a b c d, A B C D. mentre che ciascuno delli dui angoli ottusi a, & c, dell'vno, siano eguali alli A. & C, ottusi dell'altro, & ciascuno delli dui acuti b, & d, eguale a ciascuno delli dui acuti B. & D. Et nelle due figure rettilinee a b c d e, A B C D E, similmente quando hauendo elle i lati proportionali, anco ciascun angolo dell'vna per ordine sia eguale a ciascun'angolo corrispondentegli nell'altra, elle si chiamano, o si dicono essere simili, Et perciò tutti i Triangoli Equilateri sono simili fra loro, tutti i Quadrati, tutti i Pentagoni equilateri, & equiangoli, & li Esagoni, & altre figure equilatere, & equiangole.

Diffinitione seconda.

Figure reciproce, o reciproche si dicono essere quelle nelle quali dal primo lato dell'una al primo lato dell'altra è come dal secondo lato dell'altra al secondo lato dell'una, cioè nell'una sono le due estreme prima, & quarta di quattro linee rette proportionali, & nell'altra le medie seconda, & terza d'esse quattro linee proportionali.

Siano i dui Paralellogrammi A. & B. tali che dal lato 6. dell'A. al 12. del B. sia come dal 4. di esso B. all'8. dell'A. Ouero dal 4. all'8. come dal 6. al 12. O dal 12. al 6. come dall'8. al 4. O dal 4. al 6. come dall'8. al 12. cioe che i dui lati d'vn paralellogrammo siano le estreme, & i dui lati dell'altro le medie di quattro linee proportionali, questi si chiamano paralellogrammi reciproci, come anco si diranno Triangoli reciproci R, & S. Essendo li dui lati dell'vno similmente le due estreme, & i dui lati dell'altro le due medie di quattro linee proportionali (cioe che il dutto de i dui lati dell'vno sia eguale al dutto de i dui lati dell'altro, che in quattro quantità proportionali sempre auuiene che il dutto delle due medie è eguale al dutto delle due estreme come si dimostrarà nella 16. propositione di questo libro.

Diffinitione terza.

Vna linea retta si dice essere segata, o diuisa nella proportione del medio, & dui estremi, quando la proportione di tutta la linea alla sua maggior parte sia eguale alla proportione che è dalla maggior parte alla minore, o vogliamo dire quando la maggior parte è media proportionale fra la totale, & la parte minore.

Se dalla retta a c. 10. diuisa in a r, & r c, sia tal proportione alla sua maggior parte a r, quale è dalla maggior parte a r. alla minore r c. all'hora questa retta a e, si dice essere diuisa nella proportione del medio, & dui estremi, che la parte maggiore a r, radice 125. meno 5. (cioe quasi 6 [illegible]) è media proportionale fra la totale linea a c. 10. & la parte minore r c. 15. meno rad. 125. (cioe 3 [illegible], & più) & però il quadrato o dutto in se stessa della parte maggiore a r. qual quadrato è 150. meno radice 12500. (cioe 38 [illegible], & alquanto piu) è eguale al dutto della linea totale 10, nella parte minore 15, meno radice 125; che questa è la proprietà di tre quantità proportionali (come sono la retta totale, la sua parte maggiore, & la parte minore) di essere il dutto delle due estreme eguale al quadrato della media come si dimostrarà nella 17. propositione di questo libro.

a r c

Diffinitione quarta.

L'Altezza di ciascuna figura si dice essere quella retta, che dalla cima d'essa figura peruiene perpendicolarmente alla sua base.

Che del Triangolo a b c, posto base la b c, ad essa dalla cima a (che è opposita alla base) essendo tirata la perpendicolare a p. (intesa allungata la base se occorra finche la perpendicolare arriui su l'allungamento) questa perpendicolare a p. si chiama altezza d'esso Triangolo a b c. Che se ponessimo per base la a c, & perciò il punto b. essere la cima del Triangolo, all'hora la b p. perpendicolare ad essa base (prolungata occorrendo) saria l'altezza del Triangolo. Ma posta base il lato ò linea a b. la cima del Triangolo saria il punto c. & altezza la retta c p. da essa intesa cadere, o peruenire perpendicolarmente alla posta base. a b,

Diffinitione quinta.

Vna data proportione si dice essere composta da due, o più proportioni quando le quantità d'esse proportioni moltiplicate fra loro producono la quantità della proportione data.

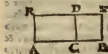
La quantità d'vna proportione si dice essere il denominatore d'essa qual denominatore è il numero

mero delle volte che l'antecedente contiene il conſequente, & però è quel numero che reſulta a partire l'anteeedente per il conſequente, Et perche quando fra dui termini antecedente A, cioe, & conſequente C. d'alcuna proportione ſono poſti vno, o più numeri, & conſiderati come termini d'intermedie proportioni, quella proportione che è dal termine A. al termine C. ſi dice eſſere compoſta dalle proportioni intermedie (che ſe fra A 90, & C 10. (continenti la proportione che ſi chiama nonupla dal ſuo denominatore 9. che è quello che reſulta a partire A 90. per C 10, & moſtra il numero delle volte 9. quali l'Antecedente 90, contiene il Conſequente 10, & queſto 9. ſi chiama la quantità d'eſſa proportione nonupla) poneremo poniamo 30 B conſiderando poi queſto 30. come conſequente all'A 90. & come antecedente al C. 10, haueremo due proportioni che faranno l'vna da 90. a 30, & ſarà tripla (che il ſuo denominatore è 3. & perciò queſto 3. ſi dice eſſere o moſtrare la quantità d'eſſa proportione) & l'altra ſarà da 30. a 10, che anc'ella è tripla (eſſendo pur 3. il ſuo denominatore, o quantità d'eſſa proportione) in queſte due proportioni triple ſi dirà eſſere diuiſa la nonupla, & perciò eſſa nonupla ſi dirà eſſere compoſta dalle due triple come da parti che la reintegrano; Hora conſiderato che da 90 A. a 30 B. il ſuo denominatore è 3, perche A 90, contiene B, queſte volte 3. Et da B 30, a C. 10, il ſuo denominatore è 3. perche B. contiene il C, eſſe volte 3, ſi conoſce che ſe 90. primo contiene 30. ſecondo 3. volte, & che 30. ſecondo contenga 10. terzo 3. volte, è neceſſario che A. primo côtēga C. terzo 3. volte 3. volte o vogliamo dire 3. volte 3. ma 3. volte 3. ſignifica pigliare 3. per volte 3. il che è moltiplicare 3. via 3. & produce 9. però l'A 90. contenirà il C. 10; le 9. volte moſtrata da queſto prodotto 9. & perciò queſto 9. numero delle volte che l'antecedente A. 90. contiene il ſuo conſequente C. 10. ſarà il denominatore, o la quantità della proportione di A 90. a C. 10. che è compoſta dalle due di A 90. a B 30, & di B. 30. a C. 10; Et perche eſſo 9. denominatore della proportione di 90, a 10. ſi vede produrſi dalla moltiplicatione fra loro di 3. & 3, denominatori delle due proportioni di 90. a 30, & di 30. a 10. componenti la proportione detta di 90. a 10, di qui è che in queſta Diffinitione Vna data proportione, ſi dice eſſere compoſta da quelle due, o più le quantità (o denominatori delle quali) moltiplicate fra loro producono la quantità, o denominatore della data; Et ſe fra 90, & 10. ſi ponano dui termini, poniamo 60, & 20, coſi, 90. 60. 20. 10, conſiderando le tre proportioni di 90. a 60, che ha per denominatore $1\frac{1}{8}$, & di 60. a 20. che ha per denominatore 3. & da 20. a 10. che ha per denominatore 2. perche 90. contiene 60, volte $1\frac{1}{2}$. & 60. il 20. volte 3. ſi vede che 90. contiene di neceſſità il 20. le volte $1\frac{1}{2}$. volte 3, cioè volte $4\frac{1}{2}$. (che $1\frac{1}{2}$ via 3. o volte 3. fa $4\frac{1}{2}$: & perche 20. contiene il 10, volte 2, il 90. contenirà eſſo 10. le volte $4\frac{1}{2}$, volte 2. cio è 9 volte, (che $4\frac{1}{2}$. via 2. o volte 2. fa 9) onde 9. prodotto da queſti tre numeri $1\frac{1}{2}$. 3. 2. denominatori delle 3. proportioni partiali dette ſarà il denominatore della proportione totale contenuta, da eſſe 3. dette, Et ſe fra li medeſimi 90, & 10. continenti la proportione nonupla ſiano poſti quanti numeri ſi voglino facēdoſi, 90, 80. 120, 50, 200, 150, 30, 12, 8. 10, che eſſi termini, o numeri per eſſere dieci formaranno noue proportioni (cioè vna di mãco di 10. numero de' termini) i denominatori delle quali ſono i noue numeri ſeguenti $1\frac{1}{8}$ $\frac{2}{3}$. $2\frac{2}{5}$. $\frac{1}{4}$. $1\frac{1}{3}$. 5. $2\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $\frac{4}{5}$. Queſti moltiplicati fra loro, & ſaranno 8. moltiplicationi (cioè vna di manco di 9. numero della moltitudine loro) produranno il 9. che è denominatore della proportione di 96. primo termine a 10. vltimo, & eſſa proportione nonupla ſi dirà eſſere compoſta dalle dette 9. proportioni intermedie, i denominatori delle quali moltiplicati fra loro producono il 9. denominatore d'eſſa nonupla.

Diffinitione ſeſta.

VN Parallelogrammo applicato ad vna data retta ſi dice mancare in vn parallelogrammo deficiente, quando l'applicato non occupa tutta la linea data: Ma ſi dice eccedere in un parallelogrammo eccedente, quando l'applicato occupa più, o uogliamo dire è più lungo, o ha baſe maggiore della retta data alla quale è applicato in modo tale che

che il parallellogrammo deficiente in l'vn modo, o l'eccedente nell'altro modo habbi la medesima altezza con il paralellogrammo applicato, & con esso formi vn totale paralellogrammo,

Che essendo data la retta *A B*.& sopra ad essa formato il paralellogrammo A D.quale non occupi in lunghezza tutta la data A *B*. ma vi manchi, o resti la parte C *B*. & tirata dall'estremo *B*. della data la *B* S,equidistante alla C D. finche concorra con la R D. allungata formandosi il paralellogrammo C S.vnito all'A D.all'hora il paralellogrammo A D.si dice applicato alla data A B.& deficiente nel paralellogrammo C S. cioè delli dui A D. C S. l'A D. si chiama l'applicato alla A B.& il C S.si chiama il deficiente. Ma se la data retta fosse solo la A C. & si formasse il paralellogrammo A S. che in lunghezza occupasse tutta la data A C, & anco passasse oltre arriuando in *B*. all'hora dal termine C. della data tirando la C D. equidistante alla *B* S,diuidendo il paralellogrammo A S diuiso nelli dui A B.C S; di essi il totale A S. si diria applicato alla data A C, & eccedente nel paralellogrammo C S.& l'A S.si chiamarà applicato.& il C S.eccedente; Questo eccedente mò può essere di lati eguali, o ineguali, & rettangolo, o nò rettangolo; cioè, o Quadrato, o Quadrangolo rettangolo, ouero Rombo,o Romboide.

Propositione 1. Theorema, o Speculatione 1.

I Triangoli,& li Paralellogrammi,che hanno una medesma altezza,hanno fra loro la conuenienza,o proportione,che è fra le basi loro.

Siano li dui Triangoli A B C,a b c,& posti(per commodità della intelligenza)con le loro basi A B, a b, sopra ad vna istessa linea retta m n, & voltati da vna medesima banda superiore quali dui Triangoli siano d'altezze eguali (cioe che la linea retta che dalla sommità C. del Triangolo A B C,venga perpendicolarmente alla base A B.(o suo allungamento se occorra allungarla)sia eguale alla retta che dalla sommità dell'altro Triangolo a b c, venga perpendicolarmente anc'ella alla base a b.(o suo allungamento quando occorra allungarla)che perciò dalla sommità C. dell'vno,alla sommità c,dell'altro tirata la retta C c,ella sarà equidistante alla inferiore m n,doue sono le basi d'essi dui Triangoli,perilche essi dui Triangoli saranno fra due rette equidistanti; Hor si dice che la proportione dell'vn Triangolo A B C,all'altro Triangolo a b c,è come dalla base A B. dell'vno, alla base a b. dell'altro; Per dimostrarlo; Alla base A *B*,si continuino,o si seguino su la retta B m,quante altre rette eguali ad essa A *B* ci piaccia,o se ne pigli vna sola. & sia la A D. che così tutta la D B. sarà doppia, o vogliamo dire moltiplice dupla alla base A B. & dal punto D.alla sommità C. si tiri la retta D C, che così il Triangolo D A C, sarà eguale all'A B C, (per la 38.del primo)perche sono sopra a basi eguali,& fra due medesme paralelle(che arriuano ad vna istessa sommità, o vogliamo dire altezza) onde il composto loro, cioe tutto il Triangolo C D B,sarà doppio al solo A B C,perilche così è moltiplice doppio il Triangolo C D B,all'A B C, come è la base, o retta D B alla sola A *B*. Ancora nell'altro Triangolo a b c,alla sua base a b. si continuino alcun'altre linee quante si voglino, eguali ciascuna d'esse alla base a b, & siano le due b o, o s, che così la totale a s, sarà tripla, o vogliamo dire moltiplice tripla alla base a b. & dalli punti r,& s.alla sommità c,si tirino le rette o c,& s c;che così li tre Triangoli fatti sopra alle tre basi eguali a b,b o,o s, & fra le istesse due equidistanti (cioe che arriuano ad vna istessa sommità, o altezza)saranno eguali fra loro,onde il composto loro,cioe tutto il Triangolo c a s, sarà triplo al solo Triangolo c a b, si come tripla è la retta, o base a s, alla base a b,cioe perciò così è moltiplice(triplo) il Triangolo c a s.al c a b. come è moltiplice la base a s.alla a b;Hora considerati i dui Triangoli C D B, & c a s,posti fra le due rette equidistanti C c,m n,se la base D B. dell'vno sia eguale alla base a s. dell'altro ne segue (per la 38. del primo) che anco l'vn Triangolo C D B.sia eguale all'altro c a s,ma se la base D B.sia maggiore della base a s,ancora il Triangolo

golo C D B, farà maggiore del c a s. Et quando la base D B sia minore d ella base a s, all'hora il Triangolo C D B. farà minore del c a s, cioè quello che auuiene alla base D B. rispetto alla base a s. in esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene anco al Triangolo C D B. rispetto al Triangolo c a s. in esserli similmẽte eguale, o maggiore, o minore. Onde intese le quattro quantità C A B. Triangolo prima c a b. Triangolo seconda, A B. base terza, & a b, base quarta. per che essendo alla prima, & terza tolti i moltiplici egualmente (doppij) che sono il Triangolo C D B & la base D B. & alla seconda, & quarta i moltiplici egualmente (tripli) che sono il Triangolo c a s. & la base a s, & si è mostrato che quello che auuiene al moltiplice della prima, rispetto al moltiplice della seconda, cioè al Triangolo C D B. rispetto al Triangolo c a s, In esserli eguale, o maggiore, o minore, auuiene anco di necessità sempre al moltiplice della terza rispetto al moltiplice della quarta, cioe alla retta, o base D B. rispetto alla retta, o base a s, in esserli similmente eguale, o maggiore, o minore, ne segue che la proportione della prima quantità alla seconda sia come della terza alla quarta, cioè che dal Triangolo C A B, al Triangolo c a b, sia come dalla base A B. alla base a b. Hora se sopra alle basi A B, & a b. siano fatti dui paralellogrammi di eguali altezze, & sia che arriuino alla retta C c, o suoi allũgamẽti, essẽdo l'vno il C A B R, & l'altro il c a b r b r, si prouarà pu re nel medesmo modo (pigliando cioe i moltiplici egualmente al paralellogrammo C A B R, & alla sua base A B, Et anco i moltiplici egualmẽte al paralellogrammo c a b r, & alla sua base a b;) che la proportione del paralellogrammo C A B R, al c a b r, è come dalla base A B. alla base a b; Ouero facilmente considerato che il paralellogrammo C A B R, è doppio al Triangolo C A B, (per la 41. del primo) essendo fatti sopra ad vna istessa base, A B, & fra medesme rette equidistanti, Et che per la medesma causa anco il paralellogrammo c b a r, è doppio al Triangolo c a b, cioè che cosi è moltiplice doppio il paralellogrammo C A B R, al Triangolo C A B, sua parte (o mità) come anco è pure similmente moltiplice doppio il paralellogrammo c b a r, al Triangolo c a b, sua parte (o mità) ne segue (per la 15. del terzo) che la proportione del paralellogrãmo C B A R, al Triangolo C A B sia come la proportione del paralellogrammo c b a r. al Triangolo c a b, ma ancora si come è dal primo Triangolo C A B. al secondo Triangolo c a b, (cosi è dalla prima base A B. alla seconda base a b. però (per la 11. del quinto) ancora la proportione del primo paralellogrammo C A B R, al secondo c a b r, sarà come della retta A B. base del primo alla retta a b, base del secondo, Onde si è concluso quanto si è proposto di mostrare.

Et perche di ciascun Triangolo (che è la mità del paralellogrammo rettangolo che per vn lato o lunghezza habbi la base del Triangolo, & per l'altro lato, o larghezza, habbi l'altezza, o vogliamo dire la perpendicolare d'esso Triangolo) la superficie è la mità del dutto della base nella sua altezza, o perpendicolare; che delli paralellogrammi rettangoli la superficie è il dutto totale della lunghezza (o base) nella sua larghezza (o altezza) si può dire in vniuersale che la proportione d'vn Triangolo all'altro, che è l'istesso che dire la proportione della superficie dell'vno alla superficie dell'altro è come la mità del dutto della base nell'altezza dell'vno, alla mità del dutto della base nell'altezza dell'altro, Et nelli Paralellogrammi rettangoli la proportione dell'vno all'altro, o vogliamo dire della superficie dell'vno alla superficie dell'altro è come il dutto delli dui lati continenti vno de gl'angoli retti dell'vno, al dutto delli dui lati continenti vno de gli altri retti dell'altro.

Propositione 2. Theorema 2.

SE vna linea retta che seghi i dui lati d'vn Triangolo sia equidistante all'altro lato, ella segarà essi dui lati proportionalmente, Et conuersamẽte se la linea retta seghi i dui lati del Triangolo proportionalmente ella sarà equidistante all'altro lato.

Nel Triangolo A B C, sia che la retta D E, segante i dui lati A B, A C, sia equidistante al restan te lato o base B C, si dice che essi dui lati saranno segati proportionalmente, Per dimostrarlo. Dalli estremi B, & C. della base alli punti E, & D, del segamento si tirino le due rette B E, C D, & intesi i dui Triangoli B D E, C E D. perche sono sopra ad vna istessa base D E, & fra due medesme linee paralelle D E, B C, essi (per la 37. del primo) saranno fra loro eguali, & perciò (per la 7. del quinto) la proportione di ciascun d'essi al Triangolo A D E sarà vna istessa, ma dal B D E, all'A D E. (intesi hauere le basi su la retta A B. & hauere la commune sommità in E, cioè essere di eguale altezza, o fra medesme due rette equidistanti, che si può imaginare dal punto E essere tirata vna retta equidistante alla A B) è per la prima di questo, come dalla base B D. alla base D A. & similmente per la medesma ragione dall'altro Triangolo C D E, all'istesso Triangolo A D E (intesi ha-

nere le basi su la retta A C,& la commune sommità nel punto D) è come dalla base C E, alla base E A(Onde e ssendo dalla base C E,alla E A,come dal Triangolo C D E,all'A D E,& anco dal Triangolo B D E,all'istesso A D E,come dal C D E,all'A D E,ne segue(per la 11.del quinto) che la proportione della base C E,alla E A,sia come del Triangolo B D E,all'A D E;ma anco la proportione della base B D.alla D A. è come del Triangolo B D E, all'A D E. però (per la detta 11. del quinto) la proportione della base B D. alla D A. sarà come della base C E,alla E A. & conuersamente dalla A D.alla B D,sarà come della A E,alla E C;perilche li dui lati A B. A C,del Triangolo sono segati proportionalmente dalla retta D E,equidistante alla base,come si è proposto di mostrare.

A

D E

B C

Ancora quando vna retta D E seghi i dui lati A B, A C del Triangolo proportionalmente;(cioe che fra le due parti d'vn lato sia la proportione istessa che è fra le due parti dell'altro lato) si dice che la segante D E, sarà di necessità equidistante alla base B C, Perche essendo dalla A E alla E C,dal supposito come dalla A D.alla D B.& ancora dal Triangolo A D E,al Triangolo B D E(per la prima di questo)similmente come dalla A D. alla D B. ne segue (per la 11.del quinto) che queste due proportioni quali sono eguali ad vna istessa proportione siano eguali fra loro, cioe che la proportione del Triangolo A D E al B D E, sia eguale alla proportione della retta A E, alla E C,ma ancora a questa proportione della A E, alla E C,è eguale la proportione del Triangolo A D E,al C D E(per la prima di questo)però(per la 11.del quinto)ne segue che alla proportione del Triangolo A D E, al Triangolo B D E, sia anco eguale la proportione di detto Triangolo A D E,al Triangolo C D E, cioe che il Triangolo A D E, a ciascuno delli dui B D E. C D E, habbi vna istessa proportione, perilche essi dui Triangoli B D E,C D E (per la 9.del quinto)sono eguali fra loro, & perche essi hanno o sono sopra ad vna istessa base B C,ne segue(per la 39.del primo)che siano anco fra medesme rette equidistäti,cioe che la base B C. & la retta D E, segante i lati del Triangolo proportionalmente siano fra loro equidistanti,onde è manifesto quanto si voleua mostrare.

Propositione 3. Theorema 3.

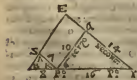
SE vn'Angolo d'alcun Triangolo sia segato,o diuiso per mezzo da vna linea retta,che peruenga alla base segandola, le parti segate d'essa base haueranno la istessa proportione che hanno i lati del Triangolo a loro corrispondenti,o congiunti angolarmente; Et per il conuerso se la proportione delle due parti della base habbino la proportione che hãno i dui lati del Triangolo, all'hora la detta linea retta che sega la base venendo dall'angolo oppostoli segarà esso angolo in due parti eguali.

Sia nel Triangolo A B C,la retta A D.che partẽdosi dall'angolo A.lo diuida per mezzo,& peruenga alla oppostali base in D segandola nelle due parti B D.sinistra,& D C,destra,Si dice che la proportione d'esse due parti di base è la istessa che la proportione delli dui lati congiuntili angolarmente del Triangolo,cioe che da B D a D C,è come del lato A B,al lato A C;Per dimostrarlo, Da vno delli dui termini della base,& sia dal B.si tiri vna retta dalla parte superiore cioe verso A. equidistante alla segante A D.finche cõcorra con il lato C A.allũgato,& sia la B E;(qual cõcorso auuiene di necessità, perche essendo D A, & B E, equidistanti segate dalla C B , l'angolo C D A . esteriore è eguale all'angolo E B C, interiore oppostoli dalla medesima parte (per la 29. del primo)onde a ciascuno d'essi inteso giunto l'angolo C,la somma delli dui E B C,& C.sarà eguale alla somma delli dui C D A. & C. ma la somma di questi dui C D A. & C. (che sono dui angoli del Triangolo A D C.è(per la 32.del primo)minore di dui retti,però anco la somma delli dui E B C, & C.interni da vna medesima parte delle due rette E B, A C, segate dalla C B. sarà minore di dui retti, perilche esse due rette E B, A C, allungate da quella parte superiore doue la somma cioe delli dui angoli interni è minore di dui retti concorreranno insieme (per la 5.petitione) Et perche le due rette equidistanti B E,D A.sono segate dalla E C,l'angolo E,interno(per la 29.del primo)sarà eguale all'esterno D A C,dalla medesima parte,& però esso angolo E sarà ancora eguale all'angolo D A B.(che è eguale al D A C.per essersi diuiso il B A C,in due parti eguali che sono li detti D A C,D A B)ma a questo D A B.è anco eguale l'angolo A B E(per la 29.del primo) che sono coalterni delle due rette equidistanti B E,D A.segate dalla A B.però ancora l'angolo E, sarà egua-

rà eguale all'A B E, onde nel Triangolo A B E, intesa base la retta B E, perche li dui angoli E, & B sopra ad essa base vengono ad essere eguali, ne segue (per la 6. del primo) che li suoi dui lati A B, A E siano eguali fra loro onde la retta C A. a ciascuno d'essi (per la 7. del quinto) hauerà vna medesima proportione, cioe la proportione di C A. ad A B. sarà come di C A. ad A E; ma ancora come è da C A. ad A E, cosi è da C D. a D B: (per la 2. di questo) che nel Triangolo C B E, la retta A D, segante i dui lati C E, C B, è equidistante alla intesa base B E; però come è da C D. a D B cosi è da C A. ad A B. o conuersamente da B D. a D C, parti sinistra & destra della base B C, del nostro Triangolo A B C, è la istessa proportione che è dal lato sinistro A B. al destro A C. onde è chiara questa parte della presente propositione. Si dice ancora che in esso Triangolo A B C, se la retta A D. che venendo dall'angolo A. prouiene alla base B C, la diuida in due parti proportionali alli dui lati ad esse congiunti angolarmente, cioe che dalla parte sinistra B D. alla destra D C, sia la istessa proportione che è dal lato sinistro B A. al destro C A; all'hora di necessità l'angolo A. sarà anco diuiso per mezzo dalla medesma linea A D. detta, cioe che l'angolo D A B. sarà eguale al C A D; Per dimostrarlo, Tirisi la retta B E o intendasi come nella superiore figura equidistante alla D A, & allunghisi il lato C A. finche concorra con essa B E, & sia in E (che il concorso loro già si è prouato douere auuenire) & inteso il Triangolo C B E, & di esso presa per base la B E, la A D. ad essa base equidistāte segarà i lati C E, C B. proportionalmente (per la antecedente 2. propositione) però dal la parte B D. alla D C, dell'vno sarà come dalla parte E A. alla A C. dell'altro, ma anco dal supposito come da B D. a D C, cosi è da B A a C A però da E A. ad A C, sarà medesmamente come da B A. ad A C, cioe, & E A, & B A. ad vna istessa A C, haueranno vna istessa proportione, perilche esse due rette E A, & B A. saranno eguali l'vna all'altra (per la 7. del quinto) & perciò inteso il Triangolo A B E, egli sarà Equierure cioe di dui lati eguali essendo base la retta B E, & perciò li dui angoli sopra alla base, cioe E, & A B E, saranno eguali l'vno all'altro, ma d'essi l'E, è eguale al D A E (l'intrinsico cioe all'intrinseco opposto li dalla medesma parte delle due equidistanti B E, D A. segate da la E C) & l'A B E, è eguale al B A D. (l'vno cioe all'altro a lui coalterno delle due equidistanti B E, D A, segate dalla B A) perilche si come li E, & A B E, sono eguali fra loro, ancora li D A C, & B A D. a questi eguali ciascuno di loro, saranno similmente eguali fra loro, ma essi D A C, B A D. sono le due parti nelle quali è diuiso l'angolo B A C, dalla retta A D. & sono eguali però detto angolo B A C, sarà diuiso in due parti eguali, Et questa è l'altra parte della presente propositione, onde è chiaro quanto si voleua dimostrare.

Propositione 4. Theorema 4.

NElli Triangoli Equiangoli li lati che sono intorno, o contengono li angoli dell'uno sono proportionali alli lati loro corrispondenti che contengono li angoli dell'altro, & corrispondenti sono i lati, o si intendono essere i lati che si oppongono, o sottotendono ad angoli eguali.

Siano i dui Triangoli A B R, a b r, equiangoli, cioe sia l'angolo A. dell'vno eguale all'angolo a, dell'altro, & li chiamarono (per commodità) angoli primi, Il secondo angolo B. dell'vno eguale al secondo b. dell'altro, & consequentemente il terzo angolo R, dell'vno al terzo angolo r. dell'altro, & anco circa alli lati chiamisi per comodità nell'vn Triangolo il lato B E, primo che si oppone, o che è rincontro all'angolo A. primo, Et lato secondo l'A R, opposto all'angolo secondo B, & lato terzo A B. che si oppone all'angolo terzo R; Et cosi nell'altro Triangolo a b r, chiamaremo lato primo il b r, secondo l'a r, & terzo l'a b; Si dice che la proportione del lato A B, all'A R, in l'vn Triangolo cioe il terzo lato al secondo, continenti l'angolo A. primo d'esso Triangolo, sarà come la proportione del lato a b, al'a r, nell'altro Triangolo a quelli detti corrispondenti, continenti cioè similmente l'angolo a. nell'altro. Et che da A B al B R, in l'vno sarà similmente come da a b, al b r, nell'altro & da B R ad R A. sarà pure come da b r, ad r a, nell'altro; Et che anco dal primo lato B R, dell'vno, al primo lato b r. dell'altro

l'altro a lui corrispondente sarà come dal secondo lato A R, al secondo lato a r, & come dal terzo A B. al terzo a b; Per dimostrarlo; Ponansi questi dui Triangoli con le loro basi prese hora per li lati B R, b r. sopra ad vna istessa linea, o vogliamo dire accompagninsi, o congiunganſi esse loro basi insieme per il diritto, vnendo il punto R, dell'vna con il punto b, dell'altra, & formando la linea retta B r; & allonghinsi i dui lati esteriori B A, r a, dalla parte superiore, cioè verso A, & a, finche concorrino insieme & sia in E (che il concorso è necessario essendo che cadendo la retta B r. su le due B A. r a, li dui angoli B, & r. interiori da vna medesma parte fanno somma minore di dui retti (che ad arrinare a dui retti vi manca l'angolo A. ouero a, che è l'istesso) Hora considerate le due rette B E; b a, sopra alle quali cade la B r, perche l'angolo B interiore è dal supposito eguale all'angolo b, esteriore dalla istessa parte ne segue, che esse due rette B E, b a, siano equidistanti fra loro. Ancora perche sopra alle due rette r E, R A cade la B r, & fa l'angolo esteriore R, eguale all'interiore r, dalla medesima parte ne segue che anco esse due rette r E, R A. siano equidistanti fra loro, onde il Quadrangolo A R a E, è di lati equidistanti, & però ha i lati contrapositi fra loro eguali, cioè E a, è eguale ad A R, & E A. al b a; Hora considerato il Triangolo B E r. & intesa sua base la E r, & la A R ad essa equidistante segare i dui lati B E, B r. essi (per la 2. di questo) saranno segati proportionalmente, onde dalla parte B A. alla A E dell'vno, & però dalla B A. a b a, (che b a, è eguale ad A E) sarà come dalla parte B R alla b r. dell'altro, cioe dal terzo lato 5. del Triangolo A B R al terzo lato 10, dell'a b r, sarà come dal primo lato 8. dell'A B R. al primo lato 16 dell'a b r, Ancora nel medesmo Triangolo grande B E r, intesa per base la B E, & la retta b a, equidistante ad essa base segare i dui lati r B. r E, ella gli sega proportionalmente, onde dalla parte r b. alla R B dell'vno sarà come dalla parte r a, alla a E, dell'altro, & però come da r a, ad R A. eguale ad a E, Et conuersamente come da B R. a b r, così sarà da A R, ad a r, cioe dal primo lato 8. del Triangolo A B R, al primo lato 16. dell'a b r, sarà come dal secondo lato 7. di detto Triangolo A B R. al secondo lato 14. dell'altro Triangolo a b r. Onde essendo da 5. a 10. come da 8. a 16. Et da 8. a 16. come da 7. a 14. o vogliamo dire, & anco da 7. a 14. similmente come da 8. a 16. ne segue che anco da 5. a 10. sia come da 7. a 14. O vogliamo dire da 7. a 14. sia come da 5. a 10, cioe ne segue che anco dal secondo lato 7. del Triangolo A B R, al secondo lato 14. dell'altro Triangolo a b r, sia come dal terzo lato 5. al terzo lato 10. o come dal primo lato 8. al primo 16. & perciò li dui Triangoli A B R, a b r, sono di lati proportionali, cioe dal primo lato dell'vno al primo lato dell'altro è come dal secondo al secondo, & dal terzo al terzo; Et perciò anco permutatamente dal primo lato dell'vn Triangolo al suo secondo lato, sarà come dal primo lato dell'altro Triangolo al suo secondo lato, & così dal secondo lato al terzo in l'vn Triangolo, come dal secondo lato al terzo nell'altro, o come dal primo al terzo in l'vno, così sarà dal primo al terzo in l'altro, che è quanto si voleua mostrare.

Corollario.

Dalle cose mostrate si manifesta che se vna retta in vn Triangolo segarà dui suoi lati, essendo equidistante all'altro lato, che il Triangolo parte del grande che restarà verso la sommità del grande hauendo l'angolo superiore commune con lui, sarà simile ad esso grande, cioe a lui equiangolo, & però di lati proportionali. Che il Triangolo a e r, essendo diuiso dalla retta n s. equidistante al lato e r, nel Triangolo a n s, & Quadrilatero n s r e; si vede il Triangolo a n s. essere simile cioe equiangolo al totale a e r. che ha l'angolo a, con lui commune, Perche delle due rette equidistanti e r, n s, segate dalle e a, da vna banda, & dalla r a, dall'altra, l'angolo a n s, esteriore è eguale all'angolo e. interiore oppostoli dalla medesima parte da vna banda, Et similmente dall'altra banda ancora l'angolo a s n. esteriore, o estrinseco è eguale all'r. interiore, o intrinsieco oppostoli, onde ciascuno delli tre angoli del Triangolo partiale è eguale per ordine cioe allo a lui corrispondente angolo del Triangolo totale, & perciò essi dui Triangoli sono simili, & consequentemente di lati proportionali.

Da questa Propositione si deriua quella ampla, & mirabile Dottrina, che si dice Dottrina del misurare con la vista (mediante però gli Strumenti a proposito) le Distanze, Altezze, & Profondità, Che per essempio essendo proposta l'altezza, o Colonna, o Torre A B, eretta perpendicolarmente al piano, da misurare, cioe da trouarne l'altezza nel numero d'vna misura data, & ponsiamo che ella si chiami il piede cioe che si vogli trouare quanti piedi essa Torre sia alta, Se noi preso per hora vn'Asta a b, & in alcun luogo commodo del piano erettala per il diritto, cioe perpendicolarmente al piano come sia anco la Torre, che perciò essa Asta all'hora sarà equidistante alla Torre, & posta Vna Riga, o altra cosa con la quale si dirizzi la veduta alla Cima A. della Torre,

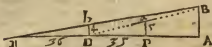
& anco

& anco si veda doue essa veduta allungata dall'altra banda verso il piano arriui in terra, & segnatoui il punto P. all'hora misurando la distanza piana dal punto P. al *B.* piede della Torre con la misura data che diciamo essere il piede, & anco misurata l'altezza a b. dell'Asta con qual misura piccola si vogli poniamo con l'oncia, & con la medesima oncia misurata ancora diligentemente la distanza P b. che è dal piede dell'*Asta* al punto P. termine nel piano della retta visuale A a P. noi potremo poi sapere quanti piedi sia l'altezza A *B.* Perche considerati, o intesi i dui Triangoli rettangoli *A B P.* grande: & a b P, piccolo che l'angolo retto A B P. dell'vno è eguale all'angolo retto a b P. dell'altro, & l'angolo P dell'vno è eguale all'angolo P. dell'altro, perche è l'istesso (commune ad ambidui i Triangoli detti) sapremo (per la 32. del primo) che il restante angolo P A *B.* de ll'vno sarà anco eguale al restante angolo P a b, dell'altro (ouero perche delle due rette A *B* Torre, & a b. Asta equidistanti sopra alle quali cade la P A, l'angolo P a b, estrinseco è eguale al P *A* B, intrinsico oppostoli dalla medesima parte) perilche essi dui Triangoli P *A* B. P a b, sono equiangoli, & perciò simili, & di lati proportionali, onde la proportione della base P *B.* alla perpendicolare A *B.* nel grande sarà come della base P b, alla perpendicolare a b. nel piccolo, però se P b, sarà doppio, 'o triplo, o altro alla b a, cosi anco la P *B.* sarà doppia. o tripla, o altro alla *B* A. Hor sia trouato P b, essere oncie 17, & a b. oncie 3; Et la P B. piedi 307. che perciò da piedi 307 P B. ad A B, sarà come da 17. P b. a 3. a b; però diremo Se 17. Antecedente da 3. Consequente, che darà piedi 307, antecedente? Onde moltiplicando 3. via 307, & il prodotto 921. partendo per 17. l'auenimento piedi $54\frac{3}{17}$. sarà il Consequente, perilche concluderemo l'altezza della Torre A *B.* essere piedi $54\frac{3}{17}$.

Nel medesmo modo ci potria seruire l'Ombra del Sole, o della Luna, che pure eretta l'Asta a b. perpendicolarmente al piano doue si vogli, & segnato in esso piano il termine dell'Ombra dell'Asta, misurando di lì al pie dell'*Asta* la lunghezza dell'Ombra, & anco l'altezza dell'Asta, & di più la lunghezza dell'Ombra della Torre, cioe dal piede di essa fino al termine dell'Ombra, che essendo l'Ombra dell'*Asta* poniamo oncie 34, l'altezza sua oncie 3. Et l'ombra della Torre piedi 614; potremo poi dire, Se anco 34. d'Ombra deriuano da oncie 3. d'altezza, li piedi 614. d'Ombra da che altezza deriuaranno? Che mlotiplicando 614. per 3, & il prodotto 1842. partendo per 34. l'auenimento $54\frac{3}{17}$. sarà li piedi dell'altezza cercata della Torre.

Il misurare vna Distanza posta come si vogli, o vna Profondità, è anc'egli il misurare la lunghezza d'vna linea, come è l'altezza, che l'Altezza è vna Distanza, o linea eretta perpendicolarmente al piano all'in sù, Et la Profondità è vna Distanza, o linea che si intende andare all'in giù perpendicolarmente al piano, Et le Distanze in piano, o siano per il diritto della nostra vista, o Transuersali, o come si vogli sono in somma tutte line e delle quali si cerca ingegnosamente la lunghezza; Ilche se bene si può fare in diuersi modi, & mediante diuersi Strumenti, il tutto nondimeno ha vigore, & depende da questa quarta Propositione, che ne insegna l'Arte, & il fondamento d'essa *Dottrina*: Ilche ottimamente si saria veduto in vna mia Opera che fra molte altre era in vna Cassetta, quale mi fu leuata di nascosto di Casa l'anno 1594. nel tempo delle Rogationi del mese di Maggio, nè mai se n'è inteso cosa alcuna, Et conteneua quest'Opera il modo facile, & sicuro da Misurare tutte le Distanze, & con il mezzo solo di due *Aste*, che supposto d'essere in alcun piano, o Monte circondato da altri Monti, piani, o Valli, come si fusse, di lì si mostraua come si venisse in cognitione dell'altezza di ciascuno de gli altri Monti, delle distanze fra le cime loro, o altri luoghi segnati in essi, delle distanze nel piano, fra i piedi d'essi Monti, & ogn'altra che ci fusse piaciuto di sapere; Gli incommodi poi continui, & penuria di tutte le cose necessarie, & l'essere impiegato in altre diuerse cose non mi ha poi lassato ponere il pensiero a cercare di rifarla di nuouo; Et hora le medesme difficultà, & indispositioni non mi lassano operare cosa di molto momento. Se piacerà a nostro Signore Dio prouedermi d'aiuto andarò adoprando quel tempo di vita che mi resta con quella maggior diligenza che potrò a gloria di sua *Diuina Maestà* con beneficio vniuersale, & ornamento della Dottrina.

Ma è ben fatto per giouare alli amoreuoli Studenti mostrare come pure si possa facilmente misurare vn'altezza, & trouare anco la distanza fra noi, & essa altezza quando ella non si potesse manualmente misurare; Hor sia che essendo in alcun piano in R, si vogli sapere quanti piedi sia l'Altezza A *B.* & quanti piedi sia anco dal P. al piede A, d'essa altezza, Per farlo. Posta vn'Asta

in P.eretta perpendicolarmente al piano(o quando non si hauesse Asta diritta,postala come si vo gli,all'hora dalla cima a,d'essa con vn filo che attaccatoli vn piombino,o altro peruenghi in Terra si segni il punto P. doue vi peruiene, misurando diligentemente con alcuna misura poniamo con la misura M.quante misure sia l'altezza a P,& sia 5.misure, & con vna Riga, o cosa simile di-rizza posta su la cima a,verso la cima B della Torre(o altro)essa si accommodi di modo che con la dirittura della vista si peruenga in B,& ancor allungata la veduta verso terra si segni il punto r, doue ella peruiene al piano, & si misuri diligentemente la distanza P r,con la istessa misura M. & sia trouata essere misure 35. Ancora in vn'altra positura o inãzi verso l'altezza A B o indietro allontanandosi da essa per la dirittura d'essa,& della prima positura, & sia allontanandosi poniamo in D, noi eretta l'Asta istessa della prima positura, o vn'altra che non importa in D:o cõ vn filo,& piombino,per maggior sicurezza di diligente operatione, misuraremo l'altezza b D,o con la misura M. adoprata nell'altra positura,o con vn'altra R,a beneplacito,hor sia b D 4. delle misure R.& alla cima b,posta la riga verso la dirittura dell'altezza A B. ella si accommodi in modo che per essa la vista peruenghi precise

n r. piedi 68.

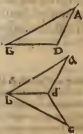
alla cima A & voltata la vista si segni il punto n,doue ella peruiene al piano, & si misuri la distanza da esso r,al termine D.della perpendicolare b D. con la misura R, con la quale si è misurata l'altezza b P,& sia trouata 36 delle misure R. Ancora con la sorte di misura che sia data,cioe hora con il piede(volendo sapere quanti piedi è l'altezza A B.)si misuri la distanza n r,che è fra n,& r, termini della vista nel piano per le due positure, & sia trouata essere piedi 68. Hora considerati i dui Triangoli rettangoli b D n.B A n,perche essi sono equiangoli,& però simili,& di lati proportionali,così come 4.altezza b D.entra in 36.sua base D n,volte 9: così ancora l'altezza B A. entrarà 9.volte nella sua base A n.cioe la base A n,sarà 9.volte quanto è l'altezza B A. Di più perche i dui Triangoli rettangoli a P r,B A r,sono equiangoli simili, & di lati proportionali, si come l'altezza a P.5.entra nella sua base P r,35.volte 7 così anco l'altezza B A. entrarà nella sua base A r,le medesime volte 7.cioe la base A r è 7.volte quanto è l'altezza B A,Ma l'altra base A n,è 9. volte quanto l'altezza A B onde la differenza che è da 9.volte,a 7.volte,cioe 2.volte la A B,sarà quello che importa la distanza che è fra il termine n,& l'r. nel piano differenza delle due vedute, onde hauendo trouato con la misura che essa distanza n r.è piedi 68. sapremo che questa r contiene 2.volte la altezza A B.& però entrando A B in r n,2.volte cioe in piedi 68.sapremo che vna volta sola importarà piedi 34.perilche piedi 34.sarà l'altezza A B.Quanto alla distanza A r,per che ella è 7.volte la A B.(si come r P.è 7.volte la a P)ella sarà(7.via 29)203.piedi.

Di qui mò si vede che si può dare la Regola per trouare l'altezza A B,dicendo; Fatte le due positure come s'è detto,Partasi la più vicina distanza(35)per la sua altezza,o Asta(5)& sia l'auenimento C(7) Ancora Partasi l'altra distanza più lontana(36)per la sua altezza,o Asta(4)& sia l'auenimento G(9)poi cauisi il C.dal G(che sempre sarà minore il C.del G) & sia il restante R(2)cõ il quale si parta il numero(68)de piedi misura data,che si troui essere fra li dui termini delle due vedute in terra nel piano posti in retta linea con il termine A.che l'auenimento L(29) sarà il numero de piedi dell'altezza A B.Qual e L.se lo moltiplicaremo per il numero C.il prodotto sara il numero de piedi della distanza r A,che cauatone il numero de piedi che si misurino essere fra r,& P,il restante sarà il numero de piedi della sola distanza P A.

Propositione 5. Theorema 5.

SE dui Triangoli habbino i lati proportionali essi saranno equiangoli,& haueranno eguali quelli angoli alli quali sottotendino i lati corrispondenti.

Questa Propositione è il conuerso della antecedente quarta, della quale si è fatto particolare propositione,& non vnita con essa quarta come si fece nella seconda,& terza di questo libro, prouando in vna istessa Propositione il Conuerso ancora d'essa, perche questa quinta non si dimostra con la medesima figuratione, nè con i medesimi mezi che si sono adoprati nella quarta. Hor siano li dui Triangoli A B D.a b d,di lati proportionali,cioe che dal primo lato A B.al secondo B D. sia come dal primo lato a b,al secõdo b d,Et dal secondo B D al terzo D A.come dal secondo b d,

al terzo d a; Et così dal terzo D A. al primo A B. come dal terzo d a, al primo a b; Si dice che essi dui Triangoli saranno equiangoli, & eguali quelli angoli a i quali sottotendino i lati corrispondenti, o simili, o relatiui che si voglino nominare, cioe che l'angolo D. corrispondente, o opposto al primo lato *A B* in l'vn Triangolo, sarà eguale all'angolo d, corrispondente, o opposto al primo lato a b. nell'altro, Et l'angolo *A*. eguale all'angolo a, & il *B*, al b; *Per* dimostrarlo. Sopra a vn lato d'vno de dui Triangoli, & sia sopra b d. del Triangolo a b d, dalla parte opposta ad esso Triangolo, cioe dalla parte inferiore si formi vn Triangolo equiangolo all'altro Triangolo A B D. cioe perche b d, è corrispondente a B D. & il punto b. al *B*. come il d, al D; si tiri vna retta, che con la b d, formi angolo eguale al *B*, & dal d, si tiri vna retta che con la d b, facci vn'angolo eguale al D. & esse due rette tirate si prolunghino finche concorrano insieme, & iui si segni C. che così il restante angolo C. sarà eguale al restante angolo A. (per la 32. del primo) & il Triangolo b d c, sarà equiangolo al *B* D A perilche (per la antecedente 4. propositione) da C b. a *B* D. sarà come da A B a *B* D ma ancora da a b. a b d, dal supposito è come da *A B*. a *B* D. però (per la 11. del quinto) ancora da c b. a b d, sarà come da a b. a b d, Di più da b d, a d c, è come da B D, a *D A*. Et come da *B* D. a D A. è anco dal supposito da b d, a d a, però come da b d, a d a, così sarà da b d, a d c, & perciò similmente come da d a, ad a b, così sarà da d c, a c b, (essendo ciascuna di queste due proportioni l'vna dal supposito, & l'altra per la Equiangolarità delli dui Triangoli b d c, *B D* A. eguale alla proportione di D A. ad A B.) perilche li dui Triangoli c b d, a b d, sono di lati proportionali, Et perche tale proportione ha b c, a b d, quale ha b a, alla istessa b d, ne segue (per la 9. del quinto) che dette b c, & b a, siano eguali fra loro, Et perche anco da b d, così a d a, come a d c è vna istessa proportione ne segue (per la detta 9 del quinto) che anco da a, & d C. siano similmente eguali fra loro; Perche dunque delli dui Triangoli a b d, C b d, il primo lato a b, dell'vno, è eguale al primo lato c b, dell'altro; il secondo lato a d. al secondo lato c d, & la base b d, alla base b d (che ella è vna istessa ad ambidui commune) ne segue (per la 8. del primo) che li angoli dell'vno siano eguali alli angoli dell'altro, ciascuno al suo corrispondente, o vogliamo dire che risguardano o sono opposti, o rincontro a i lati simili, cioe l'angolo a, al C, l'a b d, al c b d, & l'a d b. al C d b, Onde perche anco l'A. nel Triangolo A B D. è eguale al C. (al quale C. è anco eguale l'a) egli sarà anco eguale all'a, Et perche il *B* è eguale al c b d, (dalla construttione) egli sarà anco eguale all'a b d, & finalmente il D. sarà eguale al b d a, perilche li dui Triangoli *A* B D, a b d, saranno Equiangoli, essendo ciascun angolo dell'vno eguale a ciascun angolo dell'altro continenti i loro corrispondenti lati proportionali, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 6. Theorema 6.

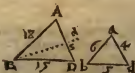
SE di dui Triangoli vn'angolo dell'uno sia eguale ad vn'angolo dell'altro, & che i dui lati continenti esso angolo nell'uno siano proportionali alli dui lati continenti detto angolo nell'altro essi Triangoli saranno equiangoli, & haueranno eguali gli angoli che saranno contenuti da i lati in loro corrispondenti.

Intesi i dui Triangoli *A B* D. a b d, della superiore Propositione sia che l'angolo *B* dell'vno sia eguale all'angolo b. dell'altro, & che la proportione del primo lato A *B*. al secondo lato *B* D. côtinenti il detto angolo *B* nell'vna sia come la proportione del primo lato a b. al secondo lato b d, continenti il detto angolo b nell'altro, Si dice che anco gli altri dui angoli dell'vn Triangolo saranno eguali a gli altri dui angoli dell'altro Triangolo a loro corrispondenti cioe l'angolo D. côtenuto dal lato secondo, & dal terzo in l'vn Triangolo sarà eguale all'angolo d. contenuto similmente dal secondo lato, & dal terzo nell'altro Triangolo (o vogliamo dire l'angolo D. opposto al primo lato in l'vn Triangolo sarà eguale all'angolo d, opposto al primo lato nell'altro Triangolo) & l'angolo A restante all'angolo a. restante. Per dimostrarlo. Intendasi formato sul lato b d, dell'vno de dui Triangoli come nella superiore figura il Triangolo b c d. facendo l'angolo c b d. eguale al *B*. dell'altro Triangolo, & il b d c, eguale al D. che così ancora il restante angolo C, sarà eguale al restante angolo A. (& però anco sarà eguale all'a) & il Triangolo c b d, sarà equiangolo all'*A B* D. & però di lati proportionali ad esso A B D. perilche la proportione di c b. a b d. sarà come di A B a *B* D, ma a questa di A B a *B* D. è anco dal supposito eguale la proportione di a b. a b d. però

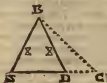
d.però da c b, a b d, sarà come di a b, a b d, Onde (per la 9. del quinto) c b. sarà eguale ad a b, hauendo ciascuna di esse ad vna istessa b d. vna istessa propositione) Onde nelli dui Triangoli a b d, C b d essendo i dui lati C b, b d, dall'vno con l'angolo b. da loro contenuto eguali alli dui lati a b, b d, del l'altro con l'angolo b. da loro contenuto, ne segue (per la 4. del primo) che anco li restanti angoli dell'vno siano eguali alli restanti angoli dell'altro, cioe il b d a, al b d c, & il b a d, al b c d, ma ancora al b d c, è eguale l'angolo D. & al b c d, è eguale l'angolo A. però il b d a, sarà eguale al *D*. & il b a d, sarà eguale all'A. Onde il Triang. A *B* D. sarà equiangolo all'a b d, come si voleua mostrare.

Propositione 7. Theorema 7.

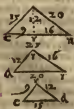
SE di dui Triangoli vn'angolo dell'uno sia eguale ad vn'angolo dell'altro, & i dui lati che sono intorno ad vn'altro delli angoli dell'uno siano proportionali alli dui lati loro corrispõdenti che sono intorno ad vn'altro delli angoli dell'altro, & che di più il restante angolo dell'vno, & anco il restante angolo dell'altro sia o minore di retto, o non minore di retto, all'hora essi dui Triangoli saranno equiangoli, & eguali saranno gli angoli, che hanno intorno i lati proportionali,

Nelli dui Triangoli *A B* D, a b d, sia l'angolo A. dell'vno eguale all'angolo a, dell'altro, & i lati A *B*, *B* D. che sono intorno all'angolo *B*. siano proportionali alli lati a b, b d, che sono intorno al-l'angolo b, dell'altro, cioe sia da A *B*. 18. a B D, 15. come da a b, *6*, a b d *5*; & di più ciascuno delli dui restanti angoli D. nell'vn Triangolo, & d, nell'altro, sia minore di retto, cioe acuto, ouero non minore di retto, (cioe ottuso, o retto) Si dice che essi dui Triangoli di necessità saranno equiangoli, cioe che l'angolo B. sarà eguale allo a lui corrispondente angolo b. & il D. al d, Per dimostrarlo, Sia prima che si pona ciascuno delli dui angoli D. & d, essere minore di retto, cioe acuto, & cominciando dalli angoli *B*. & b che hanno i lati intorno proportionali, si dice che essi sono eguali fra loro, Che essi non possono essere ineguali fra loro, (che se per l'Aduersario potessero essere inegua li l'vno saria maggiore dell'altro che dicendo egli il maggiore essere B, da esso segaremo vna parte (verso il lato A *B*, doue è l'*A* eguale all'altro a eguale all'angolo b. & sia per l'Aduersario l'angolo A *B* S. Hora considerati i dui Triangoli A B S. a b d, perche l'angolo A. nell'vno è eguale all'-a, nell'altro, & anco l'angolo A *B* S nell'vno (per l'Aduersario) eguale all'angolo b. dell'altro, ne seguiria (per la 32. del primo) che ancora il restante angolo A S B. dell'vno fusse eguale all'angolo d, dell'altro, perilche essi dui Triangoli sariano equiangoli, & però haueriano i lati corrispondenti proportionali (per la 4. di questo,) onde dal lato *A* B. al B S. nell'vno saria come dal lato a b, al b d, nell'altro, ma anco da *A* B. a B D. è (dal supposito) come da a b a b d; però similmente da A B. a *B* S. sarà come da A B. a B D. cioe A B. haueria vna medesma proportione cosi a B S. come a B *D*. onde (per la 9. del quinto) queste due B S. *B* D. sariano eguali fra loro, & perciò considerato il Triangolo S *B* D. che hauerà i dui lati S *B*. *B* D. eguali ne seguirà che li dui angoli *B* S D, *B* D S. (oppostosi ad essi lati siano eguali l'vno all'altro, & perche l'angolo *D*. si è posto essere minore di retto, ancora il *B* S D. saria minore di retto (onde per la 13. del primo) il suo compagno A S *B*. che è il restante a i dui retti saria maggiore di retto, cioe ottuso, & perciò ancora l'angolo d, nel Triangolo a b d, prouato douere essere eguale a questo A S *B*. saria ancor egli ottuso, o vogliamo dire maggiore di retto, ma si è supposto egli essere minore di retto, cioe acuto, però l'istesso angolo d, saria, & ottuso, & acuto, ilche è impossibile, onde impossibile è anco quello che a questa impossibilità ci condurria, cioe che li dui angoli *B*. & b. delli dui Triangoli proposti possino essere ineguali, saranno dunque eguali, & perciò anco (per la 32. del primo) il restante angolo *D* sarà eguale al restante angolo d, & perciò essi dui Triangoli saranno equiangoli.

Hor sia che si pona ciascuno delli dui angoli D. & d. essere non minore di retto, pur si dice (stante gli altri suppositi) che li dui Triangoli saranno equiangoli, & prima che l'angolo *B*. è eguale al b. perche intesa la istessa figura, doue per l'Aduersaria si peruenia a concludere l'angolo *B* S D. (che è eguale al d) essere eguale al *B* D S. & perciò perche il d. non è minor di retto, similmente ne seguiria che ciascuno delli dui *B* S *D*. *B* D S, fusse non minore di retto, ma retto, o maggior di retto, cioe retto, ouero ottuso, & perciò la somma loro (che sono dui angoli del Triangolo *B* S D) verria

ria ad essere, o due retti, o più di due retti, il che è impossibile, poiche la somma di dui angoli di qual si vogli Triangolo è di necessità minore di dui retti, onde impossibile sarà che l'angolo *B*. non sia eguale al b. gli sarà dunque eguale, & l'A. è eguale all'a, dal supposito, però ancora il D. sarà eguale al d, & così l'vn Triangolo A *B* D. sarà equiangolo all'altro a b d, come si voleua dimostrare, dal che ne segue anco che habbino i lati corrispondenti proportionali fra loro come si dice.

Et si può notare che nelli dui Triangoli proposti, oltre l'essere vn'angolo, o vogliamo dire il primo angolo dell'vno eguale al primo angolo dell'altro, & il secondo dell'vno hauere i lati proportionali al secondo angolo dell'altro, di più conuiene che così il terzo angolo dell'vno come il terzo angolo dell'altro sia acuto, ouero non acuto, cioe che ciascuno d'essi sia, o minore di retto, o ciascun d'essi non minore di retto, accioche detti dui Triangoli siano equiangoli, perche se il terzo angolo dell'vno fusse acuto, ma il terzo angolo dell'altro non acuto, cioe l'vno minore di retto, & l'altro non minore di retto, all'hora li dui Triangoli detti non si concluderia essere equiangoli, che anzi sariano non equiangoli, Che preso poniamo il Triangolo S D *B*. di dui lati *B* S, B D. eguali, & allungata la base S D. da vna banda, o dall'altra quanto si vogli, & sia in C, & da quello C. all'altro punto *B* tirata la retta C B & considerati i dui Triangoli C S *B*, C D *B*. che haueranno l'angolo C. commune cioe che il primo angolo (dell'vno, sarà eguale al primo angolo C. dell'altro, & del secondo angolo C *B* S. dell'vno li lati C B, B S. saranno proportionali alli lati C *B*. B D. continenti il secondo angolo C B D. dell'altro, cioe la proportione del primo lato C B, al secondo lato B S. nell'vno è eguale alla proportione del primo lato C *B*. al secondo *B* D. nell'altro, (perche *B* S. & B D. sono eguali dalla construttione) perche poi li dui restanti terzi angoli, cioe l'S. dell'vno, & C B D. dell'altro non possono essere d'vna istessa sorte, cioe o ciascun d'essi acuto, o ciascun d'essi non acuto (che anzi l'*S*. è acuto, come l'S D B a lui eguali, & il C *D B*, ottuso, restante dell'S D B. a dui retti) di qui auuiene che li dui Triangoli C S *B*. C *D* B, non possono essere equiangoli come di necessità sariano se oltre la prima & seconda conditione dette (cioe dell'hauere il primo angolo eguale al primo angolo, & li lati intorno al secondo angolo proportionali alli lati corrispondenti intorno al secondo angolo) hauessero anco la terza, dell'essere il terzo angolo in ciascun d'essi o acuto, o non acuto.

Propositione 8. Theorema 8.

NEl Triangolo rettangolo tirando dall'angolo retto vna linea retta perpendicolare alla opposita base, essa perpendicolare diuiderà il Triangolo rettangolo totale in dui Triangoli rettangoli simili fra loro, & al Triangolo totale.

Sia che nel Triangolo rettangolo c a n, dall'angolo retto a, alla opposta li base c n. sia tirata la perpendicolare a r. diuidendo il Triangolo totale nelli dui Triangoli rettangoli a r c, a r n; si dice essi dui Triangoli rettangoli partiali essere simili, o vogliamo dire equiangoli, & però di lati proportionali, fra loro, & al Triangolo totale; Perche considerato il Triangolo rettangolo partiale a r n, egli oltre all'angolo retto a r n, che è eguale al retto c a n, del totale, ha ancora l'angolo n, o vogliamo dire a n r, che è eguale al c n a, del totale, perche è vn'istesso angolo commune ad essi dui Triangoli; per il che (per la 32. del primo) di necessità il restante terzo angolo r a n, del Triangolo partiale, sarà eguale al restante terzo angolo a c n. del Triangolo totale, onde essi dui Triangoli sono equiangoli, & però simili, & di lati per ordine proportionali: Similmente considerato il Triangolo rettangolo partiale c r a, perche l'angolo c, è commune ad esso, & al Triangolo totale c a n, (oltre l'hauere ciascun d'essi Triangoli vn'angolo retto) ne segue che ancora il restante angolo c a r, del partiale sarà eguale al restante angolo c n a del totale, & però questo Triangolo c r a, partiale sarà anc'egli equiangolo al Triangolo totale c a n, Onde essendo ciascuno delli dui Triangoli rettangoli partiali equiangolo al Triangolo totale ne segue che anco essi dui partiali siano equiangoli fra loro, & così questi tre Triangoli rettangoli, totali cioe, & partiali saranno equiangoli, & però simili, & consequentemente di lati proportionali, che è quanto si voleua mostrare. La proportione dunque del primo lato al secondo in l'vno sarà come dal primo lato al secondo loro corrispondenti, in ciascuno

 scuno

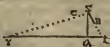
ſcuno delli altri dui,& dal ſecondo al terzo,come dal ſecondo al terzo,& dal terzo al primo,o cõuerſamente dal primo al terzo,come dal terzo al primo,ſo conuerſamente dal primo al terzo: Et permutatamente dal primo lato dell'vno al primo lato ſuo corriſpondente dell'altro (che corriſpondenti ſono i lati che ſono contrapoſti a gli angoli eguali) ſarà come dal ſecondo lato,al ſecondo lato,& come dal terzo lato,al terzo lato, che perciò preſo per primo lato e n, nel totale che ſi oppone al ſuo angolo retto a,lo a lui corriſpondente, & perciò primo lato nel partiale Triangolo a r n,ſarà il lato a n.20. che ſi oppone ſimilmente al ſuo angolo retto n,& nell'altro Triangolo partiale e r a,che al ſuo angolo retto r,ſi oppone il lato a e.15.queſto ſimilmente ſarà il ſuo primo lato,o corriſpondente alli dui e n.25.del totale,& a n.20.dell'altro partiale,& preſo per ſecondo lato il lato a n.20. nel totale che ſi oppone al ſuo angolo e, che è eguale all'angolo e.del partiale e r a,al quale e.ſi oppone il lato a r.12.queſto lato a r.12.ſarà il ſecondo lato nel Triangolo e r a,ma nel Triangolo a r n,perche all'angolo e.detto de gli altri dui Triangoli è eguale il ſuo angolo r a n, perciò il ſuo lato ſecondo (corriſpondente al ſecondo lato del totale, & al ſecondo lato dell'altro partiale) ſarà il lato r n.16.eſſendo perciò conſequentemente il reſtãte a r.12.in eſſo Triãgolo a r n,il ſuo terzo lato che ſi oppone al ſuo terzo angolo n, quale angolo n, è commune ad eſſo Triangolo a r n,& al totale,perilche ſimilmente nel totale il lato che ſi oppone a detto angolo n, & è l'a e, 15.ſarà il ſuo terzo lato,onde nell'altro partiale Triangolo e r a,il reſtante lato e r.9. ſarà ſimilmente il ſuo terzo lato,che pure ſimilmente ſi oppone al ſuo reſtante angolo a,che è eguale all'n. delli altri dui Triangoli; Et coſi eſſendo i lati per l'ordine detto del Triangolo totale, 25.20.15. Et delli altri dui parti 20.16.12. Et 15.12.9;ſapremo che da 25.primo a 20.ſecondo è come da 20.primo a 16.ſecondo,& da 15.primo a 12.ſecondo, Et anco da 20.ſecondo a 15.terzo, ſarà come da 16.ſecondo a 12.terzo,Et da 12.ſecondo a 9,terzo,

primo	ſecondo	terzo
25.	20.	15
20.	16.	16
15.	12.	9

Corollario, o Deriuatione.

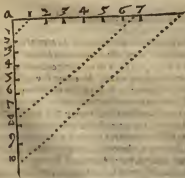
Dalle coſe dette ſi manifeſta che nelli Triangoli rettangoli, tirando dall'angolo retto vna perpendicolare alla baſe ella è media proportionale fra le due parti d'eſſa baſe; Et di più ciaſcun lato del Triangolo è medio proportionale fra la baſe totale, & quella parte d'eſſa baſe che è congionta al detto lato del Triangolo.

Che di ſopra hauendo conoſciuto che da 16.a 12.è come da 12.a 9.perche il 16.& 9.ſono le due parti della baſe diuiſa dalla perpendicolare,& il 12,o 12,è la iſteſſa perpendicolare,ſi vede che da vna parte della baſe alla perpendicolare,è come dalla perpendicolare all'altra parte della baſe; Ancora perche da 25.a 20,è come da 20.a 16.cioe 20,è medio proportionale fra 25.& 16;perche 25.è la baſe del Triangolo totale,& 16. è la parte di baſe congiunta al lato 20, ſi vede che queſto lato è medio proportionale fra tutta la baſe,& la parte d'eſſa a lui congiunta, Et perche (per la Equa proportionalità) da 25.a 15.è come da 15.a 9.cioe che 15. è medio proportionale fra 25.& 9 perche 25.è la baſe detta,& 9.è la ſua parte congiunta al lato 9. ſi vede ſimilmente che ancora queſt'altro lato 15.del Triangolo totale è medio proportionale fra la baſe,& la parte d'eſſa a tal lato angolarmente congiunta.

Da queſta cognitione ſi può deriuare vn modo di miſurare vna diſtanza,o vogliamo dire di trouare la lunghezza d'vna linea ſtando in vno delli dui termini d'eſſa, mediante vna ſquadra, coſi; Volendo trouare quanto ſia lunga la diſtanza, o linea a r, eſſendo nel termine a.Iui ergeremo vn'Aſta s a,perpendicolarmente al piano a r, & nella ſommità s. accommodaremo vna ſquadra di modo che per la dirittura d'vn braccio s e.d'eſſa ſi vegga l'eſtrema r.della diſtanza data a r, & voltata la viſta ſu per la dirittura dell'altro braccio s n, della ſquadra ſegnaremo il punto t, doue la veduta peruiene ſul piano r a t,Et miſuraremo la lunghezza a t,dal piè dell'Aſta al punto t,Et anco la lunghezza della retta tranſuerſale che è dal punto t,all'angolo s,ſuperiore retto della ſquadra,Ouero la lunghezza che è da eſſo angolo s.ſuperiore della ſquadra al punto a,nel piano(che mediante dui lati del Triangolo rettangolo s a t,ſi può cõ l'artificio de' numeri come inſegna la penultima 47.propoſitione del primo libro venire in cognitione dell'altro lato; onde ſe trouandolo con eſſo artificio de' numeri, & anco miſurandolo in atto ſi trouarà vna iſteſſa quantità ſaremo ſicuri d'hauere operato bene) moltiplicando poi

do poi la s a,in se medesima,& partendo il prodotto per la a t,l'auenimento sarà la a r,cercata; che considerato il Triangolo rettangolo in aria t s r.la s a,perpendicolare alla base t r,è media proportionale fra le due parti t a,a r,della base fra loro(il che si dimostrarà nella 17 propositione di questo sesto libro)Ouero perche il lato s t.è medio proportionale fra la base t r, & la sua parte t a,congiunta angolarmente a detto lato s t,se moltiplicaremo questo lato s t.in se stesso,& partiremo il prodotto per la t a,l'auenimento sarà la totale base t r,dalla quale cauato la t a,il restante sarà la a r,cercata. Che per esempio essendo s a.palmi 12.a t,palmi palmi $2\frac{1}{5}$,(che la s t,misurandola douerà trouarsi $12\frac{1}{5}$)noi moltiplicaremo 12.in se medesimo che fa 144.& questo partiremo per $2\frac{1}{5}$,che ne viene $\frac{720}{11}$.cioe $65\frac{5}{11}$.& perciò palmi $65\frac{5}{11}$,sarà la distanza,o linea retta a r. Ouero Moltiplicaremo s t. $12\frac{1}{5}$.in se medesmo, & il prodotto $148\frac{21}{25}$ partiremo per a t $2\frac{1}{5}$.che l'auenimẽto $67\frac{36}{55}$.sarà la base t r,dalla quale cauato la parte t a, $2\frac{1}{5}$.il restante $65\frac{5}{11}$. sarà la a r; Auerta l'Operante che nel misurare queste linee s a, & a t, ouero s t, conuiene essere molto diligente, perche poca differenza dal vero in esse causaria molta diuersità nella vera lunghezza della retta,o distanza che si cerca, Et se l'altezza a s.fosse Torre,o altro Edificio,pure nel medesmo modo stando nella sommità d'essa potressimo trouare quãto saria la distanza a r.detta.

Propositione 9.Problema 1.

DI vna data linea retta potiamo assegnare vna parte proposta.

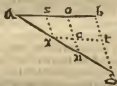
Sia data la retta a b,da assegnare in essa la sua quarta proposta parte, Per farlo,Ad essa da vno de' suoi dui termini poniamo dall'a,se li accompagni angolarmente come si vogli vna retta a g. a beneplacito, & in questa cominciando dal termine angolare a,a loro commune si segnino tante linee continue eguali quanto è il denominatore 4.della parte proposta,cioe perche la parte proposta è la quarta parte,che si denomina con il numero 4, si segnino 4.rette continue eguali,& siano a d,d c,c n,n r, che cosi ciascuna d'esse quattro rette sarà la quarta parte della totale a r,& dal punto vltimo r.all'altra estremità b. della data, si tiri, o imagini la retta r b, poi dal punto d, termine della parte a d,segnata si tiri fino alla data la retta d q.equidistante alla r b,che all'hora la a q, sarà la quarta parte della data a b(cosi come la a d,è la quarta parte della a r)Perche considerato il Triangolo a r b,& in esso presa per base la r b,sappiamo dalla construttione la d a segante i dui lati a r,a b, essere equidistanti alla base r b,& perciò(per la 2.di questo essa d a,segarà detti lati proportionalmente,cioe da a q,a q b,sara come da a d,a d r,& conuersamente dalla q b.a q a,come da r d,a d a,& congiuntamente per la 18.del quinto)dall a totale b a,alla q a,come dalla totale r a,alla d a,ma la r a,contiene la d a,4.volte (& perciò d a,è la quarta parte di r a) perilche ancora la b a,contenirà la q a,similmente 4.volte,onde questa q a, sara la quarta parte della a b.come si voleua fare.

Cõ modo simile potremo ancora assegnare o pigliare d'vna data retta,quante, & quali parti proposte vorremo cioe li $\frac{2}{3}$,o $\frac{3}{4}$,o $\frac{2}{5}$,o $\frac{3}{5}$,o $\frac{4}{5}$,o $\frac{5}{6}$,o $\frac{7}{10}$,o altre,che si farà con il trouare vna simplice parte delle proposte mostrataci dal denominatore del suo rotto, & poi giungere insieme tante d'esse parti simplici quanto significa il numeratore di esso suo rotto, che il composto contenirà le parti proposte della data retta; Che per esempio volendo li $\frac{7}{10}$ della data a b.cominciando dal termine a;noi accompagnatoli angolarmente vna retta a g. in essa cominciando dal termine comune angolare a,segnaremo 10.parti eguali a beneplacito,& dall'vltimo termine 10. d'essa, all'altro termine b. della data tiraremo,o imaginaremo la retta 10.b; & a questa equidistãte tiraremo dal termine 7. della a g.fino alla a b.la retta 7.t,che la parte a t.

su la

ſu la a b,ſarà la ſua decima parte,cioe ſarà l'$\frac{1}{10}$. (coſi come a 1,ſu la a 10,è il ſuo $\frac{1}{10}$,onde continuata eſſa a 1,della a b.7.volte,la a 7,ſarà li $\frac{7}{10}$ della data a b. Ouero ſe non ci occorreſſe aſſegnare particolarmente l'$\frac{1}{10}$ della data a b,ma ſolo baſtaſſe ſaperne in ſomma li $\frac{7}{10}$ potreſſimo ſegnate le 10.parti eguali continue ſu la a 9,(che terminano nel ſegno 10,contenendoſi nella a 10 che è la diuiſa in 10.parti eguali) & imaginata o ſegnata pure la retta 10. b; all'hora a queſta 10 b.tirare vna equidiſtante dal termine 7.(che ſignifica le parti da pigliare moſtrate dal 7.numeratore del $\frac{7}{10}$.) della a 10; ſino che arriui alla a b.data, & iui ſegnare 7. che coſi la a 7, della a b, ſarà li ſuoi $\frac{7}{10}$,come è la a 7,ſu la a 10;li $\frac{7}{10}$ d'eſſa a 10; Si può ancora in Prattica facilmente fare l'iſteſſo,cioe diuidere vna retta data in quante,& quali parti ſi voglino,con il mezzo,o con l'aiuto d'vna Tauoletta Quadrangola come ſi vede notato nel fine della mia Algebra lineale.

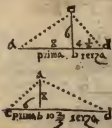
Propoſitione 10.Problema 2.

DAta vna linea retta,ella ſi può ſegare,o diuidere, nel modo che ſia diuiſa vna retta propoſta.

Sia data la retta a b.da ſegare,o diuidere nel modo,cioe alla ſimilitudine che è diuiſa la propoſta retta a g.nelle tre parti a r,r n,n g;Per farlo, Accompagninſi eſſe due rette angolarmente come ſi voglino inſieme con vno delli dui eſtremi di ciaſcuna di loro,& ſia l'a;formando l'angolo g a b,& dall'altro eſtremo g.della propoſta,all'altro eſtremo b.della data, ſi tiri,o imagini la retta g b.poi a queſta g b.equidiſtante ſi tirino dalli punti r,& n,delle ſettioni della a g.fino alla a b,le rette r s, n o; che elle diuideranno nelli punti s.& o, la data a b. nelle 3. parti a s, s o,o b. ſimili alle 3.parti a r,r n,n g. della a g. propoſta;Perche conſiderato il Triangolo a n o,& preſa per baſe la n o,a queſta eſſendo equidiſtante la r s.ella(per la 2.di queſto)ſega i ſuoi dui lati a n,a o; proportionalmente, onde da a s. ad s o,è la proportione iſteſſa che è da a r.ad r n, Ancora dal punto r,ſuperiore della a g. tirato alla s b. la equidiſtante r e t; perche anco le r s,e o, r b. ſono equidiſtanti fra loro ne ſegue che ciaſcuno delli dui Quadrilateri s r e o.o e t b.ſia paralellogrammo,& però ciaſcun d'eſſi hauerà i ſuoi angoli,& i lati contrapoſiti eguali fra loro,però s o ſarà eguale ad r e.& o b,a e t Hora conſiderato il Triangolo r g t,& baſe la g t,perche la n e,equidiſtante alla baſe ſega i ſuoi dui lati r g,r t,ella gli ſega in parti proportionali cioe la proportione di r e.& però di s o (ad r e eguale) ad r n,ſarà come di e t, & però di o b(a e t eguale)ad n g.onde eſſendo da a s.ad s o,come da a r,ad r n.& da s o,ad o b.come da r n,ad n g.è chiaro la data a b.eſſere diuiſa alla ſimilitudine della a g.propoſta come ſi voleua fare.

Propoſitione 11.Problema 3.

A Due date linee rette ſi può trouare vna terza continua proportionale.

Siano date le due rette a b.prima antecedente,& a c, ſeconda conſequente da trouare ad eſſe vna terza continua proportionale,cioe che la proportione che ad eſſa terza hauerà la conſequente a c,ſeconda ſia la iſteſſa che la proportione,quale a detta a c, ha la prima antecedente a b. Per farlo alla antecedente a b, ſi accompagni ad angolo come ſi vogli da vno de' ſuoi termini,& ſia l'a,la conſequente a c, & anco alla medeſma antecedente a b. ſi giunga in lungo dirittamente dall'altro termine b,la b d,eguale alla conſequente a c,poi tirata,o inteſa dalli eſtremi c,& b.della antecedente a b,& conſequente a c,la retta b c. ſi tiri dall'eſtremo d, vna retta equidiſtante alla imaginata b c, finche concorra con la a c , allungata per il diritto dal c,& ſia il concorſo il punto t, che coſi l'allungamento c t, ſarà la terza retta cercata conſequente alla a c,Perche inteſo il Triangolo t a d,& per baſe la t d,perche a queſta equidiſtante è la b c,ſegante i dui lati a d,a t, ella(per la 2.di queſto) gli ſegarà proportionalmente onde la proportione di a b,a b d, & però di a b ad a c(che a b,è eguale ad a c)ſarà come di a c.a c t,però c t,è terza continua proportionale alle due a b .prima,& a c,ſeconda,che è quello che ſi voleua fare.

Ancora per trouare la terza continua proportionale alle due date, potressimo accompagnare insieme ad angolo retto in b, la prima a b, & la seconda b e, tirando, & congiungendo gl'altri dui termini d'esse con vna retta, opposta, ò subtensa all'angolo retto da loro formato, & à questa subtensa dal termine à lei, & alla seconda commune tirare vna perpendicolare da quella banda, che allungando la prima dalla banda dell'angolo retto b, concorra con questa perpēdicolare alla subtensa, & sia il concorso in d, che all'hora questo allungamento b d, sarà la terza continua proportionale alla prima, & seconda date.

Perche considerato il Triangolo a e d, nella prima figura, che hà l'angolo e, retto ò il Triangolo e a d nell'altra figura, che hà l'angolo a retto, dalla construttione essendo che da esso angolo retto alla oppostali base cade la perpendicolare e b nella prima figura, ò la a b nell'altra, ne segue (per il Corollario dell'Ottaua di questo) che essa perpendicolare sia media proportionale fra le due parti della base, onde essendo essa perpendicolare la seconda delle due date conseguente alla prima data, qui posta per la sinistra parte della base, è chiaro che la parte destra ò allungamento della prima sarà la terza continua proportionale cercata.

Ouero ꝑ trouare la terza cōtinua proportionale à due date A B, prima antecedēte maggiore, & A C seconda conseguente minore; Sopra alla maggiore A B prima presa per diametro si formi vn mezo cerchio, & in esso da vno de' suoi dui termini, & sia A, si accomodi la A C minore, & dal punto C, doue ella peruiene alla circonferenza si tiri al diametro A B la perpendicolare C D, che all'hora d'esso diametro la parte A *B* congiunta angolarmente alla seconda A C, sarà la terza continua proportionale cercata; perche imaginata la retta C B, che con la C A, forma l'angolo C, che è retto per esser fatto nel mezo cerchio, & perciò da esso angolo retto C, (considerato nel Triangolo rettangolo A C B) venendo perpendicolarmente alla base A B opposta all'angolo retto la C D diuidendo esso Triangolo rettangolo A C D in dui Triāgoli rettangoli simili fra loro, & al totale A C *B*, come si è mostrato nell'Ottaua di questo, sappiamo (per il Corollario d'essa Ottaua) che il lato destro C A è medio proportionale fra la base A B, & la sua parte destra A D, & però essa parte destra A D è la terza continua proportionale alle due A B, & A C, date. Ma se la A B prima antecedente fusse minore de la A C seconda suo conseguente, cioè la A C conseguente maggiore della A *B* antecedente, per trouare la terza, che saria conseguente alla A C seconda, & però maggiore della A C à lei antecedente, noi da vn'estremo de la A B prima,

& sia dal B. li erigeremo vna perpendicolare, & in essa perpendicolare dall'altro estremo A, accomodaremo la seconda A C, cioè fatto centro l'estremo A, & semidiametro la seconda A C, segnaremo il punto C, doue l'arco che si facci seghi la perpendicolare detta, & da esso punto C, alla A C, verso la A B allungata dal *B*, tiraremo vna perpendicolare finche ella seghi l'allungamēto della A *B*, & sia che occorra in D, che all'hora la totale A D, sarà la terza continua proportionale conseguente alla seconda A C, perche considerato il Triangolo rettangolo A C D, & in esso alla base A D dall'angolo retto A, tirata la perpendicolare C *B*, il lato destro A *C* è medio proportionale fra la base A D, & la sua parte destra A B angolare à detto lato destro A C, onde posto A *B* prima linea, & la A C seconda, la A D sarà la terza di tre linee proportionali, come si voleua fare.

Potressimo anco con modo simile à due date linee rette non solo trouare la terza continua proportionale, ma à queste poi la quarta, poi la quinta, & la sesta, & la settima continue proportionali, ò quant'altre per ordine volessimo; che alle due a b prima 10. superiore antecedente, & a e, seconda 9 inferiore conseguente trouata la e e conseguente terza $8\frac{1}{10}$ noi questa $8\frac{1}{10}$ (che sarà antecedenre risperto alla quarta da trouarsi, aggiungeremo in lungo alla seconda superiore 9. & sia la d f, & dal punto f alla d e, tirata vna equidistante finche concorra con la a e allungata, & sia in g, questo allungamento e g $7\frac{29}{100}$ sarà la quarta cōtinua proportionale alla terza e e, (ouero d f) $8\frac{1}{10}$. Perche essendo dalla a b 10. alla a e 9. come dalla b d 9. alla e e $8\frac{1}{10}$. Ancora dalla totale a d *19* alla totale a e *17*$\frac{1}{10}$ sarà come dalla sola a b *19* alla sola a e 9. Et considerato il Triangolo a f g alla base f g, del quale è equidistante la d e, segante i suoi dui lati a f, a g, sappiamo che alla proportione di a d, ad a e, è eguale la proportione di d f, ad e g, ma alla medesma proportione di a d, ad a e, è eguale la proportione di a b 10. ad a e 9. però queste due proportioni

di d f ad e g, & di a b, ad a c, faranno eguali fra loro, cioè da d f $8\frac{1}{10}$. ad e g $7\frac{29}{100}$. farà come da a b 10. ad a c 9. & perciò e g, $7\frac{29}{100}$. farà continua proportionale alle 10. 9. $8\frac{1}{10}$ & farà la

prima. seconda. terza. quarta. quinta. festa. settima.
a 10 b 9 d $8\frac{1}{10}$ f $7\frac{29}{100}$ h [illegible] k [illegible] m [illegible] o
9 c $8\frac{1}{10}$. e $7\frac{29}{100}$. g $6\frac{561}{1000}$. i 5 [illegible]. l 5 [illegible]. n 4 [illegible].

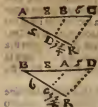
prima. secõda. terza. quarta. quinta. festa. settima.
a 9 b 10. d $11\frac{1}{9}$. f [illegible] h [illegible] k [illegible] m [illegible] o
a 10 c $11\frac{1}{9}$ e $12\frac{28}{81}$. g 13 [illegible]. i 15 [illegible]. b 16 [illegible]. n 18 [illegible]. p
seconda. terza. quarta. quinta. festa. settima. ottaua.

quarta in ordine, & per trouare la quinta continua proportionale à queste quattro operaremo pure nell'istesso modo, cioè giongeremo questa quarta in lungo di sopra alle 3. 10. 9. $8\frac{1}{10}$. & sia la f h. $7\frac{29}{100}$. & dal termine h, tiraremo la h i equidistante alla f g, finche concorra con la a g, allungata, & sia in i, che questo allungamento g i, $6\frac{561}{1000}$. farà la seguente quinta continua proportionale consequente alla quarta $7\frac{29}{100}$. con la quale g e, douentando ella antecedente; & perciò aggiungendola di sopra in lungo alle altre quattro, & seguendo come s'è detto, & per le medesme raggioni si potrà trouare la festa continua proportionale, poi la settima, & altre come si vede in margine.

Et se delle due date l'antecedente fusse la minore 9. & il suo consequente la maggiore 10. noi pure nel medesmo modo à queste due 9. prima, & 10. seconda trouaressimo la terza continua proportionale $11\frac{1}{9}$. & seguendo si trouaria la quarta $12\frac{28}{81}$. poi la quinta, & altre come si vede in margine.

Propositione 12. Problema 4.

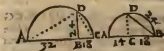
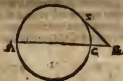
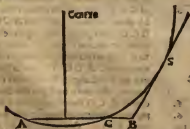
A Tre date linee rette si può trouare la quarta proportionale.

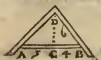
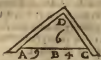
Siano date la A B prima antecedente, & B C, seconda sua conseguente, & A D terza, alla quale come antecedente si vogli trouare la à lei conseguente nella proportione di *A* B, à *B C*. Per farlo, congiungasi in lungo la prima *A B* antecedente, & la seconda *B* C suo conseguente, & ancora alla A *B* prima antecedente dal termine semplice A si accompagni ad angolo come si vogli la *A* D terza antecedente, & dall'altro suo termine D al *B* (doue sono congiunte la prima, & seconda) si tiri la D *B*, & à questo equidistante dal C, si tiri vna retta finche concorra con la A D allungata, & sia in R, che questo allungamento D R, farà la quarta cõseguente alla terza, A D. Perche considerato il Triangolo C A R, & per base la R C, perche la B D ad essa base equidistante sega i suoi dui lati, ella (per la 2. di questo) gli sega proportionalmente, onde come da A *B*, ad B C, così farà da A D, à D R, però D R è consequente quarta alla A D terza, come *B C* seconda ad A B prima. Ouero accompagnate angolarmente la prima B A 8. & la seconda *B C* 6. si giunga ancora per il diritto alla prima A B 8. antecedente la terza A D 5. anch'ella antecedente, & dal

ter-

termine A à loro comune allo estremo C semplice della secóda si imagini, ò tiri la retta A C, & à questa equidistante dall'altro termine D, delle B A D si tiri vna retta finche concorra con la A C 6. allungata verso C, & sia in R, che all'hora l'allungamento C R, $3\frac{1}{4}$. sarà la quarta cōsequente cercāta alla terza 5. Perche nel Triangolo A D R la A C equidistante alla base D R, sega i suoi dui lati proportionalmente, onde da B A 8. ad A D 5. è come da B C 6. à C R $3\frac{1}{4}$. & però permutatamēte, come B A 8. à B C 6. farà ancora A D 5. à C R $3\frac{1}{4}$. onde C R $3\frac{1}{4}$. sarà la quarta proportionale alle tre B A 8. B C 6, & A D 5. che è quanto si voleua fare.

Propositione 13. Problema 5.

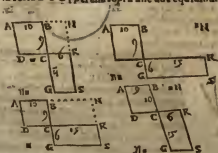
A Due date rette si può trouare vna media proportionale.

Siano le due date rette A B, B C, da trouarui vna media proportionale fra esse. Per farlo, congiungasi in lungo esse date, facendone la totale A C, sopra alla quale presa per diametro (cioè con apertura di Compasso eguale alla mità d'essa posto l'vn piede nel punto della diuisione) si descriua il semicirculo A D C, & à detto diametro A C, dal termine B, commune alle due rette date si erga fino alla circonferenza la perpendicolare B D, che ella sarà la cercata media proportionale fra le due date A B, B C, perche imaginate, ò tirate dal punto D, alli dui estremi A, & C del diametro le due rette D A, D C, l'angolo A D C, da loro contenuto sarà retto (per la 31. del terzo) essendo egli formato nel mezo cerchio, onde nel Triangolo rettangolo A D C, essendo dall'angolo retto A. alla base oppostali A C, tirata la perpendicolare A B, ella (per la Ottaua di questo) è media proportionale fra le dui parti A B, B C, della base, ma esse A B, B C sono le due rette date, però la B D è media proportionale fra loro, che è quanto si è proposto di fare. Ouero sopra alla maggiore delle due date, & sia la A B, presa come diametro si descriua vn mezo cerchio, & da vna delle due estremità d'esso, & sia dal B, se ne seghi la minore B C, & dal termine C, ad esso diametro fino alla circonferenza si erga la perpendicolare C D, & dal punto D al C termine comune alle due date si tiri la retta D B, che ella sarà la media cercata fra esse date A B, B C, perche imaginato dal punto D, all'altro termine A, del diametro tirata la D A, l'angolo A D B fatto nel mezo cerchio sarà retto, & il Triangolo A D B, perciò sarà rettangolo, & in esso cadendo dall'angolo retto D alla base perpendicolarmente la retta D C, ella lo diuiderà in dui Triangoli simili fra loro, & al totale A D B, onde (per il Corollario della 8. di questo) il lato destro B D, del Triangolo totale sarà medio proportionale fra la base totale A B, & la sua parte destra C B congiunta angolarmente cō detto lato destro D B ma queste due rette A B (base totale) & B C (sua parte destra) sono le due rette date, però la retta B D, trouata è media proportionale fra esse come si voleua fare.

Ancora per trouare vna media proportionale fra due rette date si può operare così; Posta la B C, minore sù la B A, di modo che habbino vn'estremo B comune essendo la restante C A. la differenza loro, poi si pigli per centro vn punto doue si vogli di modo che si facci vn cerchio la circonferenza del quale passi per i dui estremi A, & C, della retta A C, (& si può diuisa la A C per mezo ad angoli retti, cioè perpendicolarmente in essa perpendicolare segnare per centro vn punto doue si vogli, che egli sarà egualmente distante dalli dui termini A & C. Ouero presa la A C per diametro faruí intorno la circonferenza del Cerchio) & dall'estremo B si tiri la retta B S contingente al cerchio formato, che ella sarà la media proportionale fra le due A B, B C, perche (per la 36. del Terzo Libro) il quadrato d'essa B S contingente sarà eguale al dutto della totale segante A B, nella sua parte esteriore B C, che sono le due rette A B, B C date.

An-

Ancora in Pratica mediãte la squadra potremo trouare vna media pportionale fra due date A B, B C, che aggiontele insieme per il diritto al cõposto loro dal termine B, à loro commune ergeremo vna perpendicolare, & con vna squadra facẽdo che i suoi dui brazzi tocchino li termini A, & C, della retta composta A B C, andarla mouendo, di modo che il punto angolare d'essa squadra stia sù la perpendicolare detta, & fin che occorra in D, che all'hora la parte D B d'essa perpendicolare sarà la media cercata fra A B, & B C.

Ouero posta la B C sù la B A, di modo che habbino il termine B commune dal C, ergasi alla A B vna perpendicolare, & facendo che i dui brazzi della squadra tocchino li termini A, & B della A B, andarla mouendo di modo che'l punto angolare d'essa stia sù la perpendicolare detta, & fin che occorra in D, che all'hora la lũghezza D B del brazzo della squadra conterminale al pũto B commune alle due date sarà la media proportionale fra esse due date.

Propositione 14. Theorema 9.

SE di dui eguali quadrilateri di lati equidistanti vn'angolo dell'vno sia eguale ad vn'angolo dell'altro, all'hora li lati in essa continenti detti dui angoli eguali saranno reciproci. Et se di dui quadrilateri di lati equidistanti vn'angolo dell'vno sia eguale ad vn'angolo dell'altro, & li lati in essi continenti detti dui angoli siano reciproci, all'hora di necessità essi dui parallelogrammi saranno eguali l'vno all'altro.

Siano li doi parallelogrammi, ò vogliamo dire quadrangoli di lati equidistanti A B C D, C G S R eguali fra loro, & haueuti l'angolo B C D dell'vno eguale all'angolo R C G, dell'altro, si dice che li dui lati B C, C D continenti l'angolo B C D, detto in l'vno, & li dui lati R C, C G, continenti l'angolo R C G nell'altro saranno reciproci, ò vogliamo dire reciprocamente proportionali, cioè che li dui lati detti dell'vno saranno le estreme prima, & quarta, & li dui lati detti nell'altro, saranno le medie seconda, & terza di quattro rette proportionali, che se pigliaremo le B C, C D per estreme le R C, C G saranno le medie, ouero se pigliaremo le R C, C G per estreme, le B C, C D, saranno le medie. Per dimostrarlo, Accompagninsi insieme essi dui parallelogrammi mediante i loro dui angoli eguali di modo che detti dui angoli eguali siano contrapositi vnendo, ò giongendo vn lato dell'vno per il diritto con vn lato dell'altro poniamo il D C, con il C R, acciò D C R sia vna linea retta, che anco le B C, & C G, sarãno accompagnate insieme per il diritto facendo la retta B C G (perche sopra alle due equidistanti A B, D R, cadendo la B C, farà l'angolo B C R, eguale allo à lui coalterno A B C. Ancora l'angolo R C G, dal supposito è eguale al B C D, perilche la somma delli dui angoli B C R, R C G è eguale alla somma delli dui angoli A B C, B C D, ma questa somma delli A B C, B C D è eguale à dui retti, però anco la somma delli dui B C R, R C G sarà eguale à dui angoli retti, onde perche dal termine C della retta R C sono tirate in diuerse parti le due rette C B, C G, & fanno la somma delli dui angoli loro con la C R eguale à dui retti, ne segue che dette due C B, C G siano congiunte insieme per il diritto formando vna linea retta B C G. Ouero perche all'angolo R C G, è dal supposito eguale il B C D giontoli communemente l'angolo D C G, alla somma delli dui R C G, D C G, sarà eguale la somma delli dui B C D, D C G, ma quella è eguale à dui retti (che sono fatti dalla G C, cadendo sù la retta D R) perilche ancor

10.	15.	6.	9.	15.	10.	9.	6.
10.	6.	15.	9.	15.	9.	10.	6.
9.	15.	6.	10.	6.	10.	9.	15.
9.	6.	15.	10.	6.	9.	10.	15.

que-

questa somma delli dui B C D, D C G, sarà similmente eguale à dui retti. Onde partēdosi dal termine C della retta C D, le due rette C B, C G, in diuerse parti, & facendo con essa C D la somma delli dui angoli eguali à dui retti, ne segue che dette C B, C G siano aggiunte insieme per il diritto, & che B C G, sia linea retta;) Hora prolonghisi la retta A B verso B, & la S R verso R, finche concorrino insieme, & sia in N, formando il paralellogrammo C N, alquale paragonato ciascuno delli dui A C, S C, perche sono eguali essi à detto paralellogrammo C N haueranno vna medesma proportione, ma dal paralellogrammo A C al C N è come dalla base D C alla C R, & dal paralellogrammo C S all'istesso C N è come dalle base G C alla C R, però ne segue che dalla retta D C, alla C R, sia come dalla G C alla C B, cioè, che i dui lati D C, C B, del paralellogrammo A C, siano le estreme, & li dui lati C R, G C, del paralellogrammo C S, siano le medie di quattro rette proportionali, ò vogliamo dire, che essi quattro lati delli dui paralellogrammi eguali detti, che conuengono insieme nelli angoli delli lati detti siano reciproci come si volena mostrare.

Conuersamente mò se di dui paralellogrammi A C, C S, che conuengono insieme nelli angoli C, & C, cioè B C D, R C G, li lati loro che sono attorno, ò contengono essi angoli siano reciproci cioè che da B C, ad C R, è come da G C, à C B, si dice che essi dui paralellogrammi A C, C S, saranno eguali fra loro, perche accomodati essi dui paralellogrammi, come s'è fatto di sopra, cioè di modo che D C R, sia vna linea retta, che all'hora ancora le due B C, C G. saranno congiunte insieme per il diritto in vna retta B C G, & compito il paralellogrammo C N, con l'allungamento delli dui lati A B, S R, perciochè dal paralellogrammo A C, al C N è come dalla base B C, alla C R, & dal paralellogrammo C S, all'istesso C N, è come dalla base G C, al a C B essendo queste due proportioni di B C, à C R, & di G C, à C B, dal supposito eguali, ne segue, che la proportione del paralellogrammo A C, al C N, sia eguale alla proportione dell'altro paralellogrammo C S, al medesmo C N, cioè, che li dui paralel ogrammi A C, C S, ad vn'istesso C N, habbino vna istessa proportione, & che perciò siano eguali fra loro, che è quello che si voleua prouare.

Si può auuertire, che se dui paralellogrammi conuengono in vn'angolo conuerranno anco nelli altri, & saranno equiangoli. Et nel fare la dimostratione si può compire ò il paralellogrammo destro superiore B C R N, ò il sinistro inferiore D C G N, in ciascuna delle quattro positure che si possono fare.

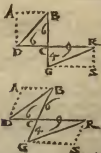
Propositione 15. Theorema 10.

SE di dui Triangoli eguali, vn'angolo dell'vno sia eguale ad vn'angolo dell'altro, all'hora i lati in essi continenti detti dui angoli eguali saranno reciproci; Et se di dui Triangoli vn'angolo dell'vno sia eguale àd vn'angolo dell'altro, & li dui lati in essi continenti li dui angoli eguali siano reciproci, all'hora li dui Triangoli detti saranno eguali l'vno all'altro.

Siano i dui Triangoli B C D, R C G eguali fra loro, & hauenti l'angolo B C D, dell'vnò, eguale all'angolo R C G, dell'altro, si dice che li dui lati B C, C D, dell'vno continenti l'angolo C, detto in l'vno, & li dui lati R C, C G dell'altro continenti il suo angolo R C G detto, saranno reciproci, Per dimostrarlo. Accomodinsi insieme essi dui Triangoli mediante gl'angoli detti loro egualitalmente che vn lato dell'vno sia congiunto in longo per il diritto con vn lato dell'altro de continenti i dui angoli eguali poniamo il D C, con il C R, di modo che li dui angoli B C D, R C G. eguali siano contrapositi fra loro, che cosi li altri dui lati B C. C G cōtinenti i dui angoli eguali saranno anch'essi congiunti insieme per il diritto (come s'è mostrato nella antecedente propositione) facendo la retta B G. Hora imaginata, ò tirata la retta B R, (ouero la D G) & considerato il Triangolo B C R, (ouero il D C G, & sia il B C R) ciascuno delli dui Triangoli dati, perche sono eguali haueranno à questo B C R, vna istessa proportione, ma ancora dall'vno B C D, al detto B C R. è come dalla base D C, alla base C R (perche hanno si può dire vna medesma altezza arriuando con le sommità loro ad vn'istesso punto B) & dall'altro Triangolo R C G, al medesmo B C R detto è come dalla base G C alla base B C. perilche similmente dalla D C, alla C R, sarà come dalla G C, alla C B, cioe la 4. rette D C, C R, G C, C B, sono proportionali, cioè dalla prima D C, alla seconda C R, è come dalla terza G C, alla 4. C B, ma le due estreme D C, C B, sono i dui lati del Triangolo B C D, continenti il suo angolo C. Et le due medie C R, G C, sono i dui lati del Triangolo G C R, continenti il suo angolo G C R, perilche detti 4. lati in essi dui Triangoli sono reciproci, ò vogliamo dire reciprocamente proportionali come si voleua mostrare.

Et le conuersamente di dui Triangoli dati che, vn'angolo dell'vno sia eguale à vn'angolo dell'altro i lati continenti essi angoli eguali siano reciprocamente proportionali, si dice che all'hora

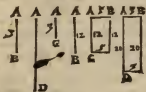
detti dui Triangoli saranno eguali fra loro, perche dati li dui Triangoli *B C D*, R C G, tali come si propone, & accomodati insieme mediante li angoli C, & C, come di sopra facendo che i dui lati D C,C R, douentino vn'istessa retta D C R,che cosi anco le due B C, C G formarãno vna retta B C G, inteso anco il Triãgolo *B C* R,ouero il D C G,ma diciamo il B C R,perche i lati d'essi dui Triãgoli dati continenti i dui angoli eguali sono dal supposito proportionali reciprocamente posto il lato *D C*,dell'vn Triangolo come prima di quattro linee proportionali,& il lato C R dall'altro Triangolo come seconda,la terza sarà il lato G C di questo, & la quarta il lato C B del B C D. Et perciò dalla retta B C alla C R, sarà come dalla G C alla C *B*, ma come dalla D C alla C R, cosi è dal Triangolo B C D,al *B C* R,(che hanno vna istessa altezza) & come dalla G C alla *C B*,cosi è dal Triangolo G C R, al medesmo detto *B C* R, però la proportione del Triangolo B C D al B C R, sarà come dal Triangolo G C R al medesmo *B C* R,onde que'li dui Triangoli B C D, G C R, (perche ad vn'istesso *B C* R, hanno vna istessa proportione,) saranno eguali fra loro,che è quanto si voleua mostrare.

Questa Propositione si può anco facilmente dimostrare mediante la antecedente, che accomodati i dui Triangoli dati nel modo detto doppiaremo ciascun d'essi compendo i dui Paralellogrammi, de che i Triangoli sono le mità,di modo,cioè,che il lato del Triangolo opposto all'angolo che in l'vno è eguale all'angolo preso nell'altro,sia diametro del paralellogrãmo à lui doppio,& poi fare la dimostratione nelli paralellogrammi,& applicarli alli Triangoli. Che hauendo i dui Triangoli B C D. G C R eguali,& che l'angolo C dell'vno sia eguale all'angolo C dell'altro, per dimostrare, che i lati in essi continenti li dui angoli eguali detti siano reciprocamente proportionali, noi accomodaci li dui Triangoli nel modo posto di sopra,compiremo il paralellogrãmo *B C D* A,doppio al Triangolo *B C D*,& il paralellogrammo R C G S doppio al Triangolo G C R,quali dui paralellogrammi(essendo doppij à dui Triangoli eguali)saranno eguali fra loro,& l'angolo C dell'vno sarà eguale all'angolo C dell'altro, però (per la antecedente Propositione) li dui, & dui lati d'essi paralellogrammi continenti detti dui angoli eguali in essi saranno reciprocamente proportionali, ma detti dui, & dui lati nelli dui paralellogrammi sono i medesmi dui, & dui lati nelli Triangoli dati continenti i dui loro angoli eguali, però è chiaro che essi dui, & dui lati de' Triangoli dati sono reciprocamente proportionali(cioè che *6.9 4.6* ouero *6.4.9.6.* Ouero *4.6.6.9.* ò *9.6.6.4.* sono quattro quantità proportionali)

E se supposto che nelli dui Triangoli dati *B C D*,*G C R*, l'angolo *C* dell'vno sia eguale all'angolo *C* dell'altro, & li dui lati *B C*, *C D* continenti l'angolo *C* detto dell'vno siano reciprocamente proportionali alli dui lati *G C*, C R continenti l'angolo C dell'altro si vorrà mostrare, che perciò essi dui Triangoli dati siano eguali fra loro, noi intese le medesime figure di Triangoli, & paralellogrammi à loro doppij; Perche nelli dui paralellogrammi A C, *C S* essendo l'angolo C dell'vno eguale all'angolo *C* dell'altro, sono anco i dui lati *B C*,*C D* continenti l'angolo *C* nell'vno, reciprocamente proportionali alli dui lati G C, C R continenti l'angolo C nell'altro, ne segue(per la antecedente propositione) che essi dui Triangoli siano eguali fra loro;perilche ancora le mità loro,cioè li dui Triangoli *B C D*,*G C R* dati,saranno similmẽte eguali fra loro,che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 16. Theorema 11.

SE quattro linee rette siano proportionali il rettangolo contenuto dalle due estreme sarà eguale al rettangolo contenuto dalle due medie; Et se di quattro linee rette il rettangolo contenuto dalle due estreme (cioè prima, & quarta) sia eguale al rettangolo contenuto dalle due medie(cioè seconda,& terza) esse 4. rette saranno proportionali.

Sia;

Siano le quattro rette A B, A D, A G, A C proportionali, cioè che da A B ad A D sia la proportione, che è da A G, ad A C, & sia fatto dalle estreme A B, A C, il rettangolo B C, & dalle medie A D, A G il rettangolo G D, si dice che essi dui rettangoli essere eguali, perche essendo in essi l'angolo C A B retto dell'vno, eguale all'angolo D A G dell'altro, che anco egli è retto, & di più essendo li dui lati del primo continenti l'angolo retto A, reciproci alli dui lati del secondo contineti similmente il suo angolo retto A, ne segue (per la 14. di questo) che essi dui rettangoli siano eguali. Conuersamente se date le 4. rette dette A B, A D, A G, A C, & fatto delle due A B, A C estreme il rettangolo B C, & delle due A D, A G, medie il rettangolo G D occorra, che essi dui rettangoli siano eguali, si dice che esse 4. rette saranno proportionali, secondo l'ordine detto, cioè che le due, che contengono l'vn rettangolo saranno le due estreme prima, & quarta. Et le due che contengono l'altro rettangolo saranno le medie seconda, & terza; Perche essendo il rettãgolo B C, eguale al G D, essi (per la 14. di questo) hauerãno i lati, che contengono vno de' suoi angoli retti reciproci, cioè essi lati saranno proportionali in tal ordine, che dal lato A B del primo al lato A D, del secondo, sarà quella proportione, che è dal lato A G d'esso secondo, al lato A C del primo, saranno dunque A B, A D, A G, A C quattro rette proportionali come si voleua mostrare.

L'istesso auuerria sei dui quadrangoli, che si fanno delle 4. rette dette non fussero rettangoli, ma solo di lati equidistanti, purche l'angolo, ò ottuso, ò acuto in l'vn paralellogrammo contenuto dalle due A B, A C fusse eguale all'angolo nell'altro paralellogrammo contenuto dall'altre due A D, A G, il che si dimostra nel modo istesso sopradetto.

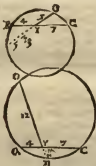
Di qui si può auuertire, che di quattro quantità proportionali quando siano le quantità in numeri di 3. di loro, si può esse mediante trouare la quantità, ò numero dell'altra quantità che fusse ignota, o sia ella la prima, o la seconda, o la terza, o la quarta, che se ella sarà vna delle due estreme, perche sappiamo che il dutto d'essa nell'altra estrema deue essere eguale al dutto delle due medie note, noi partendo il dutto delle due medie, che sarà noto, per la estrema nota l'auenimẽto sarà di necessità l'altra estrema, che era ignota, poiche il dutto d'essa nella estrema nota sarà eguale al dutto delle due medie; Et se la quantità ignota sia vna delle due medie, perche il dutto d'essa nell'altra media nota deue essere eguale al dutto delle due estreme note, partendo noi il dutto delle due estreme che sarà noto per la media nota, l'auenimento di necessità sarà l'altra media ignota, poiche il dutto d'essa nell'altra media nota sarà eguale al dutto de le due estreme. Che per essempio delle quattro quantità proportionali 5. 20. 3. 12. essendo ignota la prima 5. che è vna delle due estreme, per trouarla moltiplicaremo insieme le due medie 20. & 3. che fa 60 & questo 60. partiremo per l'altra estrema, o quarta 12. che ne viene 5. & questo 5. sarà la prima estrema che era ignota, perche cosi questo 5. nella quarta 12. fa 60. come anco la seconda 20. nella terza 3. Et se fusse stata ignota la quarta 12. partiressimo pure 60. dutto delle due medie per 5. prima estrema nota che l'auenimento 12. saria la quarta. Similmente se fusse ignota vna delle due medie poniamo la 2.20. partiressimo il dutto delle due estreme 5. & 12. qual dutto è 60 per la terza media nota che è 3. & l'auenimento 20. sarà la seconda che era ignota: Et così se fusse stata ignota la terza 3. partiressimo 60. dutto delle estreme per 20, seconda, ò media nota che ne viene 3. & questa saria la terza che era ignota. Di qui i Pratici hanno deriuata la Regola che chiamano del Tre (quale si può chiamare, o dire essere Regola delle quattro quantità proportionali) perche da la notitia di tre quantità ne trouano vna quarta, alla quale la terza hà la istessa proportione che hà la prima alla seconda, (cioè che essa quarta è consequente alla terza nella proportione che hà la prima alla seconda, ò vogliamo dire nel modo che la seconda è consequente alla prima) qual Regola è, che si moltiplichi la seconda nella terza, & il prodotto si parta per la prima, che l'auenimento sarà la quarta. La causa, ò deriuatione della qual Regola è chiarissima da quello che di sopra si è detto, perche moltiplicando la secõda nella terza è questo prodotto è di necessità eguale quello che deriua anco à moltiplicare la prima nota con la quarta ignota, onde se à moltiplicare la prima con la quarta deue prodursi poniamo 60. conuien partire questo 60. per la prima nota, & sia 5. che l'auenimento 12. sarà quella quantità, quale moltiplicata per il 5. douerà produrre 60. perilche esso auuenimento 12. sarà necessariamente la quarta quantità proportionale.

Questa Regola del Tre è di continuo vso, & si adopra quasi in tutti negotij, & calcoli occorrẽti, doue interuengono numeri, ò quantità rationali, ò irrationali che siano, ò intendansi nell'Arit-

metica.

metica, ò nella Geometria, ò nell'Algebra, ò nella Astronomia, ò nella Cosmografia, ò nell'Architettura, ò in quale altro vso si vogli, Io nondimeno al solito delle mie compositioni faccio deriuare essa Regola dal Discorso naturale, faccendogliene inuestigare, & inuentare di molte sue mirabili breuità, & sottilità come si vede nella quarta parte della mia Aritmetica Vniuersale.

Ma voglio anco mostrare come mediante il cerchio si possa esequire la Regola del Tre; che fra l'altre molto mirabili proprietà del cerchio egli può anco hauer questa.

Noi habbiamo veduto, che quando quattro quantità sono proportionali il prodotto delle due estreme è sempre eguale al prodotto delle due medie, & che perciò nella Regola del Tre, quello che si produce à moltiplicare la seconda nella terza, hà da essere l'istesso che si produce dalla prima nella quarta; Ancora sappiamo (per la 35 del terzo) che quando due rette accomodate in vn cerchio si segano fra loro il prodotto delle due parti dell'vna è sempre eguale al prodotto delle due parti dell'altra; perilche le quattro parti di queste due rette vengono ad essere 4. quantità proportionali. & le due parti dell'vna perciò sono le estreme prima, & quarta, & le due parti dell'altra le medie, cioè seconda, & terza, onde quando ad vna ad vna ci è noto il numero di tre d'esse parti, trouiamo il numero dell'altra che è in linea retta ò quella con la quale partiamo il prodotto dell'altre due, che sono in vna istessa linea retta, & l'auenimento è la restante cercata parte, che era ignota. Di qui mò si conosce, che se à 3. quantità date si vogli trouare la quarta proportionale, si deue ponere in vna retta medesma la seconda, & terza, & accomodarla in vn cerchio, & dal punto comune del congiungimento loro ponere vn termine della prima, & voltarla in modo che l'altro suo termine arriui alla circonferenza, & poi allungar questa dalla banda del termine detto, che sarà mò comune à tutte esse parti fino alla circonferenza, che questo allungamento sarà la quarta proportionale cercata. Sia per esempio che da e le tre 5. 4 7. si vogli trouare à queste la quarta proportionale, cioè, che si dica, 5. uale 4 domando quanto valerà 7. Noi in vn cerchio accomodata vna retta a c, diuisa in 4. & 7. seconda, & terza, nel punto r, & da esso punto r, accomodata la prima 5. segnando o, doue ella arriua alla circonferenza, questa o r, si allunghi per r, fino alla circonferenza, & sia in n, che all'hora l'allungamento r n, sarà la quarta proportionale, onde misurandola con la istessa misura dell'altre ella douerà essere $5\frac{3}{5}$. che tanto è 28. il prodotto di o r, 5. in essa r n $5\frac{3}{5}$. quanto di a r 4. in r c 7. Ma le la r o, prima fusse tanto lunga, ò così corta, che ella nel modo detto non si potesse accomodare nel cerchio doue si fusse accomodata la a c, composto della seconda, & terza all'hora noi formaressimo vn cerchio, che potesse essere à proposito, & si farà così. Date le tre 12. 7. 4. dicendosi se 12. dà 7. che darà 4? o (che resulta l'istesso) se 12. da 4. che darà 7? Noi congiunte insieme le due r c, r a, 7. & 4. seconda, & terza nel punto r, da esso r, angolarmente à beneplacito poneremo la r o 12. prima, & segnati li tre punti o, c, a, formaremo vn cerchio la circonferenza del quale passi per essi tre punti, come se essi fussero li tre angoli d'vn Triangolo o c a, intorno al quale si volesse circonscriuere vn cerchio come insegna la quinta del quarto libro, che all'hora allungata la o r, per r, fino alla sua circonferenza, l'allungamento r n, sarà la quarta cercata, & douerà trouarsi essere $2\frac{1}{3}$. che $2\frac{1}{3}$. via 12. fa 28. come 4. via 7. Et così di 4. quantità proportionali essendone note 3. si potrà mediante il cerchio trouare la ignota, ò sia ella la quarta, o la prima, o la seconda, o la terza. Tante mirabili proprietà sono state concesse alla circolare figura, onde douiamo con somma riuerenza ammirare, & laudare di continuo l'Eterno Onnipotente Architetto fattore del tutto, pregandolo à concederne di continuo efficace lume intellettuale per andare speculando anco di continuo le innumerabili marauigliose opere di Sua Diuina Maestà à cui siano date tutte le laudi da tutte le lingue, per tutti i secoli.

Propositione 17. Theorema 12.

SE siano tre linee rette proportionali il Rettangolo contenuto dalle due estreme sarà eguale al quadrato della media; Et se di tre rette, il rettangolo delle due estreme sia eguale al quadrato della media all'hora esse tre rette saranno proportionali.

Siano le tre linee rette A B, A C, A D, proportionali, o vogliamo dire continue proportionali, cioè sia dalla prima A B, alla seconda A C, come dalla seconda A C, alla terza A D, & sia fatto

delle

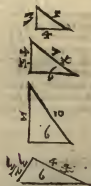
delle estreme A B, A D, il rettangolo *B* D, & della media A C, il quadrato C C, si dice questo quadrato essere eguale al rettangolo *B* D; Per dimostrarlo. Intendasi vn'altra retta A C, eguale alla media A C; Ouero si imagini la retta A C, duplicata, che vna sia consequente alla prima A *B*, & però intesa come seconda, & l'altra A C come antecedente alla A D, & però esse A C, & A D, prese come terza, & quarta, che così il rettangolo B D, verrà ad essere fatto dalla prima, & quarta, & il quadrato C C, dalla seconda, & terza; Et perche queste quattro rette A *B*, A C, A C, A D, sono proportionali, essendo contenuto il rettangolo *B* D, dalle due estreme prima, & quarta A *B*, A D, & il quadrato C C dalle due medie A C, A C, cioè in questi dui paralellogrammi essendo i dui lati, che contengono vn'angolo retto nell'vno, & i dui lati che contengono vn'angolo similmente retto nell'altro, reciproci, ne segue (per la 14. di questo) che essi dui paralellogrammi, cioè il rettangolo B D, & il quadrato C C, siano eguali fra loro; Et conuersamente se date le tre rette A B, A C, A D, occorra che il rettangolo fatto dalle due estreme A B, A D, prima, & terza, sia eguale al quadrato fatto dalla media A C seconda, si dice che le dette tre rette di necessità saranno proportionali; Perche, intesa vn'altra A C, o presa questa A C due volte, l'vna come seconda quantità consequente alla A *B* prima, & l'altra come terza antecedente alla A D, che se intenderà come quarta, all'hora in questi dui rettangoli *B* D, C C, eguali i lati, che contengono vn'angolo retto nell'vno saranno reciproci alli dui lati, che contengono vn'angolo retto nell'altro (per la 14. di questo) cioè li dui lati A B, A D dell'vno saranno le estreme, & li dui lati A C, A C, che contengono vn'angolo retto nell'altro, sarãno le medie di quattro rette proportionali, & però dalla A *B*, alla *A* C, sarà come dalla A C, alla A D, cioè la A C, sarà media proportionale fra le A B, A D, che è quanto si voleua mostrare. L'istesso auuiene se in vece del quadrato, che si fa della seconda A C, si facesse vn *Rombo*, & in vece del Rettangolo che si fa delle A B, A D prima, & terza si facesse vn Romboide, che hauesse gl'angoli eguali à l'angolo del Rombo come gl'ottusi à gl'ottusi, & gl'acuti à gl'acuti, il che si dimostra nel modo istesso sopradetto.

Di qui si conosce, che sempre che il quadrato d'vna quantità sia eguale al dutto di due altre quantità essa quantità sarà media proportionale fra l'altre due; Et anco si conosce che per trouare vna media fra due quantità, si deue moltiplicare fra loro le due quantità, & del prodotto (che viene ad essere il quadrato della media) pigliare la radice quadra che ella sarà la media cercata; Onde se fra 16. & 25. si vogli trouare vna media moltiplicaremo 16. via 25. & del prodotto 400. pigliaremo la rad. quadra che è 20. qual 20. sarà la media; Similmente fra 10. & 27. volendo trouare vna media continua proportionale noi del prodotto loro che è 270. pigliaremo la radice quadra, che è radice 270 & questa sarà la media, che se la volessimo esplicare in numero rationale prorinquo al vero si potria dire ella essere quasi 16 $\frac{7}{16}$. ouero [illegible] & più fra i quali dui numeri 16 $\frac{1}{3}$ & 16 $\frac{7}{16}$ scarso, & eccedente è serrata ò rinchiusa la quantità radice 270. inesplicabile per numero rationale, alla quale con altri numeri, & scarsi, & eccedenti potremo nondimeno andare di continuo approssimandoci come si mostra con modi molto facili nel mio Trattato della Radice quadra.

Propositione 18. Problema 6.

SOpra ad vna data linea retta si può descriuire vn Rettilineo simile, & similmente posto ad vn Rettilineo proposto.

Sia data la retta A D da descriuerui, o formarui sopra vn Rettilineo simile, & similmente posto al rettilineo proposto a d n i g. Per farlo sappiamo per la prima Deffinitione di questo libro, che due figure, ò superficie si chiamano simili quando gl'angoli dell'vna ad vno ad vno per ordine sono eguali a gl'angoli dell'altra ad vno ad vno similmente per ordine, & che di più i lati, che sono attorno, o contengono gl'angoli eguali nell'vna, siano per ordine proportionali alli lati loro che contengono parimente gl'angoli eguali à loro corrispondenti nell'altra. Hora per descriuere sopra ad vna retta data vna superficie simile, & anco similmente posta ad vna superficie proposta si intende che la retta data sia la corrispondente ad vn lato assegnato della proposta, che perciò conuiene in questo Problema assegnare anco il lato nella proposta superficie al quale la detta data deua essere corrispondente, che proposto poniamo il Triangolo rettangolo 3. 4. 5.

& data la linea retta 6. sopra alla quale s'habbi à formare, ò descriuere vn Triangolo simile al proposto, cioè equiangolo ad esso 3. 4. 5. & anco similmente posto; questo similmente posto vuol significare che la linea data sia la corrispondente ad vn lato proposto del Triangolo proposto, cioè sia ò la base, ò l'altezza, ò la diagonale, ò vogliamo dire la subtensa all'angolo retto, che non si dando questa particolar conuenienza, si potrebbe pigliare la data 6. ò in luogo di base, ò d'altezza ò di subtensa à beneplacito, & così sopra ad essa retta 6. si potrebbono fare tre diuersi Triangoli rettangoli (così come tre diuersi lati hà il proposto) ciascuno de quali sarebbe simile al proposto. Hor sia che dal a superficie da farsi sù la data A D simile, & similmente posta alla proposta ad n i g; la data deue essere corrispondente alla a d, della proposta; Noi per commodità posta in margine la data A D per il verso, che stà la à lei corrispondente a d, nella superficie proposta tiraremo poi la D N, di indefinita lunghezza, quale con A D formi angolo eguale per il medesimo verso all'angolo d, del Rettilineo proposto, nel quale è tirata dall'altro estremo a della a d, all'altro estremo n. della d n. (alla quale hà da essere corrispondente la D N, che si facci) tiraremo, ò imaginaremo la retta a n, intendendo il Triangolo a d n, & posarsi sopra alla a d, come sua base. Et equiangolo à questo si deue fare vn Triangolo sù la A D, data, & perciò ancora dal punto A si tirarà la A N di indefinita lunghezza verso la D N, che con la A D formi angolo eguale all'angolo d a n, seruendo, o notando il punto N, doue le due rette tirate dal D, & da l'A, concorrano insieme,

che così il Triangolo A D N, sarà equiangolo all'a d n, (essendo anco di necessità (per la 32. del primo) il restante angolo A N D dell'vno eguale al restante angolo à lui corrispondente a n d, dell'altro, & però essi dui Triangoli haueranno i lati proportionali, onde da A D, à D N, & ad A N, sarà come da a d, à d n, & ad a n, & similmente da D N, ad A N, come da d n, ad a n. Ancora intesa per base la retta a n, & dall'a, al seguente angolo i del rettilineo proposto imaginata, o tirata la retta a i, & inteso il Triangolo a n i, facciasi sù la A N, corrispondente alla a n, vn Triangolo A N I equiangolo (& per il medesmo verso) al detto Triangolo a n i, che perciò sarà simile à quello, & haueranno i lati corrispondenti intorno alli angoli eguali fra loro proportionali, per il che da A N, ad N I, sarà come da a n, ad n i, & perciò ancora da D N ad N I, come da d n, ad n i, & da A D, ad N I, come da a d, ad n i, (che essendo da A D, à D N, come da a d, à d n, & da D N ad N A, come da d n, ad n a, & da N A, ad N I, come da n a, ad n i, ne segue per la equa proportionalità che anco da A D, ad N I, sia come da a d, ad n i, & anco da D N, ad N I, come da d n, ad n i) Di più perche l'angolo A N D, è eguale (dalla construttione) all'angolo a n d, & l'A N I, all'a n i, ne segue che il totale angolo D N I, sia eguale al totale angolo d n i, del rettilineo dato. Seguendo hora la operatione tiraremo, o imaginaremo dal punto a, vna retta al seguente angolo g, ma ella gia vi è, & è l'vltimo termine del rettilineo proposto; & inteso il Triangolo a i g, formato sopra alla base a i, Noi sopra alla A I, à questa a i corrispondente formaremo vn Triangolo (per il medesmo verso) equiangolo all'a i g, nel modo detto, che all'hora sarà finita la operatione, hauendo formato sù la data retta A D il rettilineo A D N I G simile, & similmente posto al dato a d n i g, che l'angolo N I G, è eguale al n i g, perche ciascuna delle due parti dell'vno è eguale à ciascuna delle due parti dell'altra, dalla construttione, & così il totale angolo, ò spatio

tio D A G è similmente eguale al totale angolo, ò spatio d a g, (essendo ciascuno delli tre angoli interni al punto A, dalla construttione eguale à ciascuno delli tre angoli interni al punto a, & perciò il restante à quattro retti, che è l'esterno A, cioè D A G, è eguale al restante a quattro retti, che è l'altro esterno a, o vogliamo dire d a g) Et per la similitudine di ciascuno delli Triangoli intesi nel formato A D N I G, alli Triangoli loro corrispondenti intesi nel proposto a d n i g, essendo li lati del formato proportionali alli lati à loro corrispondēti nel proposto, come si dimostra nel modo sopradetto, il che è quanto si voleua fare. Et cosi quando il Rettilineo proposto fusse contenuto da maggior numero di lati, egli si andaria diuidendo in Triangoli, & di mano in mano nella figura da farsi si andariano continuando i Triangoli equiangoli, & però simili à quelli del rettilineo proposto, & per il medesmo verso, o positura, fino che si fussero adoprati tutti, che all'hora il rettilineo formato saria simile, & similmente posto al rettilineo proposto.

Propositione 19. Theorema 13.

I Triangoli simili hanno fra loro proportione duplicata alla proportione, che è da vn lato, qual si vogli nell'vn Triangolo, al lato à quello relatiuo, ò corrispondente nell'altro Triangolo.

Siano i dui Triangoli A D R, a d r simili, cioè equiangoli, & percio hauenti intorno à gl'angoli eguali per ordine i lati proportionali, che da A D, à D R sia come da a d, à d r, & però (permutatamente) da *A* D ad a d, come da D R à d r, & similmente da D R ad R A, come da d r ad r a, si dice, che la proportione dell'vn Triangolo A D R maggiore all'altro Triangolo a d r minore è duplicata a quella proportione, che è da vn lato poniamo dal D R dell'vn Triãgolo A D R maggiore al lato d r (corrispondente al D R) dell'altro Triangolo a d r minore. Per dimostrarlo. Alle due rette D R prima antecedente maggiore, & d r seconda consequente minore, che ciascuno delli lati del Triangolo maggiore è più lungo dello a lui corrispondente lato del Triangolo minore, si troui la terza continua proportionale, & sia la D E, quale si seghi dalla antecedente D R, cominciando da vno de' suoi termini, poniamo dal D, & sia la D E, & dall'angolo oppostoli A al termine E si tiri la retta A E, & considerisi il Triangolo A D E, che hà per vn lato la trouata D E, qual Triangolo A D E è eguale all'a d r, perche essendo (per la similitudine delli dui Triã goli A D R, a d r) dalla retta A D alla a d, come dalla D R alla d r, & ancora dalla D R, alla D E, medesmamente come dalla D R, alla d r (per la construttione) ne segue che dalla A D, alla a d, sia come dalla d r alla D E, cioè che A D, a d, d r, D E siano 4. linee proportionali, ma le due estreme A D, D E, prima, & quarta sono i dui lati nel Triangolo A D E, che circondano il suo angolo D, & le due medie a d, d r seconda, & terza, sono i dui lati nel Triangolo a d r, che circondano il suo angolo d corrispondente, & eguale al D del Triangolo detto A D E, perilche essi dui Triangoli hanno reciproci i lati circondanti essi dui angoli loro D, & d, eguali, onde ne segue (per la 15. di questo) che detti dui triangoli A D E, a d r, siano eguali fra loro, & però il triangolo maggiore A D R, hauerà à ciascuno d'essi dui triangoli vna medesma proportione, ma all'vno che è l'A D E hà (per la 1. di questo) la proportione c'hà la base A R alla base A E (hauendo essi vna istessa altezza che hãno la cima, ò sõmità loro in vn'istesso punto A) però anco all'altro triangolo a d r, hauerà la istessa proportione, che è dalla retta A R alla A E, ma perche le tre rette A R, a r, A E sono continue proportionali, la proportione della A R prima alla A E terza, si chiama duplicata alla proportione, che è dalla A R prima alla a r seconda, onde la proportione del triangolo A D R, all'a d r sarà similmente duplicata alla proportione che è dal lato A R del maggiore al lato a r à questo corrispondente del minore, che è quanto si voleua mostrare. Che ancora dal triangolo minore a d r al maggiore A D R, a lui simile sia proportione duplicata a quella che è dal lato d r nel minore al lato D R à quello corrispondente nel maggiore è manifesto, perche hauendo prouato che dal triangolo A D R (antecedente) all'a d r (consequente) e come dalla retta D R antecedente, alla D E consequente, ne segue che conuersamente dal triangolo a d r, consequente all'A D R, antecedente, sia come dalla retta D E, consequente alla D R antecedente, ma D E $5\frac{1}{3}$. d r 8. D R 12. sono tre quantità continue proportionali, & però dalla D E $5\frac{1}{3}$. prima alla D R 12. terza, la proportione si chiama duplicata a quella che è dalla D E $5\frac{1}{3}$. prima alla d r 8. seconda, & consequentemente è duplicata a quella proportione, che è dalla d r 8. seconda, alla D R 12. terza (eguale alla detta

di D E prima, à d r seconda) & questa di d r 8. à D R 12. è la proportione del lato d r, nel minor Triangolo al lato D R à lui corrispondente nel maggiore, però la proportione del Triangolo minore al maggiore e duplicata alla proportione, che è da vn lato del minore al lato à lui corrispondente nel maggiore.

Corollario.

Dalle cose dette è manifesto che se tre linee rette siano proportionali, all'hora qual proportione hà la prima alla terza, tale hauerà il Triangolo, che si facci sopra alla prima al Triãgolo, che si facci sopra alla seconda, (o il Triangolo che si facci sopra alla seconda al Triangolo, che si facci sopra alla terza) quando essi dui Triangoli siano simili, & similmente descritte; Perche si è prouato che si come è dalla D R prima alla D E terza, così è dal Triangolo A D R, fatto sopra alla prima al Triangolo A D E, & però al Triangolo a d r, fatto sopra alla seconda, simile, & similmente posto al detto A D R.

Propositione 20. Theorema 14.

Le superficie rettilinee simili sono diuisibili in Triangoli simili, & di numero eguali, & proportionali per ordine fra loro, & alli totali rettilinei; Et essi rettilinei fra loro hanno proportione duplicata alla proportione che è da vn lato qual si vogli dell'vno, al lato à quello corrispondente dell'altro.

Siano i dui Rettilinei a b c d r n, *A B C* D, R N simili, essendo l'angolo a, dell'vno eguale all'angolo A dell'altro, il b, al B, il c al C, & con seguendo per ordine il d al D, l'r, al R, & l'n, al N, & i lati intorno ad essi eguali angoli proportionali ciascuno al suo relatiuo, o corrispondente, cioè dal lato a b dell'vn Rettilineo al lato A B dell'altro, come dal b c, al *B C*, & dal c d, al C D, & così seguendo per ordine, si dice che essi Rettilinei sono diuisibili in Triangoli di numero eguali simili fra loro & alli totali rettilinei, & che l'vn Rettilineo all'altro hà la proportione duplicata à quella che è da vn lato dell'vno ad vn lato à lui corrispondente dell'altro. Per dimostrarlo. Da vn'angolo dell'vno & sia dall'a, al c, al d, & al r, si tirino le rette a c, a d, a r, diuidendolo in Triangoli che saranno 3. (cioè 2. manco di 5. numero delli lati del rettilineo) Et ancora nell'altro rettilineo à questa similitudine dal suo angolo *A*, corrispondente all'a, detto del sopradetto rettilineo si tirino al C, al D, & al R, le rette A C, A D, A R, accioche egli nel medesmo modo sia diuiso ne li suoi 3. Triangoli, quali ad vno ad vno saranno equiangoli simili, & di lati proportionali alli à loro corrispondenti del rettilineo superiore, che considerato l'angolo b, del primo rettilineo essere dal supposito eguale all'angolo *B*, del secondo, & li dui lati continenti l'vno b, essere proportionali alli dui lati continenti l'altro B (per la supposta similitudine di detti rettilinei, cioè dal lato a b, al lato A B, essere come dal b c, al *B C*, intesi hora li dui Triangoli a b c, & A B C, da essi lati, & angoli detti contenuti, ne segue (per la 6. di questo) che essi siano equiangoli, simili, & di lati proportionali; & per la medesima ragione saranno simili fra loro i dui Triangoli a n r, A N D; Di più perche come è a c, à c b, così è A C, à *C B*, per la similitudine delli dui Triangoli a b c, A B C, & come è c b, a c d, così è da C B, a C D, per la similitudine dal supposito delli dui Rettilinei, ne segue, che ancora nella proportionalità equa come è da a c, à c d, così sarà da A C, à C D, & perche l'angolo totale b c d, è eguale dal supposito al totale B C D, & la parte b c a, è eguale alla parte B C A (che li dui Triangoli b c a, B C A, sono equiangoli) ne segue che ancor al restante angolo a c d, sarà eguale il restante angolo A C D, onde il Triangolo à c d, sarà equiangolo & simile al Triangolo A C D (per la 6. di questo) hauendo i lati a c, c d, intorno all'angolo c, in l'vno proportionali alli loro corrispondenti lati A C, C D, intorno all'angolo C, nell'altro, oltre l'essere essi dui angoli c, & C eguali; Et nel medesmo modo si prouarà il seguente Triangolo a d r, nell'vn rettilineo essere eguale, simile, & di lati proportionali al seguente Triangolo A D R, a quello corrispondente nell'altro rettilineo, & così l'a r n, al l'A R N. Et se in essi rettilinei fussero più Triangoli, pure nell'istesso modo si prouaria tutti essere simili l'vno all'altro suo corrispondente. Ancora la proportione di ciascun Triangolo dell'vn Rettilineo allo a lui corrispondente triãgolo dell'altro rettilineo è come la proportione che hà vn Rettilineo totale all'altro; Perche essendo il Triangolo a b c, dell'vn Rettilineo simile al Triangolo A B C, dell'altro, ne segue (per la 19. di questo) che la proportione dell'vn Triangolo all'altro sia duplicata alla proportione dell'vno, all'vn lato a quello corrispondente dell'altro, cioe dal Triangolo a b c, all A *B C*, è proportione duplicata a quella che è dal lato a c, all'A C; Ancora per la simili-

[illegible] del Triangolo a c d, all'A C D, la proportione dell'a c d, all'A C D è duplicata à quella, che ſi è detta che è dal lato a c, al lato A C, perilche dal Triangolo a b c, all'A B C, ſarà come dall Triangolo a c d, all'A C D. Et perche dal lato a d, del Triangolo a c d, al lato A D, del Triangolo A C D al ſimile è come dal lato a c, al lato A C, ſarà pure medeſmamente dal Triangolo a c d, al Triangolo A C D, proportione duplicata a quella del lato a d al lato A D, ma à queſta medeſma di a d, ad A D, è anco duplicata la proportione del Triangolo a d r, al Triangolo A D R, per la ſimilitudine di eſſi dui Triangoli, onde dall'a d r, all'A D R, ſarà come dall'a c d, all'A C D, & però anco come dall'a b c, all'A B C, & nel medeſmo modo ſi prouarà dal Triangolo a r n, all'A R N, eſſere come da ciaſcuno delli altri del primo rettilineo a ciaſcuno delli altri a loro corriſpondenti del ſecondo rettilineo, & coſi anco ſe altri triangoli fuſſero nelli dui rettilinei pure ſi prouarà che da ciaſcuno delli ſeguenti nel primo rettilineo a ciaſcuno delli ſeguenti nel ſecōdo, rettilineo ſarà come dall'a b c, all'A B C, & dall'a b d, all'A B D, & coſi come da ciaſcuno de gli altri Triangoli nel primo rettilineo a ciaſcuno de gl'altri Triangoli a loro corriſpondenti del, ſecondo rettilineo, perche dunque dal primo Triangolo nell'vn rettilineo al primo Triangolo nell'altro Rettilineo, è come dal ſecondo Triangolo al ſecondo, & come dal terzo al terzo, & come dal quarto al quarto, & ſi più ve ne fuſſero come dal quinto al quinto, & dal ſetto al ſetto, & coſi ſeguendo ſino al fine, ne ſegue, che nella equa proportionalità ha come da vn ſolo Triangolo antecedente, ad vn ſolo triangolo ſuo conſequente coſi la ſomma, o compoſto di tutti i Triangoli antecedenti alla ſomma di tutti i triangoli conſequenti, cioe coſi ſia l'vn Rettilineo (compoſto di tutti i triangoli antecedenti) all'altro Rettilineo (compoſto di tutti i Triangoli conſequenti) come è l'vn triangolo a l'vn triangolo a lui corriſpondente.

Finalmente la proportione dell'vn Rettilineo all'altro ſarà duplicata alla proportione che è da vn lato dell'vno ad vn lato a lui corriſpondente nell'altro, che preſi poniamo li dui lati corriſpondenti c d, C D, perche la proportione duplicata alla proportione di queſti è eguale alla proportione del triangolo a c d, al triangolo A C D, & anco la proportione del primo rettilineo al ſecondo è eguale alla iſteſſa proportione del triangolo a c d, al triangolo A C D, ne ſegue che medeſmamente la proportione del primo rettilineo al ſecondo ſia eguale alla proportione, che è duplicata a quella del lato a c, del primo al lato a lui corriſpondente A C, del ſecondo, & perche quando ſono tre quantità continue proportionali, la proportione che è dalla prima alla terza ſi chiama duplicata alla proportione, che è dalla prima alla ſeconda (o dalla ſeconda alla terza) ſe alli dui lati corriſpondenti a c, A C (o altri dui corriſpondenti) delli rettilinei detti, ſi troui la terza linea continua proportionale, & ſia la T E, all'hora la proportione che è dalla a c prima T E terza ſarà quella che è dal primo rettilineo al ſecondo.

Corollario.

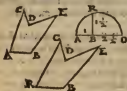
DI qui ſi manifeſta che ſe tre linee rette ſiano proportionali, coſi come è la prima alla terza, coſi ſarà il Rettilineo fatto ſopra alla prima al rettilineo ſimile, & ſimilmente poſto fatto ſopra alla ſeconda, ouero il rettilineo fatto ſopra alla ſeconda al rettilineo ſimile & ſimilmente poſto fatto ſopra alla terza, che eſſendo le tre rette 9 6, 4. proportionali, & percio la proportione che è dalla prima 9. alla terza 4. chiamandoſi duplicata a quella che è dalla prima 9. alla ſeconda 6. formando dui rettilinei ſimili, & ſimilmente poſti A, & B, ſopra alle 9. & 6. perche la proportione dell'A, al B è duplicata a quella che è dal lato 9. dell A, al lato 4. ſuo corriſpondente del B, come anco è duplicata la proportione, che è dalla prima retta 9. alla terza 4. alla medeſma detta della retta 9. alla retta 6. è chiaro che dal rettilineo A fatto ſopra alla prima alla a lui ſimile, & ſimilmente poſto B, fatto ſopra alla ſeconda, eſſere la proportione che è dalla prima linea 9. alla terza 4. Et coſi medeſmamente dal rettilineo *B*, fatto ſopra alla ſeconda al C, ad eſſo B, ſimile, & ſimilmente poſto che ſi faceſſe ſopra alla terza ſaria pure la proportione che è dalla prima linea 9. alla terza 4. perche eſſendo dal lato 6. del B, al lato 4. del C, come dal lato 9. dell'A, al lato 6. del B, & eſſendo da 6. a 4. come da 9. a 6. ne ſegue che dal Rettilineo B, al C, ſarà come dall'A. al B, ma dall'A, al *B*, è come da 9. a 4 però anco dal B, al C, ſarà come da 9 a 4. Et conuerſamente dal rettilineo C, al *B*, o dal B, all'*A*, ſarà come dalla terza retta 4. alla prima retta 9.

Di qui ſi vede come ſi poſſa conoſcere, che proportione habbino fra loro dui rettilinei ſimili & è che preſo vn lato del primo, & il lato a lui ſimile, o corriſpondente del ſecondo, ad eſſi dui lati, come à due linee prima, & ſeconda ſi troui la terza continua proportionale, che all'hora ſapremo la proportione del primo rettilineo al ſecondo, eſſere come dalla prima linea alla terza trouata, che ſe li dui lati preſi ſiano 15. del primo, & otto del ſecondo a queſti trouaremo il terzo proportionale dicendo ſe 15. doventa 8. che doventerà 8? O ſe quindeci antecedente, hà otto, per conſequente, l'iſteſſo otto doventando antecedente che haverà per conſequente, e

Onde moltiplicato 8. via 8. che fa 64. & esso 64. partito per 15. che ne viene $4\frac{4}{15}$. questo $4\frac{4}{15}$. sarà il consequente di 8. & però la terza quantità continua proportionale alle due 15. & 8 per il che la proportione della prima 15. alla terza $4\frac{4}{15}$. sarà quella che è dal primo rettilineo al secondo; Et conuersamente la proportione di $4\frac{4}{15}$. à 15. sarà quella che e dal secondo rettilineo al primo, cioè perche dal primo rettilineo al secondo è come da 15. à $4\frac{4}{15}$. che in intieri e come da 225. à 64. il denominatore della qual proportione è $3\frac{33}{64}$. (che nasce à partire 225. antecedente per 64. consequente, si dirà che il primo rettilineo contiene il secondo volte $3\frac{33}{64}$. ma conuersamente la proportione del secondo rettilineo al primo sarà come da 64. a 225. & hauerà per denominatore $\frac{64}{225}$ (còuerso di $3\frac{33}{64}$. cioè di $\frac{1}{3\frac{33}{64}}$) & però si dirà che il 2. rettilineo e li 64 225. esimi del primo. Et perche hauèdo queste 3. quàtità còtinue proportionali $4\frac{4}{15}$. 8. 15. ouero in intieri 64. 120. 225. & ridotta la prima 64. alla vnità sarãno 1. $1\frac{7}{8}$. & $3\frac{33}{64}$. & tal proportione è da 1 prima ad $1\frac{7}{8}$. seconda, come da $1\frac{7}{8}$ secòda a $3\frac{33}{64}$. terza, & perche quando la prima è la vnità essendo le secòda $1\frac{7}{8}$. per trouare la terza, si dice; Se 1. da $1\frac{7}{8}$. che darà $1\frac{7}{8}$? & moltiplicasi $\frac{7}{8}$. via $1\frac{7}{8}$. cioè esso $1\frac{7}{8}$. secòda in se stessa, & il prodotto $3\frac{33}{64}$. douendosi partire per l'1. prima, l'auenimento sarà l'istesso prodotto, ò quadrato $3\frac{33}{64}$. della seconda, vediamo che quando la prima è la vnità la terza è sempre il quadrato della seconda, ma quando la prima e la vnità, all'hora la seconda (ò vogliamo dire il numero, che mostra la seconda è il denominatore della proportione, che hà la seconda alla prima, & la terza similmente, ò vogliamo dire il numero, che mostra la terza è il denominatore della proportione che hà la terza alla prima Et perche dalla terza alla prima la proportione si chiama duplicata à quella, che è dalla terza alla seconda, o dalla seconda alla prima si vede che essendo sempre la terza il quadrato della seconda, che similmente sempre il denominatore della proportione della terza alla prima è il quadrato del denominatore della seconda alla prima, cioè il quadrato del denominatore della proportione che è dalla seconda alla prima è il denominatore della proportione, che si chiama duplicata alla proportione detta che è dalla seconda alla prima, o dalla terza alla seconda; Se dunque moltiplicaremo in se stesso il denominatore d'alcuna proportione data il prodotto sarà il denominatore della proportione che è duplicata alla data, onde conuersamente se pigliaremo la radice quadra del denominatore d'vna proportione proposta, l'auenimento, cioe essa radice quadra sarà il denominatore della proportione alla quale la proposta è duplicata, Che proposta la proportione di 49. à 25. quale hà per denominatore $1\frac{24}{25}$. pigliandone la sua radice quadra, che è $1\frac{2}{5}$. questo sarà il denominatore della proportione alla quale la proposta e duplicata, onde la proportione di 49 a 25. si componerà, & percio si potrà diuidere in due proportioni eguali il denominatore di ciascuna delle quali sara $1\frac{2}{5}$. & percio partendo l'antecedente 49. per $1\frac{2}{5}$. ò moltiplicando il cònsequente 25. per esso $1\frac{2}{5}$. il prodotto 35. sara consequète al 49. & antecedète al 25. cioe sara il medio proportionale fra 49. & 25. che diuiderà essa proportione nelle due eguali da 49 a 35. & da 35. a 25. dalle quali essa da 49. a 25. si compone. Et cosi anco fra 15. & 8. il medio proportionale sara rad. 120. Onde queste tre quantita 15. rad. 120. 8. saranno continue proportionali, che la proportione di 15. a radice 120. hauera per denominatore rad. $1\frac{105}{120}$. cioe radice $1\frac{7}{8}$. come anco il denominatore della proportione di radice 120. ad 8. sara rad. $1\frac{56}{64}$. cioe l'istesso radice $1\frac{7}{8}$. Ma delli Elementi delle proportioni cosi della minore, come della maggiore inegualità in altro luogo si potra trattare a sofficienza.

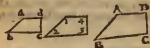
Mi si scordaua il mostrare come di qui si possa anco deriuare il modo di formare vna figura simile ad vn'altra data, & che habbi qual si vogli proportione alla data, & è il seguente.

Sia data la figura A B C D E, da formarne vna simile, quale alla data habbi la proportione, che hà 9. a 4. cioe sia volte $2\frac{1}{4}$ quanto la data. Per farlo, preso vn lato della data qual si vogli poniamo l'A B, a quello si accompagni in lungo, ò da vna banda, o dall'altra poniamo dalla destra vna retta B O. che sia volte $2\frac{1}{4}$. quanto essa A B, cioe che contenga la A B, tante volte quãto e il denominatore della proportione quale hà hauere la figura da farsi alla data (che se la da farsi hauesse ad essere volte 10. o $5\frac{1}{2}$. o 4. o volte $\frac{3}{4}$. o $\frac{2}{3}$. o $\frac{1}{4}$. o $\frac{1}{8}$. &c. quanto la data, ancora la B O doueria farsi lunga quanto è la A B, similmente volte 10. o volte $5\frac{1}{2}$. o 4. volte $\frac{3}{4}$. o $\frac{2}{3}$. o $\frac{1}{4}$. o $\frac{1}{8}$. &c.) poi sopra al composto A O, si formi vn mezo cerchio, & dal punto B, doue le due rette A B, B O, dette si accompagnano insieme se li erga la perpèdicolare B R, che ella sara il lato della figura da formarsi corrispondente al lato A B detto della data sopra al qual lato B R, si formi vna figura (o vogliamo dire vn Rettilineo) simile, & similmente posto alla figura data come insegna la 18. di questo, che ella contenirà la data le volte $2\frac{1}{4}$. che si ricerca. Perche essendo la retta B R (per la 13. di questo) media proportionale fra le due A B, B O, percio le tre A B, B R, B O, saranno continue proportionali; onde intesa B A prima. B R seconda, & B O terza, ne segue per il Corollario di questa 20. propositione, che la figura, o Rettilineo fatto sopra alla prima A B, al

rettilineo simile, & similmente posto fatto sopra alla seconda B R habbi la proportione che hà la prima linea B A, à la terza *B* O; Et conuersamente dal rettilineo fatto sopra B *R*, al fatto sopra B A; hauera la proportione di B O, a B A, ma *B* O contiene la B A volte 2 1/4. dalla contructione, pero ancora il Rettilineo, o figura formata sopra alla B R conterrà il fatto sopra alla *B* A, le istesse volte 2 1/4. come si voleua fare.

Et perche l'importanza della operatione consiste in trouare vna media proportionale fra le dette A *B*, *B* O, & potendosi in diuersi modi fra due date trouare vna media proportionale, potiamo adoprare qual modo ci venga commodo, & trouata la *B* R media detta sopra ad essa, formando sopra ad essa il rettilineo simile, & similmente posto al formato sù la A B, egli sarà quello che si domanda, o si voleua formare.

Propositione 21. Theorema 15.

I Rettilinei che sono simili ad vn'istesso rettilineo sono ancora simili fra loro.

Sia ciascuno delli dui Rettilinei a b c d, A B C D simile al Rettilineo 1. 2. 3. 4. si dice che detti dui Rettilinei a b c d, A *B* C D saranno simili fra loro. Perche, per la similitudine del rettilineo a b c d, al rettilineo 1. 2. 3. 4. essi saranno equiangoli, & di lati corrispondenti proportionali, cioe l'angolo a, sara eguale all'angolo 1. il b, al 2. il c, al 3. & il d, al 4. & la proportione del lato a b, al lato 1. 2. sara come dal lato b c, al 2. 3. & da c d, al 3. 4. & dal d a, al 4. 1. Et similmente per la similitudine del rettilineo A B C D, al detto istesso rettilineo 1. 2. 3. 4. egli sara equiangolo, & di lati corrispondenti proportionali, all'1. 2. 3. 4. cioe l'angolo A. sara eguale all'angolo 1. il B, al 2. il C, al 3. & il D, al 4. & la proportione del lato A *B* al lato 1. 2. sara come del lato *B* C al 2. 3. & del lato C D, al 3. 4. & del D A, al 4. 1. onde perche le cose che sono eguali ad vna medesma cosa sono eguali fra loro, & eguali anco quelle proportioni fra loro che sono eguali ad vna istessa proportione, ne segue che l'angolo a, sara eguale all'A (essendo ciascun d'essi eguale all'angolo 1.) il b, al B, il c, al C. & il d, al D, & che la proportione del lato a b, al lato A *B*, sara eguale alla proportione del lato b c, al B C, (essendo ciascuna d'esse eguale alla proportione, che è dal lato 1. 2. al lato 2 3.) & del c d, al C D, & del d a, al D A. perilche prouandosi li dui rettilinei a b c d. A B C D, essere fra loro equiangoli, & hauere i lati corrispondenti proportionali, ne segue che essi dui rettilinei siano simili fra loro, che e quanto occorreua dimostrare.

Propositione 22. Theorema 16.

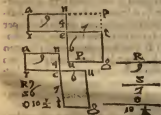
SE quattro linee rette siano proportionali, & sopra alla prima, & seconda siano formati dui Rettilinei simili, & similmente posti; Et anco sopra alla terza, & quarta siano fatti dui altri Rettilinei simili, & similmente posti, essi quattro Rettilinei saranno anc'essi proportionali, & conuersamente se dui, & dui Rettilinei simili, & similmente posti siano proportionali, ancora le due, & due linee sopra alle quali essi rettilinei siano formati saranno proportionali.

Siano le quattro rette a b, c d, A *B*, C D, proportionali, cioe dalla prima a b, alla seconda c d, sia come dalla terza A *B*, alla quarta C D, & sopra alle due prime siano formati dui rettilinei di che numero di lati si voglino simili, & similmente posti, poniamo li dui Triangoli r, & R. Et ancora sopra all'altre due A B, C D siano formati dui rettilinei a beneplacito simili, & similmente posti, poniamo li dui Quadrilateri m, & M, si dice che la proportione del Triangolo r, al R, sara come del Quadrilatero m, al M. Per dimostrarlo, alle due rette a b, e d, si troui la terza continua proportione t, & ancora alle due A B, C D la terza continua proportionale T, che cosi essendo da a b, prima ad c d, seconda, come da *A B*, prima, ad C D seconda, & da c d, seconda à t, terza,

esse proportioni di detti rettilinei siano egu ali fra loro cioe che dall'r. all'R, sia come dall'm. al-l'M. Ancora conuersamente, Posto che dal rettilineo r, all'R sia come dall'm.all'M. si dice che dalla retta a b. alla c d, sarà come dalla retta A B. alla C D. Perche essendo la proportione del rettilineo r.all'R, duplicata a quella della retta a b. alla c d, come anco la proportione del rettilineo m, all'M. è duplicata a quella della retta A B. alla C D; ne segue che essendo le proportioni delli rettilinei eguali fra loro, ancora le duplicate ad esse siano eguali fra loro, cioe che la duplicata alla proportione di a b, a c d sia eguale alla duplicata alla proportione di A B. a C D. per il che anco la simplice proportione di a b. a c d; sara eguale all a simplice proportione di A B. a C D. che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 23. Theorema 17:

NElli Paralellogrammi equiangoli la proportione dell'vno all'altro è composta dalle due proportioni che hanno i dui lati continenti vn'angolo dell'vno alli dui lati continenti l'angolo a quello eguale dell'altra.

Siano li dui paralellogrammi a c, e g. equiangoli, cioe che ciascuno delli dui angoli contrapositi a, & c. dell'vno, siano eguali a ciascuno delli dui angoli contrapositi, c, & g. dell'altro, (come anco ciascuno delli due r, & n, a ciascuno delli dui t, & u.) si dice la proportione del paralellogrammo a c, al c g. componersi dalle due proportioni che hanno i dui lati dell'a c, alli dui lati del c g. ponendo ambidui li antecedēti nell'a c, & ambidui li consequēti nel c g. Cioe la proportione del paralellogrammo a c, al c g. essere cōposta dalle due proportioni che sono l'vna da r c, a c t) & l'altra da n c, a c u (ouero l'vna da r c, a c u, & l'altra da n c, a c t) Per dimostrarlo; Accompagninsi essi dui paralellogrāmi insieme mediāte dui angoli eguali, & siano li c, & c, di modo che la retta r c, sia in linea retta cō la c t (ouero con la c u) voltando il c g. di sotto dall'altra banda come si vede, che cosi anco la retta n c, sarà in linea retta con la c u, (ouero nell'altra figura con la c t) come si mostrò douere auuenire nella 14. di questo, & si allunghino le due rette a n, & g t. verso n, & t, finche concorrano insieme, & sia in p. formando con le n c a c t. il paralellogrāmo c p. Dipoi presa vna retta a beneplacito, & chiamiamola R ad essa si troui la consequente S. nella proportione di r c, antecedente a c t consequente (come insegna la 12. di questo) & ancora alla S. presa hora come antecedente si troui la O, consequēte nella proportione di n c, a c u; (che sono gli altri dui lati angolari delli paralellogrammi a c, c g.) Hora per che dal paralellogrammo a c, al c p. di eguali altezze (che sono fra medesme linee paralelle) è come dalla base r c, alla c t, & anco dalla retta R, alla S. dalla construttione è come dalla r c, alla c t, ne segue che dal paralellogrammo a c, al c p. sia come dalla retta R. alla S. Et perche dal paralellogrammo c p. al c g. di eguali altezze è come dalla base n c, alla c u; & anco dalla S. alla O. è (dalla construttione come dalla n c, alla c u, ne segue che dal paralellogrammo c p. al c g. sia come dalla retta S. alla O. Onde nella Equa proportionalità (essendo dal paralellogrammo a c, al c p. come dalla retta R alla S. & dal c p. al c g. come dalla retta S. alla O.) sarà dal paralellogrammo a c al c g. come dalla retta R, alla O; ma la proportione della retta R alla O è composta delle due di R ad S. & di S. ad O. Cioe delle due di r c, a c t, & di n c, a c u, però ne segue che similmente la proportione del paralellogrammo a c, al c g, sia composta delle due proportioni di r c, a c t, & di n c, a c u, la qual tal loro come si voleua prouare.

Questa Propositione si può anco dimostrare cosi.

Accompagnati li dui paralellogrammi equiangoli come di sopra nella prima figura si dirà. Perche dal paralellogrammo a c, al c p. è come dalla retta r c, alla c t, & dal paralellogrammo c p. al c g. è come dalla retta n c, alla c u; il composto delle due proportioni di a c, a c p; & di c p, a c g. sarà tanto quanto il composto dell'altre due dette di r c, a c t, & di n c, a c u; Ma la proportione del paralellogrammo a c, al c g; è (per la diffinitione composta dalle due intermedie, che sono di a c, a c p: & di c p: a c g; però si dirà come segue nell'altra facciata, cioe che è

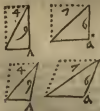
anco compoſta dalle due di r e,a e t,& di n e,a e u, alle dette due intermedie eguali, ma queſti r e.e t,n e.e u,ſono i dui,& dui lati di detti paralellogrammi a e;e g; che contengono dui angoli eguali in eſſi paralellogrammi eſſendo gli antecedenti delle due proportioni i dui lati d'vn paralellogrammo,& li conſequenti i dui lati dell'altro paralellogrammo, però è chiaro la proportione d'eſſi dui paralellogrammi eſſere compoſta dalle due proportioni de lati loro come ſi è detto.

Notiſi che diecidoſi di ſopra che ſi pigli vna retta a beneplacito,& ſia la chiamata R,& a queſta ſi troui la conſequente S.nella proportione di r e,antecedente a,e t.conſequente,& ancora alla *S*. preſa hora come antecedente ſi troui la O, conſequente nella proportione di n e,a e u, (accioche la proportione di R ad O,ſia compoſta dalle due di r e,a e t,& di n e,a e u)ſi può anco più breuemente dire, Alle r e, prima & e t, ſeconda ſi troui la terza nella proportione di n e,a e u, & ſia la D.che coſi la proportione di r.prima a D.terza ſara compoſta delle due di r e,a e t, & di e r, a D.& però & di n e,a e u,ma come è r e,a e t,coſi è il paralellogrammo a e, al e p, & come è n e, a e u,& però come è e t,a D.coſi è il paralellogrammo e p,al e g.Onde nella Equa proportionalità come è da r e, prima a D.terza, coſi ſarà il paralellogrammo a e,al e g. ma la proportione di r e,a D.è compoſta delle due dette di r e,a e t, & di n e,a e u, lati detti delli dui paralellogrammi, però è chiaro la proportione delli dui paralellogrammi eſſere medeſimamente compoſta dalle proportioni de' lati loro come è detto.

Et perche il prodotto delli dui denominatori di due proportioni date è il denominatore della proportione compoſta dalle due date ſe delli dui paralellogrammi propoſti il primo habbi per lati 9.& 4.Et l'altro 6.& 7.preſi per antecedenti li dui lati del primo 9.& 4; & per conſequenti li dui lati del ſecondo 6.& 7.le due proportioni ſaranno da 9.a 6,& da 4.a 7. i denominatori delle quali ſaranno $1\frac{1}{2}$, & $\frac{4}{7}$. il loro prodotto $\frac{6}{7}$. ſara il denominatore della proportione compoſta dalle due dette,& però il denominatore della proportione che ha il primo paralellogrammo inteſo per primo quello doue ſi ſono preſi li antecedenti al ſecondo che è quello doue ſi ſono preſi li conſequenti,cioe quando il primo paralellogrammo ſia,o importi $\frac{6}{7}$.il ſecondo ſara, o importara la vnita cioe.1. o vogliamo dire il primo contenira volte $\frac{6}{7}$. il ſecondo,che in prattica ſi diria il primo eſſere li $\frac{6}{7}$.del ſecondo. Et pigliando per primo paralellogrammo quello che ha per lati 6,& 7,& ſaranno li antecedenti, eſſendo conſequenti 9 & 4. lati dell'altro ſecondo paralellogrammo, & paragonando 6.a 9 & 7.a 4. che i denominatori di queſte due proportioni ſaranno $\frac{6}{9}$.& $\frac{7}{4}$.(o vogliamo dire $\frac{2}{3}$.& $1\frac{3}{4}$.) il prodotto loro ſara $\frac{42}{36}$. cioe $1\frac{1}{6}$. Che ſe paragonaremo 6 a 4.& 7.a 9.i denominatori di queſte due proportioni ſaranno $\frac{6}{4}$.& $\frac{7}{9}$.(o vogliamo dire $1\frac{1}{2}$.& $\frac{7}{9}$.)il prodotto loro ſara $\frac{42}{36}$,cioe $1\frac{1}{6}$,come prima,quale ſara il denominatore della proportione del paralellogrammo inteſo hora primo al paralellogrammo inteſo, o preſo per ſecondo, onde ſi dirà il primo contenere volte $1\frac{1}{6}$ il ſecondo.

Sappiamo ancora che la grandezza delli Paralellogrammi rettangoli è moſtrata dal prodotto de dui lati loro che contengono vno de ſuoi angoli retti, & che perciò la proportione dell'vn paralellogrammo all'altro,è come dell'vn prodotto all'altro. Onde hauendo dui paralellogrammi rettangoli,che i dui lati dell'vno,& ſia il primo preſo per antecedente,ſiano 4.& 9.& i dui lati dell'altro ſiano 6.& 7.che il dutto di 9.& 4.è 36.per la grandezza del primo che ſi paragona, Et il dutto di 6.& 7.è 42,per la grandezza del ſecondo al quale ſi fa il paragone,Sappiamo che la proportione del primo al ſecondo e come da 36. a 42; o in minimi numeri , come da 6, a 7. però partito 6 antecedente per 7. conſequente che ne viene $\frac{6}{7}$. queſto ſara il denominatore della proportione che ha il primo al ſecondo.(Et conuerſamente la proportione del ſecondo al primo ſaria come da 42.a 36.cioe come da 7.a 6.che ha per denominatore $\frac{7}{6}$.cioe $1\frac{1}{6}$.)Di qui mò ſi conoſce che dati li antecedenti, & li conſequenti di due proportioni moltiplicando i dui antecedenti inſieme il prodotto *A*.ſarà antecedente (che di ſopra dalli antecedenti 4.& 9. ſi produſſe il 36. antecedente)& moltiplicando i due conſequenti inſieme il prodotto C.ſarà cōſequente della proportione che e compoſta dalle due date.

Quando anco i dui paralellogrammi equiangoli fuſſero non rettāgoli , ſaria pure la proportione del primo al ſecondo, come dal prodotto delli dui lati poniamo 4.& 9.del primo al prodotto delli dui lati poniamo 6,& 7.del ſecondo, perche il primo conteniria 36. rombi d'vna vnità per lato,& il ſecōdo ne conteniria 42,a quelli 36.ciaſcun d'eſſi ſimili,& eguali.

Et ancora nelli Triangoli quando vn'angolo A.dell'vno ſia eguale ad vn'angolo a , dell'altro la proportione del primo Triangolo al ſecondo ſara eguale alla proportione del prodotto delli dui lati contiuenti l'angolo A. nel primo al prodotto delli dui lati continenti l'angolo

golo a nel secondo, perche, o siano gli angoli A. & a, eguali retti, o non retti, li dui Triangoli si potranno considerare essere la mità di dui parallelogrammi rettangoli, o non rettangoli che habbino i medesimi angoli A, & a. con i medesimi lati continenti essi angoli, & perche i dui prodotti de i dui, & dui lati mostrano la proportione delli dui parallelogrammi, essi mostraranno ancora la proportione delle due mità loro che sono i dui Triangoli.

Propositione 24. Theorema 18:

IN ogni Parallelogrammo, i parallelogrammi che gli stanno attorno al diametro sono simili fra loro, & al parallelogrammo totale, & similmente posti.

Sia il Parallelogrammo A B C D. & in esso tirato il diametro A C. per vn punto segnato in questo diametro doue si vogli poniamo per l'I. si tiri la retta E F, equidistante alli lati A B. D C. & ancо la G H, equidistante alli lati A D. B C, che cosi delli 4. parallelogrammi nelli quali l'A B C D. sara diuiso li dui A G I E, & I F C H. sono attorno al diametro A C. del totale, Si dice essi dui parallelogrammi essere simili fra loro, & al totale, cioe fra loro equiangoli, & di lati corrispondenti proportionali. Perche quanto al parolellogrammo G E, il suo angolo A. è l'istesso del totale parallelogrammo B D, & il G, è eguale al B. che sono l'vno l'esterno, & l'altro l'interno da vna medesma banda delle due rette equidistanti G H, B C, segate dalla A B, & per l'istessa causa l'E, è eguale al D. & però il restante G I E, al restante B C D. Ancora considerati i dui Triangoli A G I. A B C, che sono equiangoli (perche l'angolo A. è a loro commune, il G è eguale al B & però il restante A I G. è eguale al restante A C B) essi (per la 4. di questo) haueranno i lati corrispondenti proportionali, cioe da A G. a G I. sara come da A B. a B C, & conuersamente da I G. a G A, & però da I G ad I E, eguale a G A (che nelli parallelogrammi li lati, & angoli in essi contraposti sono fra loro eguali) sara come da C B. a B A. & però a C D. eguale a B A. & similmente da I E, ad E A. che e quanto a dire da A G, a G I, sara come da C D. a D A, che e quanto a dire da A B, a B C, onde il parallelogrammo G E, e simile al totale B D. & anco similmente posto perche G I lato inferiore, e corrispondente a B I. lato inferiore, & A G. lato sinistro e corrispondente ad A B. lato sinistro, & cosi E I. a D C, & anco A E, ad A D. Nel medesimo modo si dimostrara il parallelogrammo F H. essere ancor egli simile, (& similmente posto) al totale B D. & perciò medesmamente (per la 21. di questo) simile all'altro partiale G E, onde essi tre parallelogrammi, totale cioe, & partiali saranno simili fra loro che e quanto si voleua mostrare.

Di qui si può conoscere come data vna retta si possa formare vn parallelogrammo simile, & similmente posto ad vn parallelogrammo proposto, Che proposto il parallelogrammo B D. per formare sopra ad vna data retta B C, vn parallelogrammo simile, & similmente posto al B D. volendo che la data B C, sia corrispondente al lato B C, del parallelogrammo proposto, Noi posta la data B C, sul lato B C, vnendo il punto B. con il B. se anco il C, si vnira con il C. cioe che la data B C, sia eguale al lato B C, quale si vuole esserli corrispondente, all'hora senz'altra operatione il parallelogrammo B D. proposto sara anco quello che simile, & similmente posti a lui si facci su la data (che se lo volessimo fare di sotto alla B C, si allungariano dalla parte di sotto le due rette A B. D C, altrettanto quanto è la lunghezza loro, & congiunte poi le loro estremità con vna retta che saria corrispondente & eguale alla A D. si saria formato, o composto il parallelogrammo B D. istesso dall'altra banda su la data B C) Ma essendo la data corrispondente al lato B C, la F C, minore del lato B C; noi posto la F C. sul lato B C, vnendole insieme con vn termine commune, & sia hora il C. segnaremo l'F. su la B C, & dal termine commune C. all'opposito A. nel parallelogrammo tiraremo il diametro C A. & dal punto F. nel parallelogrammo tiraremo la F E, equidistante alla C D. ouero alla A B. (che è l'istesso) & anco dal punto I nel diametro doue egli e segato dalla F E tiraremo la G I H, equidistante alli lati B C, A D. del parallelogrammo A D. che cosi il parallelogrammo F I H C, formato su la F C, sara simile, & similmente posto al B D; Et se il parallelogrammo proposto fusse l'A G I E, & la data la retta A D. che deua essere corrispondente al lato G I, ouero all'A E, oppostoli a lui eguale (che resulta l'istesso) & sia più lunga d'esso lato A E, noi poneremo pure la data A D, sul lato A E, di modo che habbino con estremità commune, & sia il punto A. che il D. passarà oltre all'E, & da detto termine comune A. nel parallelogrammo G E, tiraremo il diametro A I. allungandolo verso I, finche concorra cō vna retta che dal D, sia

sia tirata equidistante al lato E I, & sia in C, dal qual punto C, si tirarà vna retta equidistante al lato I G, finche concorra con il lato A G. allungato verso G. & sia in B. che cosi su la data A D. sarà formato il paralellogrammo A B C D. simile, & similmente posto all'A G I E proposto.

Propositione 25. Problema 7.

DAto vn Rettilineo si può formare vn Rettilineo a questo simile, & ad vn'altro Rettilineo proposto eguale,

Sia dato il Rettilineo A. simile al quale si habbi da fare vn rettilineo, che sia eguale al rettilineo *B*. proposto, Per essequirlo, Sopra ad vn lato qual si vogli del dato A. poniamo sopra al lato C D. si formi vn paralellogrammo rettangolo, o non rettangolo a beneplacito (cioè che habbi dui angoli contrapositi di che ampiezza ci piaccia) eguale ad esse dato rettilineo A (come insegna la 45. del primo) & sia il C D E F, poi inteso continuata, o allungata la retta C D. verso il C, o verso il D. poniamo verso il D. indefinitamente, accioche l'angolo che esso allungamento facci con l'altro lato D E, del paralellogrammo D F, angolo eguale a qual si vogli delli dui angoli C, & E in esso paralellogrammo a, contrapositi, & eguali; Si formi poi su questo lato, o retta D E, in esso angolo dell'allungamento eguale al D C F, vn paralellogrammo eguale al rettilineo B. & sia il D G H E, o vogliamo dire il b. che cosi dal paralellogrammo a, al paralellogrammo b, sarà la proportione che è dal Rettilineo A. (eguale all'a) al rettilineo *B* (eguale al b) Et perche li dui paralellogrammi a, & b, sono formati fra le due rette equidistanti C G, F H, cioe hanno vna medesima altezza, la proportione dell'a, al b, sara come della retta C D. base dell'a, alla D G. base del b, & però anco come è la retta C D, alla D G, cosi sara il rettilineo A. al rettilineo B; Hora a queste due rette C D. D G, si troui la media proportionale, & sia la r s, sopra alla quale si formi (per la 18. di questo) vn rettilineo simile, & similmente posto all'A. (cioe di modo che la r s, sia corrispondente al lato C D. in detto A adoprato) & sia il T. qual T, sarà quello che si è proposto di fare, che oltre l'essere simile all'A. è anco eguale al rettilineo *B*, perche essendo le 3. rette C D, r s, D G, continue proportionali, & essendo formati sopra alla prima C D. & sopra alla seconda r s. li dui rettilinei A, & T. simili, & similmente posti, ne segue (per il Corollario della 20. di questo) che dal rettilineo *A*. al T. sia come dalla retta C D. prima alla D G, terza, ma anco come è dalla C D. alla D G, cosi è dal rettilineo A. al rettilineo *B*. perilche il rettilineo A. cosi al B. come al T, ha vna istessa proportione. Onde (per la 9 del quinto) essi rettilinei B, & T, sono eguali fra loro, si è dunque formato il rettilineo T, eguale al B. & simile all'A come si voleua.

Da questa Propositione si può deriuare il modo di misurare, o trouare la grandezza di qual si vogli rettilineo, formando vna figura regolare facile da saperne la grandezza come saria vn Esagono, o Triangolo Equilatero, o più commodamente vn Quadrangolo rettangolo, o vn Quadrato eguale ad esso rettilineo, che poi misurato il lato del Quadrato, & moltiplicandolo in se stesso il prodotto sarà la grandezza del Quadrato, & consequentemente del Rettilineo, al quale esso Quadrato si è fatto eguale.

L'istesso che qui si propone insegna di fare la mia Trasformatione Geometrica, ma nondimeno con questa differenza che per la superiore Propositione. Proposto vn Rettilineo B si forma vn'altro rettilineo T, eguale, o vogliamo dire equiualente al proposto, & simile ad vn dato rettilineo A; ma la mia Trasformatione, Proposto il B. & dato l'A. non forma vn'equiualente al *B*. anzi l'istesso *B*. trasforma, & fa douentare simile all'A. onde l'istesso B, douenta il T. Quando si hauerò commodità sufficiente si darà in luce vn'altra Opera in questo genere mostrando come proposto vn rettilineo B, egli istesso si trasformi in vn rettilineo di quanti lati si vogli, & che giri quanto ei piaccia, purche il giro non sia talmente corto che non possa serrare il rettilineo in che si trasformi il *B*.

Di più potiamo notare che questo Problema si può anco applicare al ridurre vn numero di fanti a forma d'vn'Ordinanza data, Che dato il rettilineo A. formare vn rettilineo T, simile a questo, & eguale ad vn'altro rettilineo *B*. si può dire, o intendere che sia formare vn'Ordinanza T, simile alla A. & eguale alla *B*. cioe che ella contenga vn proposto numero di fanti *B*. cioe dicendosi. Proposto 1248. fanti si vogliono ridurre in vna Ordinanza quadrangola retrangola tale che il numero di fanti della fronte sia volte $2\frac{1}{4}$, quanto il numero delle file del fianco, Noi supposto, o imaginato vn paralellogrammo rettangolo a beneplacito che per fronte sia volte $2\frac{1}{4}$, tanti fanti quanto ha per fianco, poniamo 9. fanti per fronte, & 4. fanti per fianco (che sono i minimi numeri intieri significanti la proportione di $2\frac{1}{4}$. ad 1. cioe che ha per denominatore $2\frac{1}{4}$, & si chiami A.

Et ancor vna superficie a beneplacito che contenga li fanti 1248, & si chiami *B*. all'hora direm che si formi vna figura simile alla A. & eguale alla *B*. Et per farlo come insegna la presente 25. Propositione noi su vn lato dell'A.& sia sul 9 fronte C D. faremo vn paralellogrammo eguale ad esso A.ma egli è di già imaginato o posto essere paralellogrammo però non ci occorre questa Operatione, onde seguendo, su l'altro lato dell'A. cioe sul fianco D E 4; formaremo vn paralellogrammo anc'egli rettangolo eguale alla superficie *B*.cioe che cōtenga 1248 fanti,perilche essendo il fianco D E cioe vno delli dui lati continenti vno delli suoi quattro angoli retti 4. l'altro che si chiamarà fronte D G.sarà 316. (che a partire 1248. grandezza per 4. larghezza D E, ne viene 316 lunghezza D G. Hora fra le due rette C D.9.D G 316.si troui la media proportionale r s. che sarà la rad.di 2844 dutto di 9.in 316,cioe sarà quasi 53 $\frac{\,}{1}\frac{3}{0}\frac{5}{6}$.sopra alla quale si formi vna figura simile, & similmente posta alla A,(cioe tale che la r s.sia corrispondente al lato C D.dell'A. adoprato,& però hora significarà la fronte)& sia la T.che cosi si faranno ridutti li 1248. fanti in Ordinanza simile alla A. cioe la fronte della quale hauera volte 2$\frac{1}{4}$. tanti fanti, quanto è il numero del fianco,onde il lato i,r.del paralellogrammo rettangolo T, sara rad.561$\frac{7}{9}$. cioe 23$\frac{1}{2}\frac{6}{3}$, & alquanto più. Et perche nelli fanti numeri Aritmetici che hanno la loro vnità indiuisibile non possono interuenire rotti,noi tenendo conto solo delli intieri potremo dire che la Ordinanza hauera 23 file a 53.fanti per fila,nella quale il 53.fronte non è precise volte 2$\frac{1}{4}$.quanto il 23.fianco,perche questi numeri rationali intieri nō lo comportano (come fanno li irrationali, & precisi rad.2844. & rad.561$\frac{7}{9}$.che producono precise 1248.)Et perche 23.via 53.fa 1219. che sono i fanti quali fariano in detta Ordinanza si vede che sono al 1248.numero proposto vi restariano fanti 17. Et cosi si risponderia che hauendo fanti 1248. se ne faria Ordinanza di file 23.a 53.fanti per fila,& auanzariano fanti 17.

C 9 D R 16 G
4 | A | 4 1248 |
B
i n
T
r s

rad.2844
cioe quasi 53 $\frac{\,}{1}\frac{3}{0}\frac{5}{6}$
9 4 rad.2844
316
5056
rad. 561$\frac{7}{9}$
cioe 23$\frac{1}{2}\frac{6}{3}$, & più.

Da questo operare Geometrico deriuandone la Regola numerale si potrà dire.

Proposto vn numero di fanti per ridurlo ad Ordinanza che il numero de fanti del'a fronte al numero delle file habbi vna data proportione. Con il Consequente d'essa proportione si parta il numero proposto di fanti, & l'auenimento si moltiplichi per l'antecedente di tal proportione,& dal prodotto si pigli la rad.quadra,che ella sara il numero del i fanti della fronte,quale si moltiplichi per il consequente della proportione data,& il prodotto si parta per l'antecedente che il prodotto sara il numero delle file, Per esempio, proposto il superior numero di fanti 1248.da ridurre in Ordinanza tale che il numero de' fanti della fronte sia volte 2$\frac{1}{4}$.quanto il numero delle file;perche di questa proportione in intieri minimi (per schiuar rotti) che sono 9, & 4; l'antecedente è 9. & il consequente 4, noi con il consequente 4. partiremo il 1248. numero proposto, & ne viene 316, quale moltiplicaremo con l'antecedente 9, & fa 2844. del che pigliaremo la rad. & è quasi 53 $\frac{\,}{1}\frac{3}{0}\frac{5}{6}$. cioe con rotto più facile si dirà essere circa a 53$\frac{1}{3}$. & questo è il numero de' fanti della fronte,quale nondimeno diremo essere solo l'intiero 53;Questo 53$\frac{1}{3}$,in circa si moltiplichi hora per il consequente 4.& il prodotto 213$\frac{1}{3}$.si parta per l'antecedente 9.che l'auenimento 23$\frac{1}{2}\frac{0}{7}$,in circa ma leuando il rotto si pigliara solo il 23. intiero dicendo egli essere il numero delle file, cioe che se ne faranno 23. file a 53.fanti per fila che perciò ne auanzaranno fanti 17.

Ma se senza trouare il 9. & 4. per hauere in numeri intieri l'antecedente, & consequente della proportione data adopraremo il 2$\frac{1}{4}$. che sara l'antecedente, essendo consequente la vnità (douendo hauere la fronte al fianco la proportione che ha 2$\frac{1}{4}$.ad 1.il denominatore della quale proportione è il medesmo 2$\frac{1}{4}$.)noi partiremo il proposto 1248. numero de fanti per 1.consequente, & ne viene l'istesso 1248.quale moltiplicaremo per il 2$\frac{1}{4}$.antecedente(o denominatore della proportione) & fa 2844. di che pigliaremo la radice quadra, & è quasi 53 $\frac{\,}{1}\frac{3}{0}\frac{5}{6}$ quale è il numero della fronte da moltiplicare per il consequente 1.che fa l'istesso 53 $\frac{\,}{1}\frac{3}{0}\frac{5}{6}$ da partire per l'antecedente 2$\frac{1}{4}$, & ne viene 23 $\frac{6}{6}\frac{7}{5}\frac{0}{4}$.per il numero del fianco, onde presi solo gli intieri diremo che si faranno 23. file a 53. per fila auanzandoui però 17. fanti. Hora vediamo che quando il consequente della data proportione è la vnità all'hora la partitione & moltiplicatione che si douessero fare con essa vnità consequente suaniscono & solo restano le operationi che si fanno con l'an-

teedente che è anco all'hora il denominatore della proportione data perilche breuemẽte si può dare la Regola dicendo.

Proposto vn numero di fanti da ridurre in Ordinanza tale che il numero de i fanti della fronte al numero delle file, o fianco habbi vna data proportione, Con il denominatore d'essa proportione data si moltiplichi il numero de i fanti proposto, & del prodotto si pigli la radice quadra, che ella sarà il numero della fronte quale si parta per il denominatore detto della proportione data che l'auenimento sarà il numero del fianco, o vogliamo dire il numero delle file; Per esempio; Proposto 890. fanti da ridurre in Ordinanza tale che il numero de fanti della fronte sia doppio al numero delle file del fianco, Noi con il 2. denominatore della proportione dupla, o doppia data, moltiplicaremo 890. numero de fanti proposto, & del prodotto 1780. pigliaremo la radice quadra che è circa a 42 $\frac{1}{2}$ ma lassaremo il rotto, o auanzo della radice tenendo conto solo dell'intiero 42. & questo è il numero de i fanti della fronte, quale partiremo per il 2. denominatore detto della proportione data, & ne viene 21 che è il numero del fianco, cioè il numero delle file, & così diremo che se ne faranno 21. fila, a 42. fanti per fila, che però la Ordinanza hauerà 841. fanti, onde auanzaranno 8. fanti; Et così questa vniuersale, & facilissima Regola può seruire alle Ordinanze Quadrangole, habbi la fronte al fianco che proportione si vogli.

Propositione 26. Theorema 15.

SE da vn Parallelogramo sia leuato vn parallellogrammo simile, & similmente posto al parallellogrammo totale, & hauente vn'angolo commune con esso totale, questo leuato è necessario che sia intorno al diametro del parallellogrammo totale.

Sia il Parallelogrammo A B C *D*. dal quale si intenda leuarsene il parallellogrammo e s r o, che habbi l'angolo C, commune con l'A B C *D*. & sia a lui simile, & similmente posto, si dice che questo o s, leuato, o da leuarsene sarà di necessità intorno al diametro del totale B D. cioè che dal punto C, angolo commune tirato il diametro C A, nel totale parallelogrammo *B* D. egli passarà per il punto angolare r. del parallellogrammo o s, & così il diametro c r. dell'o s, sarà parte del diametro C A. del B D. o vogliamo dire che tirato dall'angolo c, commune nell'o s. il diametro c r, & allongato o verso r, fino al termine del parallellogrammo, *B* D. egli peruerrà di necessità al punto A. Perche non può peruenire a segare il lato A D. nè meno l'A *B*; che se per l'Aduersario egli potesse segare l'A D. & sia in g. essendo per l'Aduerlario e r g. vna linea retta considerato il Triangolo e g D. che saria equiangolo, simile, & similmente posto, & di lati proportionali al Triangolo e r s. (per essere la retta r s. segante i lati e g. & C D. del e g D. equidistante alla base g D. stante la similitudine de dui parallelogrammi B D. o s. che l'angolo s r o, però è

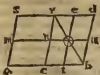
eguale all'A. l'r o e, al B & il e s r, al D. cioè l'estrinseco r s e, all'intrinseco oppostoli A D G, da vna medesma parte delle due rette r s. A D. segate dalla C D. (ne seguiria la proportione di C D. a D g. essere come di e s. ad s r. ma ancora essendo il parallelogrammo o s. simile, & similmente posto al B D. è da C D. a D A. come da e s. ad s r, onde la proportione di e D. a D g. sarà la istessa, o vogliamo dire eguale a quella) che è da C D. a D A. cioè la C D. così alla D A. come alla D g, haueria vn'istessa proportione, & però di necessità elle due rette D g. D A. fariano eguali fra loro, ma D g. è parte di D A. però la parte saria eguale al tutto il che è impossibile, onde anco è impossibile quello da che questa impossibilità deriuaria cioè è impossibile che allungato il diametro c r, egli seghi il lato A D. in alcun luogo; nè meno potrà segare il B A. che se per l'Aduersario lo potesse segare poniamo in n, dicendo e r n, essere vna istessa linea retta, pure si diria che per la similitudine de dui parallelogrammi o s, *B* D. essendo la retta o r, equidistante alla *B* A. & segando i dui lati C *B*. C n, dell'imaginato Triangolo n C *B*. ella gli segarà proportionalmente formando il Triangolo c o r, simile, & similmente posto al C *B* n, onde dalla C *B*, alla *B* n, nel Triangolo C *B* n, sarà come dalla C o, alla o r, nel Triangolo c o r, ma ancora

per la

per la similitudine de doi parallelogrammi s o, B D, pur anco è dalla C B. alla B A, come dalla C o, alla c r; però dalla C B. alla B n, saria come dalla istessa C B. alla B n, & però la B n, & la B A. sariano eguali, cioe la parte al tutto il che è impossibile, perilche la c r, diametro del parallelogrammo o s, allungato non potrà segare nè il lato D A. nè il B A, peruerrà dunque precise al punto angolare A, & cosi r c. sarà parte del totale diametro c A, onde il parallelogrammo o s. starà attorno al diametro dello a lui simile, & similmente posto parallelogrammo B D, che è quanto si voleua mostrare.

Propositione 27. Theorema 20.

IL Parallelogrammo formato sopra alla mità d'vna data linea retta è maggiore di qual si vogli parallelogrammo applicato alla data retta, al quale manchi al compimento della linea data vn parallelogrammo simile, & simile posto al parallelogrammo che sia formato, o posto sopra alla mità della data linea.

Sia la data retta a b, sopra alla mità e b, della quale sia posto il parallelogrammo c d; ancora sopra all'altra mità a c, sia formato il parallelogrammo a r, simile, & similmente posto al detto c d, che cosi essendo il lato a e, corrispondente al c b. a lui eguale, ancora l'a s, sarà eguale alla a lui corrispondente c r, & però il c r, sarà commune ad ambidui essi parallelogrammi a r, c d, che essi haueranno vna medesima altezza, & i dui lati eguali s r, r d. saranno in vna istessa retta s r d, come anco i loro oppositi; & eguali a c, & a b, pure anco sono in vna istessa retta a c b, Et si intenda il parallelogrammo a r, applicato alla retta a b, che cosi a compire essa retta a b. vi mancarà il parallelogrammo c d, che è a lui eguale, hauendo essi basi, & altezze eguali, Si dice che qual si vogli altro parallelogrammo che si applichi a detta retta a b. tale, che manchi a compire essa retta a b. vn parallelogrammo simile, & similmente posto al c d. sarà minore dell'a r, applicato come è detto alla mità a c, d'essa linea a b, cioe che il parallelogrammo a r, (& però anco il c d, a lui eguale) sarà maggiore di ciascuno de gli altri che s'applicassero con tal conditione alla a b; Per dimostrarlo, Sia che alla a b, presone più della mità a c, si applichi il parallelogrammo a t, o n, al quale manchi a compire la a b. il parallelogrammo t o, simile, & similmente posto al c d, & dal b. all'o. si tiri la retta b o, diametro del parallelogrammo deficiente t u, & si allunghi per o, fino che arriui alla s d, & vi peruerrà nell'angolo r, & la b o r, sarà diametro del parallelogrammo c d, (per la antecedente ventesimasesta) che essendo dal supposito il parallelogrammo t u, simile, & similmente posto al c d, & hauendo con esso l'angolo b, commune egli starà intorno al diametro b r, del c d, & la retta t o, & però la b u, sarà parte della b d, cioe il parallelogrammo applicato a o, sarà di minore altezza che il c d; hora allungata la t o, per o, fino che arriui alla r d, & sia in e, considerato il parallelogrammo c d, diuiso nelli dui parallelogrammi r o, o b. che stanno attorno al diametro r b, & nelli dui Supplementi c o, o d, essi c o, o d (per la quarantesimaterza del primo) sono fra loro eguali, onde giontoli communemente il parallelogrammo o b, il composto c b. sarà eguale al composto e n, ma al medesmo c u, è eguale il parallelogrammo a n (che essi hanno basi eguali a c, c b, & sono fra medesme rette equidistanti m n, a b, (o vogliamo dire hanno vna medesma altezza) però questo a n, sarà anco eguale all'e b, onde giongendoli communemente il parallelogrammo c o, tutto il composto parallelogrammo a o, sarà eguale al composto gnomone n c u c, ma il parallelogrammo c d. è maggiore di questo gnomone sua parte (che di più vi è il parallelogrammo n e) però sarà anco maggiore del parallelogrammo a o, & consequentemente ancora il parallelogrammo a r; detto (formato sopra alla mità a c, della data a b.) sarà maggiore del medesmo parallelogrammo a o applicato come è detto alla a b; Ma se l'applicato a la a b, occupi manco della mità della a b, cioe principiando all'a. non arriui al punto c, pigliando solo per base poniamo la a p. & sia l'a p m g. al qual māchi a cōpire la retta a b. il parallelogrāmo p i (intese allungate

allungate le g m. b d, finche concorrano insieme in l,) che sia simile & similmente posto al posto e d; all'hora dal commune angolo b. nel e d, tirato il diametro b r, egli si allunghi finche peruenghi al a g l, & vi peruerrà nell'angolo m,(per la antecedente 26. propositione) che essendo il paralellogrammo e d simile, & similmente posto al p l. che ha con esso l'angolo b commune egli di necessità starà attorno al diametro di detto p l, cioe il diametro b r, del e d, sara parte del diametro b m. del p l.(& il paralellogrammo a m, applicato che ha a p. base minore di e b, base del e d, hauerà altezza maggiore dell'altezza del e d) hora allungata la e r, per r. fino alla m l, & segnato o, doue ella vi peruiene & anco a. ungata la d r. per r. fino alla g a, & sia in S. la s r, sara eguale alla r d, si come nel i paralellogrammi a r. e d, sono eguali fra loro le a queste opposite a c, e b, onde il paralellogrammo g r. sara eguale all'r l, ma a questo r l, è eguale u p r, che sono i dui Supplementi nel paralellogrammo p l; però anco il paralellogrammo g r, sara eguale al p r, Onde giunto communemente così al g r, come al p r, il paralellogrammo s p. sara al composto delli s p, p r; cioe al totale paralellogrammo a r; eguale la somma delli dui g r, s p; ma g r, è maggiore di s m, sua parte (nella restante parte m r) onde g r, & s p; & però il paralellogrammo a r, detto sara maggiore delli dui soli s p; s m, & però del loro composto, o paralellogrammo a m, cioe il paralellogrammo a r, formato sopra alla mità della retta a b. al quale manca a compire essa retta il paralellogrammo e d, posto sopra all'altra mità della a b, sarà maggiore dell'a m, applicato anc'egli alla a b, ma con minor parte d'essa a b, (cioe con manco della mità della a b) al quale manca a compire la a b, vn paralellogrammo simile, & similmente posto al e d, per il che è manifesto quanto si voleua mostrare.

Dalle cose dette si conosce che Quando sopra la mità d'vna retta è posto vn paralellogrammo che l'applicato poi a detta retta al quale manchi a compirla vn paralellogrammo simile, & similmente posto al posto, & sia il maggiore di qual si vogli di quelli che vi si possa applicare con tal conditione sara quello che si facci sopra l'altra mita della linea, & sara di eguale altezza, & grandezza al posto, & anco a lui sara simile, & similmente posto.

Propositione 28. Theorema 21:

NElli Triangoli rettangoli la figura formata sopra al lato sottotendente all'angolo retto è eguale al composto, o somma delle due a quella simile, & similmente poste formate sopra alli dui lati continenti l'angolo retto.

Sia il Triangolo rettangolo A R S. l'angolo *R* del quale sia il retto, & sopra i suoi tre lati siano intese essere formate tre figure simili, & similmente poste. poniamo tre Rôbidi, si dice che il Rôboide maggiore fatto sul lato maggiore A S. opposto all'angolo retto è eguale alla somma delli altri dui Romboidi fatti sopra alli lati A R, R S. continenti l'angolo retto *R*. Per dimostrarlo. Dall'angolo retto R, alla base oppostali A S. si tiri la perpendicolare R C. quale (per la 8. di questo) diuiderà il Triangolo A R S nelli dui Triangoli rettangoli A C R, S C R, simili fra loro, & al totale A R S. & però essi tre Triangoli haueranno li lati corrispondenti proportionali, & però il lato R S destro è medio proportionale fra la base S A, & la sua parte destra S C, come anco il lato R A, sinistro è medio proportionale fra la istessa base A S. & la sua parte sinistra A C. per il che A S. S R, & S C, sono tre linee continue proportionali, & anco *A* S. A R, & A C, sono similmente tre linee continue proportionali, & perciò (per il Corollario della 20. di questo) la proportione della figura fatta sopra alla prima A S. delle prime (& chiamiamola P) alla figura a quella simile, & similmente posta fatto sopra alla seconda S R, & chiamiamola Q. sara come la proportione che è dalla prima linea A S alla terza S C, (Et conuersamente come è dalla retta S C. alla S A. così sara dalla figura Q alla P.) Et per la medesima causa intese l'altre tre rette continue proportionali A S. A R, A C, la proportione della figura fatta sopra alla prima A S. chiamata P. alla figura a quel la simile, & similmente posta fatta sopra alla seconda A R, & chiamiamola T, sara come la proportione che è dalla prima linea A S. alla terza A C. & conuersamente come è dalla retta A C, al la A S. così sara dalla figura T, alla P.

Hora intese queste sei quantita S C. prima S A. seconda la figura Q terza, & la figura P. quarta, A C. quinta, & la figura T, sesta per che (come si è dimostrato) dalla prima S C, alla seconda da S A è come dalla terza Q. alla quarta P. Et ancora dalla A C, quinta alla seconda S A. è come dalla T. sesta alla P. quarta; ne segue (per la 24. del quinto) che come è il composto della prima S C, & quinta A C, alla seconda S A, così sia il composto della terza Q & sesta T, alla quarta P. ma il composto della prima S C, & quinta A C, è eguale alla seconda S A. per il che ancora il composto della terza

Q, &

Q.& feſta T. ſarà eguale alla quarta P. cioe la ſomma delle due figure Q.& T, fatte ſopra alli dui lati continenti l'angolo retto del Triangolo rettangolo ſarà eguale alla figura P. a quella ſimili & ſimilmente poſta fatta ſopra al lato ſottotendente all'angolo retto.

Ouero Al Triangolo A R S.totale eſſendo ſimile il Triangolo R C S.partiale,& però di lati proportionali per eſſere il lato R S.del partiale corriſpondente al lato A S.del totale, ne ſegue che la proportione del Triangolo partiale R C S. al totale A R S. ſarà duplicata alla proportione che è dalla linea R S.alla linea A S.Ancora(per la 20.di queſto) la proportione della figura Q. fatta ſopra alla retta *R* S. alla figura P. a lei ſimile,& ſimilmente poſta fatta ſopra alla retta A S.é duplicata alla proportione che è dalla detta linea *R* S. alla detta A S. però come è dal Triangolo R C S.al Triangolo A R *S*.coſi ſarà dalla figura Q alla figura P. Et per la medeſma ragione come è dall'altro Triangolo A C R, partiale al medeſmo a lui ſimile A R S. totale, coſi ſarà dalla figura T(ſimile & ſimilmente poſta alle Q.& P) alla figura P, perilche (per la 24 del quinto) come è la ſomma delli dui Triangoli R C S,A C R,al Triangolo A R S, coſi ſarà la ſomma delle due figure Q.& T,alla a loro ſimile,& ſimilmente poſta figura P.ma la ſomma delli dui Triangoli R C S.A C *R*.è eguale al Triangolo A R S.(da loro compoſto)perilche ancora la ſomma delle due figure Q.& T, ſarà eguale alla figura P. cioe la figura fatta ſopra al lato ſottotendente all'angolo retto nel Triangolo rettangolo ſarà eguale alla ſomma delle due figure a quella ſimili, & ſimilmente poſte fatte ſopra alli dui lati continenti l'angolo retto in eſſo Triangolo, che è quanto ſi voleua moſtrare.

Propoſitione 29. Problema 8.

AD vna data linea retta ſi può applicare vn paralellogrammo eguale ad vn Rettilineo propoſto,al quale manchi a compire la data linea vn paralellogrammo ſimile ad vn paralellogrammo aſſegnato. Ma conuiene che il Rettilineo propoſto non ſia maggiore del Paralellogrammo che ſi faceſſe ſopra alla mità della data ſimile,& ſimilmente poſto al paralellogrammo aſſegnato.

Sia data la retta A B.alla quale ſia da applicare vn paralellogrammo eguale al Rettilineo propoſto R,di modo che all'applicato manchi a compire la data A B. vn paralellogrammo ſimile al paralellogrammo aſſegnato S. Per farlo.Diuidaſi la *A* B,in due parti eguali in C, & ſopra ad vna d'eſſe mità,& ſia la C *B*.ſi formi vn paralellogrammo ſimile all'aſſegnato S. (auertendo che quando queſti S.hauerà i lati eguali,cioe ſiaſo Quadrato,o Rombo,non importa a qual lato d'eſſo corriſponda la C B.ſopra alla quale ſi fa il paralellogrammo ſimile a detto S.ma ſe queſto S.ſia di lati ineguali,conuiene dichiarare a qual lato,cioe al maggiore,o al minore dell'S.deue corriſpondere la retta C B.accioche coſi ſi veda ſe la Operatione è poſſibile,o impoſſibile,& ſe può forſi in vn ſolo,o più modi)& ſia il C B D E,eſſendo poniamo la retta C D,corriſpondente al lato e b,del l'S.& la B D.corriſpondente al lato b d,dell'S.(che in queſto modo il paralellogrammo C D.ſarà ſimile, & ſimilmente poſto al e d, o vogliamo dire all'aſſegnato S.) & allongata la D E,per E,finche concorra con la A G,tirata dall'A. equidiſtante alle C E,B D,& ſia in G. ſarà compito il paralellogrammo A D.diuiſo nelli dui A E,C D.eguali frà loro, eſſendo ſopra a baſi eguali A C,C B.& fra le iſteſſe paralelle G D,A B.Hora ſe il paralellogrammo A E,ſia eguale al rettilineo propoſto R,eſſo A E,ſarà il paralellogrammo che ſi voleua fare,perche ſarà applicato alla A B.& eguale al Rettilineo R,& gli mancarà a compire la data A *B*,vn paralellogrammo C D. ſimile all'aſſegnato S.Ma quando il paralellogrammo A E,ſia maggiore del rettilineo R,(che già ſi pone che non ſia minore che ſe fuſſe minore,cioe il rettilineo maggiore di eſſo paralellogrammo A E, la operatione ſarla impoſſibile, cioe alla data A B, non ſi potria applicare vn paralellogrammo eguale al rettilineo R, (cioe maggiore del paralellogrammo A E, (o del C D,all'A E,eguale) al quale mancaſſe a compire la linea A *B*. vn paralellogrammo ſimile, & ſimilmente poſto nel modo detto all'S, & però al C D. fatto ſopra alla C B, mità della A B. eſſendoſi dimoſtrato nella 27. propoſitione,il C D fatto,o applicato alla mità della data A B con tal conditione di mancanza alla A *B*.eſſere egli di neceſſità il maggiore di quanti medeſmamente con eſſa côditione vi ſi poſſino applicare) che perciò ancora il paralellogrammo C D. ſaria maggiore d'eſſo rettilineo R, trouiſi quello in che è eccduto eſſo rettilineo R,dall'A E,ò C D.(come ſi inſegna nella 45.del primo)& ſia l'eceſſo la ſuperficie Z,eguale alla quale ſi formi(per la 25 di queſto)il paralellogrammo L M N O,ſimile al C D & perciò ſimile all'aſſegnato S.che coſi il paralellogrammo L M N O, inſieme

insieme con il rettilineo R, saranno eguali al parallelogrãmo A E, o vogliamo dire al C D. (Ouero per fare il parallelogrammo L M N O, simile al C D & eguale al 'ecce. (so in che il parallelogrã mo C D. supera il rettilineo R, prima per la 25. di questo si formi il parallelogrammo g i h l, simile al C D. & eguale al rettilineo R. & sia il lato i h, il più lungo, & però corrispondente al lato C E del parallelogrammo C D. & il g i, il più corto corrispondente al l'E D, poi fatto vn mezzo Cerchio di diametro eguale al lato più lungo C E, del parallelogrammo C D. & in esso da vn termine del diametro, & sia dall'E, accommodato lo a lui corrispondente lato i h. più lungo del parallelogrã mo a lui simile g h, da doue arriua in h, alla circonferenza fino all'altro estremo C, del diametro si tiri la retta h c, che questa sarà il lato più lungo del parallelogrammo L M N O, che sia simile al C D. & g h. & eguale alla differenza del g h, (& però del rettilineo R) al C D, (per la antecedente 28. propositione) che hauendo il Triangolo c h E, l'angolo h, retto, per essere fatto nel Mezzocerchio, ne segue che fatto sopra i suoi tre lati tre figure simili, & similmente poste, la fatta sopra al lato C E, sottotendente all'angolo retto sia eguale alla somma delle due fatte sopra alli lati h i, h e, continenti esso angolo retto, & perciò che la fatta sul lato h e, sia la differenza in che la fatta su l'altro lato h i. è minore della fatta su la subtensa C E; Ancora fatto vn mezzo cerchio di diametro eguale al lato più corto D E, del parallelogrammo C D, & in esso da vn termine del diametro, & sia dall'E, accommodato lo a lui corrispondente lato l g, più corto del parallelogrammo detto a lui simile g h. & dal punto l, doue la i g. peruiene alla circonferenza tirato fino all'altro estremo D. del diametro la retta i D. questa sarà il lato più corto del parallelogrammo L M N O, per le medesime ragioni sopradette) Et di questo L M N O, sia il lato M L, corrispondente al D E, & però minore, o più corto d'esso D E, (perche il parallelogrammo L M N O, è minore del C D, & il lato L O, corrispondente, & però più corto dell'E C, seghisi hora dall'E D, cominciando dall'angolo E, superiore commune alli dui parallelogrammi A E, C D. la parte E T, eguale al lato L M a lui corrispondente, & dall'E C, la parte E n, eguale al lato L O, a lui corrispondente, nel parallelogrammo detto L M N O, & tirate dalli punti T, & n, dentro al parallelogrammo C D. equidistanti alli lati E C, E D, finche concorrano insieme le due rette T S. & n s, si formi il parallelogrammo n s T E, che sarà eguale all'L M N O (& però eguale alla superficie Z) & simile, & similmente posto al parallelogrammo C D. perilche egli starà attorno al diametro d'esso C D. cioe tirato il diametro E B. egli passarà per il punto angolare S. o vogliamo dire tirato il diametro E S. nell'n T. & allungato dall'S. egli peruerrà all'angolo B (per la 26. di questo) Hora si allunghi la retta T s. per s. finche arriui alla C B. & sia in r, Et anco si allunghi la s n, per n, finche arriui alla G A. & sia in p, che all'hora il parallelogrammo A p s r, sarà quello che si voleua fare, cioe sarà applicato alla data A B, mancando a compirla il parallelogrammo r B x s, (inteso allungato la n s, fino alla B D, segnando l'x, doue vi peruiene) simile, & similmente posto al C D. (stando egli attorno al suo diametro B E) & però simile all'assegnato S, & anco sarà eguale al rettilineo R, proposto perche nel parallelogrammo C D. il supplemento S D, è eguale al C S. onde giunto a ciascun d'essi communemente il parallelogrammo s x, alla somma o parallelogrammo totale C x sarà eguale il D r, ma al medesimo C x, è anco eguale il parallelogrammo A n, (che sono sopra a due basi eguali A C, C B, & fra due medesime equidistanti p x, A B) però l'A n, sarà eguale al D r, onde così all'A n, come al D r, inteso giunto communemente il parallelogrammo G S, l'vna somma che è il totale parallelogrammo A p s r, applicato detto sarà eguale all'altra somma che è lo Gnomone n r D. ma al medesimo Gnomone n r D. è anco eguale il proposto rettilineo R, (perche il rettilineo R con il Z, & però con il parallelogrammo n T, fatto eguale al Z, compongono il parallelogrammo C D, onde da essi inteso leuato communemente il parallelogrammo n T, il restante gnomone n r D, resta eguale al restante rettilineo R) però similmente il parallelogrammo A p s r, sarà eguale al medesimo rettilineo R, che è quello che si voleua fare.

Hor notisi che hauendo noi veduto nella 27. propositione che delli parallelogrammi applicati ad vna data retta, & che manchino a compirla vn parallelogrammo simile, & similmente posto, al parallelogrammo che si pone sopra alla mità della data retta, alcuno occuparà più della mità della data retta, & alcuno ne occuparà manco (essendo con dimeno tutti questi sempre di necessità minori del parallelogrammo posto sopra alla mità della data, che vn solo, & è quello che si applicasse all'altra mità precise della retta data sarà precise eguale al parallelogrammo detto posto sopra alla mità della data) veniamo a considerare che oltre el parallelogrammo A p s r, che occupa più della mità della data A B, se ne potrà formare vn'altro applicato alla data A B. con le conditioni dette, cioe che manchi al compimento della A B. vn parallelogrammo simile al C D. (& similmente posto) & eguale al rettilineo R, & si farà nel modo seguente.

Formato come prima sù la mità C B, della data A B. il parallelogrammo C D, simile, all'assegnato S, & similmente posto, come prima; cioe che il lato C B, corrisponda al c b, & il B d, al b d, &

vedoto

veduto in che esso para lellogrammo C D, eccede il rettilineo R, & sia il Z, eguale al quale si formi il paralellogrammo L M N O, ma simile, & similmente posto al C D, & però al c d, ricche il lato più corto O N, sia corrispondente al C B, o vogliamo dire E D. più corto, & il lato N M. all'E C, all'hora questo paralellogrammo L M N O, o vn paralellogrammo a questo eguale, si intenda accompagnarsi con il C D. dalla parte superiore sinistra (cioe dalla banda de la C A, cioe allunghisi la D E per E, fino in n, si che E n, sia eguale alla N O, & si allunghi la C E, similmente per E, fino in T, si che E T, sia eguale alla N M. & si compisca il paralellogrammo T h n E, che sarà eguale, simile, & similmente posto al L M N O, & anco si allunghi la h n, per n, fin che arriui alla C A, & sia in O, & si compisca il paralellogrammo A o h P, quale sarà l'applicato alla data A B. che si voleua fare, perche egli è eguale al rettilineo R, & gli manca a compire la data A B. vn paralellogrammo simile all'assegnato S. quale è C B q T. intese allongate le due rette h T, B D, finche concorrano insieme in q. il che si dimostra così. Considerato il paralellogrammo C B q h. di qui so nelli quattro O E, B q, C D, n T, perche per la similitudine delli dui paralellogrammi n T, C D. da n E, ad E D. è come da T E, ad E C, ancora congiuntamente dalla totale n D. alla E D. sarà come dalla totale T C, alla E C, & però da o B, (eguale alla n D) a C B. (eguale alla D E) come da B q. (eguale alla T C) a D B. onde li dui paralellogrammi o q. C D. che hanno l'angolo commune B. & i lati intorno ad esso angolo fra loro proportionali saranno simili perilche ancora il paralellogrammo n T, che è simile al C D. sarà ancora simile al totale O q, & similmente posto, perilche li dui n T, C D, staranno attorno al diametro B h. del totale o q. cioe il diametro B h, passarà per il punto E, & sarà la parte B E. diametro del paralellogrammo C D. & l'altra parte E h. sarà diametro del paralellogrammo n T, perilche il paralellogrammo grande o q. che è simile (& similmente posto) a ciascuno delli dui n T, C D, sarà anco simile all'assegnato S. onde al paralellogrammo A h. applicato alla A B, (mediante la parte A O) mancarà a compire essa A B il paralellogrāmo O q, che è simile all'assegnato S. Hora considerato il paralellogrammo A T, egli è eguale al C q: (che sono sopra a basi eguali A C, B C, & fra medesime equidistanti A B. P q. (onde dall'vno leuato il paralellogrammo o E, & dall'altro il paralellogrammo E q. che sono eguali (essendo essi i dui Supplementi nel paralellogrammo o q) il restante A h E, dell'vno, (cioe il paralellogrammo applicato A h, insieme con il paralellogrammo h E) sarà eguale al restante paralellogrammo C D. dell'altro, & però al rettilineo R, insieme con il paralellogrammo h E, alla somma de quali è eguale questo paralellogrammo C D, (che si vide esso C D. superare il rettilineo R, nel Z al quale il paralellogrammo h E, si fece eguale) onde da ciascuna banda leuato communemente il paralellogrammo h E, ne segue che il restante paralellogrammo A h. che è l'applicato detto sia eguale al restante rettilineo R proposto, però è chiaro quanto si voleua mostrare.

Notisi di più che ricercando questa 29. Propositione o Problema che si applichi alla data retta A B. vn paralellogrammo eguale al proposto rettilineo R, al quale manchi a compire la data A B. vn paralellogrammo simile allo assegnato S. non ci ponendo altra conditione di similmente posto, cioe non ci astringendo a pigliare il restante della A B. per corrispondente più ad vn lato che all'altro dell'assegnato paralellogrammo S. quando egli sia di lati angolari ineguali, non occorre che noi domandiamo qual lato dell'S. deua corrispondere a detto restante della A B, che ha da seruire per vn lato del paralellogrammo che sia simile all'S. anzi noi a beneplacito potiamo supponere che esso restante di A B. sia corrispōdente o al lato più longo, o al più corto del paralellogrammo S, & così se come nella Operatione passata vna volta haueremo posto che la mità C B. della data corrisponda al lato c b. più corto del paralellogrammo S, & con esso supposto applicati dui diuersi paralellogrammi A S. A h, alla data con le conditioni che si ricercauano; noi vn'altra volta potremo supponere che la mità C B. della data A B. corrisponda al lato h d, più lungo di esso paralellogrammo S. & perciò con questo supposito formato vn'altro paralellogrammo su la mità C B. simile all'S. quando il formato non sia minore, o vogliamo dire superato in grandezza dal proposto rettilineo R, noi potremo applicare alla A B. dui altri paralellogrammi nel modo già mostrato che ciascun d'essi sarà eguale al rettilineo R, & mancarà a compire la A B data vn paralellogrammo simile all'S. di modo che si haueranno quattro diuersi paralellogrammi applicati alla data con le conditioni ricercate, se però con ciascuno delli dui suppositi il paralellogrammo fatto sopra alla C B. simile all'S. sia maggiore del rettilineo R. che se con vn supposito egli fusse maggiore dell'R, & con l'altro minore d'esso R, all'hora solo cō il primo supposito si potriano applicare dui diuersi paralellogrammi alla data come si conuiene, ma con l'altro supposito il Problema saria impossibile: Ancora quando l'assegnato paralellogrammo S. fusse di lati eguali, cioe Quadrato, o Rombo, che perciò l'vn supposito non saria differente dall'altro all'hora solo dui paralellogrammi (nelli quali nōdimeno il lato più lungo dell'vno saria eguale al lato più lungo dell'altro, & il più corto al più corto) si potriano applicare alla data della qualità che si riccrca, quan.

ca, quando il parallelogrammo fatto su la C B. mità della data A B. simile all'S. di lati eguali fusse maggiore del rettilineo R, Ma se esso rettilineo R, si trouasse essere eguale a detto parallelogrammo fatto su la mità della data A B. all'hora vn solo parallelogrammo si potria applicare alla data A B. & saria quello che eguale al C D. fatto su la mità C B. della A B. si facesse su l'altra mità A C, Et quando essendo il parallelogrammo essemplare assegnato S. di lati ineguali con l'vn supposito il parallelogrammo C D. a lui simile fatto su la C B. fusse precise eguale al rettilineo R, & con l'altro secondo supposito esso parallelogrammo C D. si trouasse essere minore di detto rettilineo R, all'hora con il primo supposito si potria applicare alla A B. vn solo parallelogrammo eguale al rettilineo R, di conditione ricercata, & saria l'A C. (eguale al C D) che si facesse su l'altra mità A C, della data, ma con l'altro secondo supposito non se ne porria applicare alcuno, Che quãdo poi con l'altro secondo supposito il parallelogrammo C D. fatto su la mità C B. della A B. simile all'S. fusse maggiore del rettilineo R, all hora ancora con questo secondo supposito si potriano applicare dui altri parallelogrammi alla data A B. di conditioni ricercate, & cosi sariano tre parallelogrammi applicati alla A B. mediante questi dui suppositi, Conosciamo dunque che il rettilineo R; & il parallelogrammo S. possono essere tali, che alle volte alla A B, data si potrà applicare vn solo parallelogrammo eguale al rettilineo R, & che manchi a compire la data A B. vn parallelogrammo simile all'S. Et alle volte se ne potranno applicare dui, Et alle volte tre, Et anco alle volte se gli se ne potranno applicare quattro, Et cosi illustrati dal fauoreuole lume Diuino siamo peruenuti alla intiera cognitione di quanto può occorrere nel presente Problema.

Alla A B. 84 si applica vn parallelogrammo eguale al rettilineo R, 19. o al quale manchi a compire la A B. vn parallelogrammo simile all'S. i lati angolari del quale sono 2, & 3. o vogliamo dire 1. & $1\frac{1}{2}$.

Il parallelogrammo C D, è 1176. rombi, che è minore del rettilineo R, 1920. però in questo sito il problema non è possibile.

Se alla A B. 84. si vogli applicare vn parallelogrammo eguale al rettilineo R, 882. al quale manchi a compire la retta A B. vn parallelogrammo simile all'S. di lati angolari 1. & $1\frac{1}{2}$. Noi su la mità della A B. cioe su la C B. presa hora per cosa rispondente al lato più corto 1. del parallelogrammo S. formaremo vn parallelogrammo simile all'S. però essendo C B. 42, l'altro lato B D. sarà 63. & 42 via 63. fa 2646. che sono li parallelogrammetti equilateri equiangoli all'S. d'1. per lato, simili alli quali si intendono essere li 882. contenuti nel Rettilineo R, Questi cauati dal 2646. resta 1764, della quale quantità conuien trouare vn parallelogrammo simile all'S. cioe che per vn lato sia volte $1\frac{1}{2}$. quanto l'altro, che posti essi essere 1 +, & $1\frac{1}{2}$ +, il prodotto è $1\frac{1}{2}$ ☐ eguale a 1764, però partito 1764. per $1\frac{1}{2}$. ne viene 1176. che è il valore d'1 ☐, & la + valerà la rad. di 1176. & sara il minor lato posto 1 +, cioe E T, ouero n S, & però C r, quale rad. 1176. moltiplicato per $1\frac{1}{2}$. cioe per rad. $2\frac{1}{4}$, che fa rad. 2646. questo sarà il lato più lungo cioe l'n E, che cauato da 63. C E, resta 63. meno rad. 2646, per la retta n C, & però per la p A, ouero S r, larghezza del parallelogrammo da applicare, la lunghezza mò, composta da 42. A C, mità della data A B, & da C r, rad. 1176 (lato minore del parallelogrammo S E, continente 1764, parallelogrammetti equilateri differenza in che il parallelogrammo C D. 2646. supera il rettilineo R 882) sarà 42. più rad. 1176. intesa per la A r, parte della data A B, & cosi il parallelogrammo A S. applicato alla A B, 84. occuparà d'essa 42. più rad. 1176, & per l'altro lato A p, ouero r S. sarà 63. meno rad. 2646. quali dui lati moltiplicati insieme producono 882. numero delli parallelogrammetti equilateri contenuti dal parallelogrammo A S. applicato, & perciò si vede egli essere eguale al rettilineo R 882, come si propone, & a compire la data A B. gli manca il parallelogrammo r x (di lati 42. m rad. 1176. il minore, & 63 m rad. 2646. il maggiore) simile al C D, & però all'S. come si ricerca.

Ouero Inteso accompagnato il parallelogrammo n t, di sopra dalla banda sinistra al paralle-

logrammo

logrammo C D,& giunta la E T rad.2646.alla C E 63.che la somma 63.piu rad.2646.sara la totale C T,& però la A P,Et giunta la E n,rad.1176.alla D E,che cosi la totale D n,& però la B O, sarà 42.piu rad.1176. onde la C O,restara 42. meno rad.1176, (che anco si troua cauando C O rad.1176.dalla A C,42,che resta 42.meno rad.1176.per essa A O)si hauerà il parallelogrammo A O h P,applicato alla A B.occupando d'essa A B.la parte A O,42. meno rad.1176, & hauendo per l'altro lato A P,63.piu rad.2646,che il loro prodotto è 882,& però è eguale al rettilineo R, 882;Mancando a compire la retta A B.il paralellogrammo h o B q.di lati o B minore 42, piu radice 1176.& B q.maggiore 63.piu rad.2646.& però simile al paralellogrãmo S.come si ricerca;

Et se pigliaremo la C B 42, mità della data A B. per corrispondente al lato maggiore del paralellogrammo S.quale al lato minore è come da 3.a 2, o come $1\frac{1}{2}$,ad 1. il paralellogrammo simile all'S.fermato sopra a questa C B.42.hauerà per l'altro lato D B,28,& contenirà 1176.paralellogrammetti equilateri de quali il rettilineo R, è 882, però superarà esso rettilineo R in 294, che sarà il paralellogrammo S E, simile all'S. però i suoi lati saranno 21. & 14; che il 21.giunto ad A C.altra mità della A B.fa 63.per A r,& il 14.cauato da 28.lato B D.resta 14.per A p.onde il paralellogrammo A p. S r.applicato, hauerà su la A B.la A r,63. & per l'altro lato r S. hauerà 14.& però sarà 882.eguale al rettilineo R,& mancarà a compire la A B il paralellogrammo r x, sarà 21.& B x.14.simile all'S. Et se fingeremo il paralellogrammo S E, che chiamaremo poi E h.accompagnato al C D.di sopra da man finistra che cosi il suo lato n E.21.si caua dalla C A.42 & resta 21.per la A O,& il lato n h.14.si giunge ad n o,28. & fa 42.per il lato h o,ouero A P. del paralellogrammo applicato,& l'altro lato A o,su la A B,sarà 21. che via A P.42.fa 882, come è il rettilineo R,& manca a compire la A B.il paralellogrammo o q.che per lati l'o q. è 63. & il B q.è 42,& perciò è simile all'S.come si ricerca.

Ancora sia da applicare alla data A B.84,vn paralellogrammo eguale al rettilineo R.1470.al quale manchi a compire la data A B. vn paralellogrammo simile all'S. che sia Equilatero. Per farlo.Su la mità B C,42,della data,formaremo vn paralellogrammo simile all S. che per essere Equilatero,tanto è fare che la B C,sia corrispondente ad vn lato,come all'altro, & perciò il paralellogrammo C D.sarà 42.per lato,& contenirà 1764.paralellogrammetri equilateri d'1.per lato,& sarà più grande del 1470.R,in 294.da farne vn paralellogrammo S E,simile all'S. che perciò douendo essere equilatero sarà rad.294.per lato,onde gionto esso rad.294.lato n s.all'altra mità A C.42.della data,la somma 42.piu radic.294;sarà la A r.parte della data,che occuparà il paralellogrammo A S.da applicare,Et cauato rad.294 lato n E,da 42. E C,il restante 42.meno rad.294.sarà n C,ouero p A,che è l'altro lato del paralellogrammo A S.da applicare,onde moltiplicati essi dui lati 42.piu rad.294;& 42.meno radic.294;insieme se ne produce 1470.quantità del paralellogrammo applicato,che perciò è eguale al 1470.rettilineo R,Gli manca mò a compire la A B,il paralellogrammo r x,che ha per lato r B,42.meno radice 294; Et per B x 42. meno radice 294.similmente però equilatero,& simile all'S.come si ricerca.

Ouero Del paralellogrammo Equilatero S E,di rad.294. per lato, che si chiama poi n T, cauato il lato n E,da 42. A C,il restante 42.meno rad.294.è il lato A O,su la data A B.del paralellogrammo o P,da applicare,Et giunto il lato n h.radice 294,alla n o,42,il composto h o, & però il lato A P, del paralellogrammo da applicare sarà 42. piu radice 294; che il prodotto loro è 1470, come è l'R, Et a questo applicato o P, manca a compire la A B, il paralellogrammo o q; che ha per lato o B.42.piu radice 294;Et per l'altro lato B q.42.piu radi.294. similmente,cioe è Equilatero come si ricerca.

Di più sia da applicare alla data A B.42,vn paralellogrammo eguale al Rettilineo R,2058,al quale manchi a compire la data A B. vn paralellogrammo simile all'S. di lati 6,& 7. Per farlo. Su la mità C B.42,della data presa hora per lato corrispondente al 6.lato minore dell'S. formaremo vn paralellogrammo simile all'S.che perciò l'altro lato D B,sarà 49; & la quantità di questo paralellogrammo C D.sarà 42,via 49.che fa 2058.che è precise eguale al Rettilineo R,però nel C D,non essendo alcuna eccedenza sopra all'R, non si può formare paralellogrammo alcuno simile al C D. da inserire, per cauarlo da esso C D; o da accompagnarlo di sopra alla parte sinistra (come si è fatto nelli altri sopradetti) perilche non si possono mutare i lati di questo C D. per formarne l'A S.ouero l'A h.da applicare; ma esso da applicare hauerà su la A B, la precise mità A C,42,della data,& per l'altro lato hauerà la C E,49, commune con il paralellogrammo C B,al quale sarà precise eguale,& perciò eguale all'R,Et gli mancarà a compire la data A B. il paralellogrammo C D.simile all'S.come si ricerca. Che se pigliaremo la C B.42. mità della data A B.per lato corrispondente al 7,lato maggiore dell'S.per formare il paralellogrammo simile all'S.l'altro lato B D.sarà 36. & la quantità di questo paralellogrammo C D. sarà 42.via 36.cioe 1512. che supera l'R 2058. in 546.da formarne vn paralellogrammo simile all'S. o vo-

gliamo dire (che è l'istesso) simile al C D.& similmente posto che i suoi lati saranno radice 637. & rad. 468, da inscrire den 10,0 anco da accompagnare di sopra fuori ad essa C D. al modo solito, & cosi si faranno ancora dui diuersi paralellogrammi applicati alla A *B*. come si ricerca.

Propositione 30. Problema 5;

AD vna data linea retta si puo applicare un paralellogrammo eguale ad un rettilineo proposto il quale aggiunga alla lunghezza della data un paralellogrammo simile ad un paralellogrammo assegnato.

Sia data la retta *A* B, alla quale sia da applicare vn paralellogrammo eguale al rettilineo proposto R, di modo che il lato d'esso applicato che sarà posto su la data ecceda la lunghezza d'essa data in vn paralellogrammo simile al paralellogrammo assegnato S. Per farlo. Diuidasi la data A B, in due parti eguali in C.& sopra alla mità C *B*. si formi vn paralellogrammo simile all'assegnato S. ponendo la C B, per corrispondente ad vno de' dui lati angolari qual si vogli del paralellogrammo S. (quando egli sia di lati ineguali) poniamo al lato più lungo, & sia il C *B* D E, al cõposto del quale, & del rettilineo R, cioe alla somma d'essi dui paralellogrammo C D. & rettilineo R. si formi vn paralellogrammo simile a detto C D. ouero S, & si farà cosi. Per la 25. di questo si formi il paralellogrammo *B* n t r, simile all'S. & però al C D, & eguale al rettilineo R, del qual paralellogrammo *B* t, sia il lato corrispondente al C *B*, cioe il più lungo, il *B* n; & il corrispondente al *B* D, (ouero C E) il *B* r (ouero n t) poi presi i dui lati più lunghi (ouero i dui più corti) d'essi dui paralellogrammi cioe li *B* C, & *B* n, (ouero li *B* D. & *B* r) essi si accompagnino insieme ad angolo retto con il commun termine loro *B*. & se li tiri la subtensa C n, (ouero la D r) che ella sarà il lato più lungo del paralellogrammo da formare simile al C D. & eguale alla somma delli dui C D, *B* t; & però alla somma del paralellogrammo C D. & rettilineo R, & la D r, sarà il lato più corto del medesmo paralellogrammo da formarsi, perilche il C n, sarà più lungo di C *B* a lui corrispondente, & D r, più lungo di D *B*. a lui corrispondente (che per la 28. di questo, sopra alle tre rette C *B*, *B* n, n c, continenti il Triangolo rettangolo C *B* n (ouero sopra alle tre D *B*, *B* r, D r, continenti il Triangolo rettangolo D *B* r) formando tre figure simili, & similmente poste', quella che sia fatta sopra alla subtensa all'angolo retto sarà eguale alla somma delle altre due fatte sopra alli dui lati continenti esso angolo retto) Hora il lato C *B*. del paralellogrammo C D. si allunghi verso *B*, sino che arriuando in p. la totale *B* p. sia eguale alla a lui corrispondente detta C n, & il lato D *B*. per *B*. si allunghi sino che arriuando in g. la D g, sia eguale alla a lei corrispondente D r, & si compisca il paralellogrammo p *B* g q. & ancora (allungate la q p. per il p. & la E D. per D. & la q g. per g. & la E C. per C) si compisca il paralellogrammo E T q l; i dui lati angolari del quale cioe E T, (eguale a D g.) & T q. (eguale a C p) saranno eguali alle due trouate subtense D r, C n, & però esso paralellogrammo E T q l, sarà eguale alla somma del paralellogrammo C D, & rettilineo R. & perche ha commune con il paralellogrammo C D. l'angolo E, & i lati corrispondenti intorno ad esso angolo (per la construttione) proportionali essi dui paralellogrammi T L, totale, & C D. partiale saranno simili, & similmente posti, onde il diametro E q passarà per il punto angolare *B*. & cosi anco l'altro paralellogrammo g p. che starà attorno al diametro E q. del totale, come il C D, sarà simile (& similmente posto) a ciascuno delli dui T L, C D. & perciò simile all'assegnato S, Dipoi allungata la q g. per g. fineche in f. la g f. sia eguale alla B A, a lei equidistante, & tirata la A f. compendo il paralellogrammo A *B* g f. & intesolo vnito cõ il *B* p q g, il totale composto A p q f. sarà il paralellogrammo che si voleua applicare alla data A *B*, quale aggiunge a detta A *B*. il paralellogrammo g p. simile all'assegnato S. (come s'è mostrato) & è eguale al rettilineo R, ilche si dimostra cosi. Nel paralellogrammo L E T q. il supplemento *B* L, è eguale al *B* T, & al medesmo *B* T, è eguale il paralellogrammo T C A f; (che la base C A, è eguale alla C *B*. & sono fra le medesme due rette equidistanti A *B*, f g; perilche il paralellogrammo T A. è ancor egli eguale al supplemento *B* L; onde cosi al T A, come al *B* L, inteso giunto il paralellogrammo T p; l'vna somma che è tutto il paralellogrammo A p q f. applicato sarà eguale all'altra somma che è lo Gnomone L q C. ma al medesmo Gnomone L q C. è eguale il rettilineo R, perche essendo dalla construttione il paralellogrammo grande T L, eguale alla somma del paralellogrammo C D. & rettilineo R, remosso il paralellogrammo C D. resta il solo rettilineo R, eguale al restante gnomone L q C.) però anco il paralellogrammo A p q f. applicato sarà eguale ad esso rettilineo R, che è quanto occorreua a mostrare.

Et se poneremo che la mità C *B*. della *A B*. sia corrispondente all'altro lato più corto dell'assegnato

rad 940
A p.radice 3879.piu 42.
via p q.rad.1724.meno 28.

c p.radice 3879.
B p.radice 3879.meno 42.

L q.radice 1724.
p q radice 1724.meno 28.

1724	I m 28 via rad.3879.
862	annulla il 42.via rad.
—	1724. perche essendo
2586	cosi il 42. volte 1½.
m 1176	quanto il 28. come è
—	radic.3879.volte 1½.
fa 1410.	quanto radie 1724.esse due moltiplicationi hãno vn medesmo pro dotto.

Ouero

A p. 94	rad. 2115	rad. 940
via pq. 15	3969	1764
—	—	—
fa 1410	6084	2704
	7 8	5 2

gnato parallellogrammo S.& sopra ad essa C B.faremo vn parallellogrammo simile a detto parallellogrammo S. & poi come nell'altra Operatione formato il parallellogrammo B t.simile all S.& però al C D.& eguale al rettilineo R, & trouati i dui lati del parallellogrammo T L. simile,& similmente posto al C D.& eguale alla somma delli dui C D & B T, mediante i dui Triangoli rettangoli c B n, D B r,& accommodatolo con il C D,tua parte mediante i lati loro corrispondenti,acciò siano similmente posti & allungata la A B. fino al lato L q; in p.& la q T,fino in f.facendo essa q f.eguale alla p A & tirata la A f. sarà compito il parallellogrammo A p q f. quale sarà eguale al rettilineo R, (come si dimostra con il modo già detto di sopra)& essendo applicato alla data A B. la eccederà nel parallellogrammo g p. simile all'assegnato S. come si voleua fare. Et cosi vediamo il Probema essere sempre possibile(perche sempre si può formare vn parallelogrammo B t, eguale alla somma del Rettilineo R,proposto, & del parallellogrammo C D, simile all'S.)& che sempre potrà hauere due risposte quã do il parallellogrammo assegnato S.habbi i dui lati angolari ineguali,che quando fusse Equilatero solo vna risposta haueria.

Potressimo applicare questa 30. Propositione a Quesito,che dicesse.

Si hanno 1410.fanti.& si vuole fare vn'Ordinanza tale.che la fronte occupi tutta la distanza A B. che importa la fronte di fanti 84. & anco occupi tanto più della A B.che quel di più venga ad essere vn'Ordinanza quadra di gente;si domanda quanto sarà la fronte dell'Ordinanza da fa fi,& quanto il fianco,Che per farlo.Sopra al 42 C B,metà dell'84 A B.fatto vn parallelogrammo simile al'S. che è quadrato di gente,cioe moltiplicato il 42.in se stesso fa 1764.al quale giunto il Rettilineo R cioe il 1410.numero de' fanti fa 3174. del quale si forma vn parallelogrammo simile a l'S.(che è quadro di gente cioe se ne piglia la rad.,& è rad.3174. che importa quasi 56 1/? .& questo è la retta C p. composta dal 42.C B.& di quel più che occorre,al quale giunto l'altra metà A C.42.fa quasi 98 1/? .il che è tutta la fronte A p.Et per il fianco Dal 56 ? .C p,cauaremo 42. C B.& resta 14 ? . che è il numero delli fanti del fianco, o delle file, ma leuando i rotti,che nelle vnità indiuisibili de' fanti non si adoprano,diremo la fronte hauere 98 fanti,& il fianco 14.file, che 14.via 98. fa 1372. numero di fanti della Ordinanza, che fino al 1410.vi auanzano fanti 38; Et oltre la retta,o distanza di 84.fanti,vi auanzano 14.fanti alla fronte,che essendo il numero delle file 14 questo auanzo sarà vn'Ordinanza quadra di gente come si domanda. Et se volessimo che quel di più delli 84 fanti alla fronte che la Ordinanza occupi,formasse vn'Ordinanza quadra di Terreno;ridurressimo l 84, numero de' fanti della distanza A B. a piedi che a 3.piedi per fante, impor-

importano piedi 252, & cosi la distanza A B.data sarà piedi 252,& presane la mità C B.126. vi faremo sopra vn paralellogrammo simile all'S.cioe quadro pure di Terreno,moltiplicando 126. in se stesso che fa 15876.al quale giongeremo il rettilineo R,che importa 1410 fanti,quali a piedi quadri 21.per fante sono piedi 29610.& fa in somma piedi 45486.del che si ha da formare vn paralellogrammo simile all'S.cioe quadro di terreno,& perciò pigliando la rad.del 45486.che è quasi $213\frac{3}{11}$. diremo la parte C p. della fronte importare piedi 213, & alquanto più, onde giontoli l'altra parte A C piedi 126.fa in tutto piedi 339.per la frõte totale,quale supera il 252 (o il 213.supera il 126) in piedi 87. & questo sarà il fianco,che piedi 339.fronte in piedi 87.fianco fa piedi 29493,di terreno,che è poco minore del 29600;per rispetto delli rotti lassati;Et quãto alli fanti nelli piedi 339 della fronte a piedi 3.per fante,capiranno fanti 113. & nelli piedi 87. del fianco a piedi 7. per fante capiranno fanti, o file 12. & vi auanzaranno anco piedi 3, che qui non si può hauere la precisione;onde quello che nell'Ordinanza auanzarà oltre alli fanti 84.della distanza A B.sarà vn'Ordinanza di fanti 29.per fronte,& file 12.per fianco,che è quasi quadro di terreno come si domanda (occupando la fronte piedi 87.& il fianco piedi 84) Et nella totale Ordinanza saranno fanti 12.via 113.cioe 1356.che fino al 1410.auanzano fanti 54.

Ouero in questo secondo caso doue si vuole che quel di più che la fronte passarà la distanza A B.delli 84.fanti,formi con il fianco vn'Ordinanza quadra di Terreno,perche quest'Ordinanza quadra di Terreno , quanto alli fanti viene ad essere volte $2\frac{1}{3}$. per fronte di quello che sia il fianco,diremo. Si hanno fanti 1410,de' quali si vuole fare vn Ordinanza tale che la fronte occupi tutta la distanza A B.che importa 84.fanti,& tanto di più che quel di più venga ad essere vn'Ordinanza tale che la fronte sia volte $2\frac{1}{3}$. di quanto sarà il fianco,o numero delle file, Si domanda quante file,& quanti fanti per fila sarà quest'Ordinanza; Per trouarlo, Sopra alla C B,42,mità di 84.che serue per fronte;& perciò è corrispondente a $2\frac{1}{3}$.fronte del paralellogrammo S.che per fianco ha 1; faremo vn paralellogrammo simile all'S.che se $2\frac{1}{3}$.fronte da 1.fianco,il 42.fronte darà 18.fianco,però il paralellogrammo simile all'S.da farsi sarà per fronte 42.fanti,& per fiãco 18,& cõtenirà (18.via 42)756.fanti,alli quali gionto il rettilineo R,cioe fanti 1410.fa 2166; Di questi mò conuien fare vn paralellogrammo simile all'S.cioe che la fronte sia volte $2\frac{1}{3}$.quanto il fianco, che perciò posto il fianco 1 ✝. & la fronte $2\frac{1}{3}$ ✝. il prodotto $2\frac{1}{3}$ ✝✝ è la grandezza, & però è eguale al 2166,Onde partito 2166.per $2\frac{1}{3}$.che ne viene 928,questo è il valore del ✝✝;la ✝ dunque valerà rad.928,che è quasi $30\frac{7}{15}$ (cioe il 2166.si parta sempre per il $2\frac{1}{3}$.denominatore della proportione che d'hauere la fronte al fianco. & dell'auenimento 928, si pigli sempre la radice che hora è quasi $30\frac{7}{15}$)& questo è il fianco del paralellogrammo T L,quale moltiplicato via $2\frac{1}{3}$.fa $71\frac{4}{45}$.che è la fronte T q.alle quale è eguale la e p;A questa $71\frac{4}{45}$.gionto la A C 42.fa $113\frac{4}{45}$. ma diremo 113.per la totale fronte A p; Quanto mò al fianco dal $30\frac{7}{15}$.q l.cauato 18. p l. eguale a B D. il restante $12\frac{7}{15}$. ma diciamo 12. sarà il fianco p q; perilche diremo che l'Ordinanza domandata hauerà 12.file, a fanti 113.per fila come si trouò di sopra, Et questo modo generalissimo può seruire ad ogni qualità d'Ordinanze simili habbi la fronte della parte eccedente oltre la data distanza A B. che conuenienza si vogli al suo fianco. Potra mò lo Studente breuemente notarsene la Regola,che io fò questi lunghi discorsi,& distintioni,non schiuando fatica per laboriosa che sia,accioche,& lo Studente,& chi ha da insegnare ad altri acquisti intiera intelligenza nelle cose che si trattano,& si facci atto alla Speculatione, & Inuentione, che questo è la importanza del tutto.

Potressimo anco applicare la antecedente 29. Propositione ad alcun Quesito d'Ordinanze il che pigliarò fatica di mostrare breuemẽte,acciò massime si veda che da queste Propositioni Geometriche se ne può estrahere molte cose d'vso,quando elle si sappino applicare;Et cosi non appariranno inutili,come auuiene ad alcune persone di grand'ingegno,che si abbattono a stare doue non sono adoprate,o conosciute,hor sia che si dice.

Si hanno fanti 1440.del quali si vuol fare vn'Ordinanza quadrangola la fronte della quale comminci dal termine A.della distanza A B. che importa 84.fanti, ma non si vuole occupare tutta essa A B,anzi lassarne tanta parte verso B, che all'Ordinanza da farsi si possa accompagnare occupando poi fino in B,vn'Ordinanza quadra di gente,che habbi il medesmo fianco, o numero di file,che hauerà la Ordinanza da farsi,Si domanda quante file,ella hauerà,& quãti fanti per fila.

Qui intesa per fronte la mità C B 42.della A B.84,vi formaremo sopra vn paralellogrammo simile all'S. che viene ad essere il quadro di gente detto, cioe equilatero quanto al numero della gente(se bene realmente quanto al Terreno sarà per fianco volte $2\frac{1}{3}$.di quello che sia per fronte)onde sarà per l'altro lato angolare,o fianco,medesmamente 42;& contenirà(42.via 42)1764 fanti,da questi cauaremo il 1440.numero de' fanti dato,che viene ad essere il rettilineo R,& resta 324, (che quando non si potesse cauare, cioe che non si potesse fare la sottrattione, il Quesito

saria

faria impossibile, Et quando cauandolo non restasse cosa alcuna come hora auuerria se l'istesso Rettilineo R, fusse 1764, cioe si dicesse che si hanno fanti 1764) all'hora l'Ordinanza da farsi occuparia precise la mità A C, 42. della distanza A B. data, & saria di 42. file a 42. fanti per fila restandoui verso B. fino al B. il luogo d'vn Ordinanza quadra di gente come si domanda per vnire alla detta che saria per fronte il 42 C B, & per fianco 42, file come la detta fatta con li 1716, fanti che si hanno) Hora di questo 324. che resta si formi vn paralellogrammo simile all'S. cioe equilatero pigliando la rad. di esso 324, & sarà 18. che sono i lati del paralellogrammo, la fronte del quale. 18. si caui dalla C B. 42. & resta 24, che è la parte d'essa C B. verso B. cioe la r B. che resta vacua, & esso 18. si giunga alla A C, 42, & fa 60, che è la A r, fronte dell'Ordinanza da farsi il fianco della quale sarà il numero 24, fianco dell'Ordinanza quadra di gente della quale vi resta vacua la fronte r B. 24; però diremo che si faranno 24. file a fanti 60. per fila, che 24. via 60, fa 1440. numero delli fanti dato. Che in questo Caso perche il fianco 24. della Ordinanza da farsi è eguale alla fronte r B. 24. dell'Ordinanza quadra di gente di che vi resta il luogo, & però questo numero 24. della r B. moltiplicato via la fronte r A. 60. deue produrre il numero de' fanti dato dell'Ordinanza 1440. si può dire che il Quesito viene a significare, il farsi di 84. A B. data due parti tali che moltiplicata l'vna via l'altra il prodotto sia 1440. numero de' fanti dato, Che posto l'vna parte 42. piu 1 +, & l'altra 42. meno 1 + il prodotto loro 1764, meno 1 z sarà eguale a 1440, che accommodato il meno, & leuato 1440. da ciascuna parte si hauerà 1 z eguale a 324, & però la rad. di 324, cioe 18. sarà il valore della + onde le due parti dell'84, saranno 42. piu 18, Et 42. meno 18; cioe 60, & 24. che mostrano la fronte, & il fianco dell'Ordinanza da farsi, Il quale operare si vede riuscire l'istesso che il sopradetto, cioe, Dal quadrato del 42. mità dell'84. A B. distanza data si caui il 1440. numero de' fanti, & del restante 324, presa la radice, che è 18. ella si giunga, & caui al 42. mità dell'84, che i dui resultanti 60, & 24: saranno la fronte, & il fianco dell'Ordinanza da farsi.

r B. fronte del deficiente 42. meno rad. 84. che è volte $1\frac{1}{6}$, quanto 36. meno radice $61\frac{5}{7}$. suo fianco B x.

A r. fronte 42. piu radice 84. ma diciamo 51.
A p. fianco 36. meno rad. $61\frac{5}{7}$ ma diciamo 28.

meno rad. 5184 — fanti 1428, però auanzano fanti 12.

1512 meno 72
cioe 1440. è la grandezza.

Il paralellogrammo deficiente o B q E, ha per fronte o B. 42. ꝑ rad. 84. che è volte $1\frac{1}{6}$. quanto il suo fianco C T 36. piu radice $61\frac{5}{7}$.

A O. fronte 42. meno rad. 84. ma diciamo 33.
A P. fianco 36. piu radice $61\frac{5}{7}$. ma diciamo 43.

il prodotto è 1440. — fanti 1419. auanzano fanti 21.

Et se volessimo che quello che resta nella A B. 84. verso B. fusse fronte d'vn Ordinãza quadra di terreno che hauesse il fianco medesmo dell'Ordinãza da farsi cõ li 1440. fanti; Noi perche quanto alla misura del Terreno la distanza A B. saria piedi 252, & li fanti 1440, a piedi 21. per fante occupano piedi 30240 quadri di Terreno, Presa la mità di 252, che è 126. la moltiplicaremo in se stessa, & fa 15876. dal che cauaremo il 30240. ma perche non si può diremo il Quesito essere impossibile.

Et dicendosi si hãno 1440. fanti, & se ne vuol fare vn'Ordinanza tale che la fronte occupi tanto manco della distãza A B. quale capisce 84. fanti, che in quel manco possa vnirsi con la da farsi vn'Ordinanza tale che la fronte sia volte $1\frac{1}{6}$. quanto il fianco, Noi su la mità C B. 42. della A B, formaremo, o imaginaremo vn paralellogrammo C D. simile all'S. cioe che la frõte sia volte $1\frac{1}{6}$. quanto il fianco, o vogliamo dire conuersamente che il fianco sia li $\frac{6}{7}$ della frõte, che perciò esso fianco sarà 36. & via 42. fa 1512. quantità d'esso paralellogrammo dal quale cauaremo 1440. rettilineo R, numero de fanti dato, & restarà 72. quale è la grandezza d'vn paralello-

lellogrammo n T, simile all'S. & però al C D. & per trouarne i lati lo partiremo per $1\frac{1}{6}$, denominatore della proportione della fronte al fianco del paralellogrammo S. & ne viene $61\frac{5}{7}$. la rad. del quale, cioe radice $61\frac{5}{7}$. è il fianco T S. del paralellogrammo n T, che moltiplicato per $1\frac{1}{6}$, (cioe per radice $\frac{7}{6}\frac{7}{6}$) fa rad. 84. & questo è la fronte n S d'esso paralellogrammo n T, che gionta ad A C. 42, se ne compone A r. 42. piu rad. 84. ma diremo 42 piu 9. cioe 51. fronte dell'Ordinanza da farsi. Et da 36. B D. cauato T S. rad. $61\frac{5}{7}$. resterà 36. meno rad. $61\frac{5}{7}$. ma diciamo 36. meno 8. cioe 28 per il fianco S r, ouero A p. dell'Ordinanza da farsi. Onde essendo di file 28 a fanti 51. per fila, ella conteirà fanti 1428. & però vi auanzaranno fanti 12.

Et perche questo Quesito può hauere in questo Caso due risposte come di già si è notato, per dare l'altra risposta fingeremo il paralellogrammo o T. accompagnarsi al C D. dalla parte superiore sinistra, & cosi formato il paralellogrammo A O E P. che sarà il cercato da fronte A O, sarà 42. meno rad. 84. Et il fianco A P. 36. piu rad. $61\frac{5}{7}$. ma noi in intieri rationali diremo che la Ordinanza da farsi in quest'altra positura hauerà per fronte su la distanza A B. fanti 33. & per fianco fanti, o file 43. & conteirà fanti 1419. auanzandoui perciò fanti 21.

Propositione 31. *Problema* 10.

SI può diuidere vna proposta linea retta nella proportione del medio, & dui estremi.

Sia la retta A B. da diuidere nella proportione hauente il medio, & dui estremi. Per fatlo. Sopra ad essa A *B* si formi il Quadrato A B C D. & a vn lato d'esso, angolare con essa A *B*, & sia il *B* C, si applichi (per la antecedente 30. propositione) il rettangolo C G, eguale al Quadrato A C, & eccedente essa B C, nel paralellogrammo *B* G, simile al medesmo Quadrato A C, cioe che esso paralellogrammo B G, sia anc'egli quadrato (che solo il Quadrato è simile al Quadrato) & segnato il punto S. doue la proposta A *B*, è segata dal lato n G. del paralellogrammo C G. si dice essa A *B*. in detto punto S. essere diuisa come si propone nella proportione del medio, & dui estremi, cioe che la proportione di tutta la A *B*. alla sua parte maggiore che è la *B* S. è eguale alla proportione che è da questa *B* S, parte maggiore alla restante S A. che è la parte minore, o vogliamo dire la parte maggiore *B* S. è media proportionale fra la linea totale *A B*. & la sua parte minore S A. Dimostratione, Perche al quadrato A C. è eguale dalla Construttione il paralellogrammo C G. leuando communemente da ciascun d'essi il paralellogrammo C S. li dui rimanenti rettangoli S D, S r, saranno eguali fra loro, i quali hauendo i dui angoli A S n, *B* S G. eguali fra loro, essendo ciascun d'essi retto, haueranno anco (per la 14. di questo) i lati intorno ad essi angoli reciproci, cioe nell'vno saranno le due estreme, & nell'altro le due medie di 4. rette proportionali, & però posto per estreme le due n S. S A, saranno le medie B S, S G, onde da n S. prima a *B* S, seconda, sarà come da G S, terza, ad A S. quarta, Et perche le due medie *B* S, S G, sono eguali; riducendo dette 4. rette proportionali, a 3. sole continue proportionali si potrà dire che, Da n S. & però da A *B* (ad essa n S. eguale) alla *B* S, sia come dalla *B* S, alla S A, cioe che dalla proposta retta A B, alla sua parte maggiore *B* S, sia la proportione che è da essa parte maggiore B S, alla restante parte minore S A, & però la proposta A *B*. è diuisa nella proportione del medio & dui estremi come si voleua.

Et che della retta A *B*. cosi diuisa, la parte *B* S. sia la maggiore è manifesto (per la 14. del quinto) che delle 4 quantità proportionali A *B*, S G, B S. S A; essendo la A *B*. prima maggiore della B S. sua parte terza, ancora la S G. terza, (& però la *B* S. eguale a questa S G) sarà maggiore della S A quarta. Et cosi si conosce che la B S. media proportionale fra le due *A B*, A S, essendo minore dell'vna A *B*. viene ad esser maggiore dell'altra A S.

Quesito; Per essequire questo Problema, cioe per diuidere la proposta A *B*, nella proportione del medio & dui estremi, essa A B. si diuida nel punto S. come insegna la 11. propositione del secōdo libro che cosi il Quadrato della parte maggiore *B* S. sarà eguale al dutto della totale linea A B. nella sua restante parte minore *A* S, perilche (per la 17. di questo) le tre rette A B. totale, & B S, & S A. sue parti sono continue proportionali, come si ricerca, acciò che detta A *B*. sia diuisa nella proportione del medio, & dui estremi. Le linee diuise secondo questa proportione del medio, & dui estremi (chiamata da molti Diuina proportione per le mirabili proprietà che in essa si scorgono) sono di grandissimo vso nelle Operationi Geometriche, come si vede nelle figure Pentagone,

gone,& nelli corpi regolari, & altri, onde è bene ad esser pronto nelle diuisioni loro cosi per numero,come per linea ilche tutto si è mostrato nella 11.propositione del secondo libro.

Et se data la parte maggiore, & sia a e della retta da diuidere nella proportione del medio, & dui estremi,vorremo trouare la linea totale,(& però anco la parte minore) noi da vn termine d'essa,& sia e,erettali la perpendicolare e n,eguale ad essa e a,& dalla sommità n,al punto r. nel quale sia la data diuisa per mezo,tirata la subtensa n r,& allungata la r e,in d,finche alla subtensa r n, sia eguale la r d. all'hora la a d. sarà la linea totale cercata diuisa in e, nella proportione del medio, & dui estremi, la maggior parte della quale sarà la data a e; Per dimostrarlo. Inteso la data a e, diuisa in due parti eguali in r, & a quella gionto in lungo la e d, ne segue (per la 6. del secondo) che al rettangolo di tutta la linea cosi composta nella aggiunta, cioe il dutto di a d, in e d, (& sia il c d o l, hauendo fatto d o,eguale a d a)insieme con il quadrato della mità della a e,cioe cō il quadrato di e r,sia eguale al quadrato della retta

radice $1\frac{1}{4}$ . . 1

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ rad. $1\frac{1}{4}$ meno $\frac{1}{2}$

a ——— r ——— e ——————— d

a d. radice $1\frac{1}{4}$. piu $\frac{1}{2}$.

composta della mità e r,& della aggiunta e d,cioe al quadrato di r d, & però al quadrato di r n,(alla quale la e d,è fatta eguale)& perciò(per la 47.del primo)alli dui quadrati di r e(mità della diuisa)& di e n,onde da ciascuna banda leuato il quadrato commune di r e,ne segue che ai restāte quadrato di e n,& però della data a e,sia eguale il dutto o rettāgolo di a d,in e d,perilche(per la 17.del sesto) tal proportione sarà da a d,ad a e,quale è da a e,istessa a e d, Onde (per la diffinitione)la a d,è diuisa nella proportione del medio, & dui estremi in e, essendo la sua maggior parte la data a e,come si è proposto di fare.

Et perche li amoreuoli & diligenti Studenti conoscano l'origine di questo modo d'operare,& acquistino attitudine alle inuentioni,si noti che supposto la data parte maggiore essere la vnità, cioe 1. si è veduto quanto saria la linea totale da diuidere, & questo mediante vna retta gia diuisa,qual poniamo che sia 10.& sappiamo la sua parte maggiore essere rad.125.piu 5.essendo la restante minore 15.meno rad.125 ,dicēdo Se rad.125.piu 5. parte maggiore deriua da 10. retta totale, da che deriuarà 1.parte maggiore?& si vederà che deriuarà da radic. $1\frac{1}{4}$,piu $\frac{1}{2}$.cioe che quando la parte maggiore è 1, la linea totale è rad. $1\frac{1}{4}$,piu $\frac{1}{2}$.però dato 1.parte maggiore conuien trouare rad. $1\frac{1}{4}$,

rad.125.m̄ 5 10. 1

via rad.125.p̄ 5 10.via rad.125.p̄ 5.

fa 100.partitore. fa rad.12500 p̄ 50.

deriuarà da rad. $1\frac{1}{4}$ p̄ $\frac{1}{2}$.

piu $\frac{1}{2}$.che sarà la linea totale,ma rad. $1\frac{1}{4}$.è la potente in 1.& in $\frac{1}{2}$.però accompagnate ad angolo retto 1.dato,& $\frac{1}{2}$ sua mità,la subtensa sarà rad. $1\frac{1}{4}$ al che giunto $\frac{1}{2}$.mità dell'1.dato,il composto sarà la totale rad. $1\frac{1}{4}$,piu $\frac{1}{2}$. Sia n o,dato 1.& si facci n e, $\frac{1}{2}$.che e o,subtensa sarà radice $1\frac{1}{4}$,alla quale fatto eguale e a,sarà poi tutto n a,rad. $1\frac{1}{4}$,piu $\frac{1}{2}$.Che intesa n p.1. diuisa per mezo in e.& giuntoli in lungo p a(rad. $1\frac{1}{4}$,meno $\frac{1}{2}$.sarà il dutto della totale n a,in p a,aggiunta cō il quadrato della mità n e,eguale al quadrato di e a,(composto della mità della data,& della aggiunta p a.)& però al quadrato di e o,eguale a e a,& perciò alli dui quadrati di e n,& di n o, onde leuato da ciascuna banda il quadrato di e n,ne segue che il restante dutto di n a,in p a, da vna banda sia eguale al restante quadrato di n o,dall'altra,& però al quadrato di n p. (eguale ad n o) n p.dunque è media proportionale fra n a,& p a, onde n a, è diuisa nella proportione del medio & dui estremi essendo n p.data(che è quanto la n o)la sua parte maggiore.

Per Algebra senza notitia d'alcuna linea cosi diuisa & data la parte maggiore 1. il Quesito si potrà fare dicendo.Trouisi vna quantità(che sarà la parte minore)alla quale gionto.1.data parte maggiore & il composto (linea totale) moltiplicato per la quantità da trouare (che sarà la parte minore)il prodotto sia il quadrato d'1.parte maggiore data.

Sia la quantità 1 +.giuntoli 1.fa 1 + piu 1.che moltiplicato via 1 + fa.1 z piu 1 +.ilche è eguale al quadrato d'1.quale è 1, Onde in questa Equatione d'1 z & +. eguale a numero,ad $\frac{1}{4}$. quadrato d $\frac{1}{2}$.mità d'1.numero delle + gionto il numero 1.della Equatione, & dalla rad.del composto cioe da rad. $1\frac{1}{4}$.cauato l' $\frac{1}{2}$.mità d'1.numero delle +.il restante rad. $1\frac{1}{4}$,meno $\frac{1}{2}$.sarà il valore della +,& però è la parte minore alla quale gionto 1.parte maggiore fa rad. $1\frac{1}{4}$. piu $\frac{1}{2}$. linea totale. Ouero il Quesito potria farsi dicendo. Trouisi vna quantità(che sarà la linea totale) dalla quale cauato 1.dato (parte maggiore)& il restante(che sarà la parte minore) moltiplicato con

to con la quantità trouata, il prodotto sia quanto il quadrato della data 1. cioe sia 1. Che posto la quantità da trouare 1 ✢ cauatone 1. dato resta 1 ✢. meno 1. quale moltiplicato via l'1 ✢ fa 1 ƺ meno 1 ✢ & questo è eguale ad 1. (Quadrato d'1 dato) che accommodato il meno, sarà 1 ƺ. eguale a 1 ✢ piu 1; onde in questa Equatione d'1 ƺ eguale a ✢ & numero: ad $\frac{1}{4}$. quadrato d'$\frac{1}{2}$. mità di 1. numero delle ✢. si giunge 1. numero della Equatione & della somma 1 $\frac{1}{4}$ si piglia la rad. che è rad. 1 $\frac{1}{4}$ alla quale si giunge $\frac{1}{2}$. mità del numero delle ✢ che la somma rad. 1 $\frac{1}{4}$, piu $\frac{1}{2}$. sarà il valore della ✢, & però sarà la quantità da trouare posta 1 ✢ cioe la linea totale.

La Regola numerale sarà. Data la parte maggiore al quadrato d'essa si giunga il quadrato della sua mità, cioe la quarta parte del quadrato della data, O vogliamo dire, Data la parte maggiore il quadrato della sua mità si moltiplichi per 5. & alla radic. del prodotto si giunga la mità della data parte maggiore che la somma sarà la quantità totale.

La Regola lineale da estrahere da quest'Operare Algebrico potrà essere la già mostrata.

Ma dandosi la parte minore che sia 1 ✢. Per trouare la linea totale diremo, Trouisi vna quantità alla quale giunto 1. (& essa quantità sarà la parte maggiore) & il composto (che sarà la linea totale) moltiplicato per detto 1. il prodotto sia quanto il quadrato della quantità da trouare. Che posto essa quantità 1 ✢ giontoli 1. fa 1 ✢ piu 1. quale moltiplicato per 1. fa 1 ✢ piu 1. & questo sarà eguale ad 1 ƺ quadrato della quantità posta 1 ✢. Onde in questa Equatione ad $\frac{1}{4}$, quadrato d'$\frac{1}{2}$. mità d'1. detto numero delle ✢ gionto 1. numero della Equatione, & alla radice della somma cioe a rad. 1 $\frac{1}{4}$. gionto $\frac{1}{2}$. mità d'1. detto numero delle ✢ la somma rad. 1 $\frac{1}{4}$, piu $\frac{1}{2}$. sarà il valore della ✢ & però sarà la quantità o parte maggiore cercata posta 1 ✢. che con 1. parte minore data fa 1 $\frac{1}{2}$, piu rad. 1 $\frac{1}{4}$ che è la quantità, o linea totale.

Ouero si potrà dire. Trouisi vna quantità & sarà la linea totale dalla quale cauato 1. (parte minore data) il quadrato del restante (cioe della parte maggiore) sia quanto il dutto della quantità da trouare nell'1. dato, Che posto la quantità 1 ✢. Cauatone 1. dato resta 1 ✢ meno 1. il quadrato della quale è 1 ƺ meno 2 ✢. piu 1; & questo è quanto il dutto di 1 co. via 1. dato, che fa 1 co. onde accommodato il meno, si hauerà 1 ƺ piu 1. eguale a 3 co. Et in questa Equatione di 1 ƺ, & numero eguale a co. Dal quadrato d'1 $\frac{1}{2}$. mità di 3. numero delle co. cioe da 2 $\frac{1}{4}$. si caua il numero 1. della Equatione, & del restante 1 $\frac{1}{4}$. si piglia la rad. che è rad. 1 $\frac{1}{4}$. & questo si giunge, & caua ad 1 $\frac{1}{2}$. mità del numero delle co. & ne resultano 1 $\frac{1}{2}$. piu rad. 1 $\frac{1}{4}$. Et 1 $\frac{1}{2}$. meno radic. 1 $\frac{1}{4}$. per le due valute della co. che può hauere questa Equatione, (che alla valuta di 1 $\frac{1}{2}$. piu rad. 1 $\frac{1}{4}$. il ƺ vale 3 $\frac{1}{2}$. piu radic. 11 $\frac{1}{4}$. che giontoli 1. fa 4 $\frac{1}{2}$. piu radic. 11 $\frac{1}{4}$. & tanto anco è il valore di 3 co. che 3. via 1 $\frac{1}{2}$. piu rad. 1 $\frac{1}{4}$, fa medesmamente 4 $\frac{1}{2}$, piu rad. 11 $\frac{1}{4}$. Ma alla valuta di 1 $\frac{1}{2}$, meno rad. 1 $\frac{1}{4}$. il ƺ vale 3 $\frac{1}{2}$ meno rad. 11 $\frac{1}{4}$. che giontoli 1. fa 4 $\frac{1}{2}$, meno rad. 11 $\frac{1}{4}$. & tanto anco è il valore di 3 co. che 3. via 1 $\frac{1}{2}$ meno rad. 1 $\frac{1}{4}$. fa medesmamente 4 $\frac{1}{2}$ meno rad. 11 $\frac{1}{4}$.) Ma di queste due valute vna sola ci serue (che dato la parte minore d'vna linea, non può la linea totale hauere se non vna determinata lunghezza) & questa è la valuta maggiore 1 $\frac{1}{2}$ piu rad. 1 $\frac{1}{4}$. & è la quantità totale (che 1 $\frac{1}{2}$ meno rad. 1 $\frac{1}{4}$. non può essere la linea totale perche cauatone 1. che si dice douere essere la parte minore restaria $\frac{1}{2}$ meno rad. 1 $\frac{1}{4}$. che è manco di niente, poiche detto 1 $\frac{1}{2}$ meno radice 1 $\frac{1}{4}$, non arriua pure ad 1.) Si veda dunque la Regola in numeri potersi dare dicendo. Data la parte minore al quadrato d'essa si giunga il quadrato della sua mità (o vogliamo dire il quadrato della mità d'essa si moltiplichi per 5.) & del resultante si pigli la rad. alla quale si giunga il composto della data, & sua mità che il resultante sarà la linea totale.

Et in linea si porrà dire. Data la parte minore a e, ad essa eguale eretta perpendicolarmente la e d, & anco giontoli in lungo la e n, eguale alla sua mità, & tirata la subtensa d n, allungando poi la a n, fino che in m, l'allungamento n m. sia eguale alla subtensa d n, all'hora la totale a m, sarà la linea diuisa che la parte minore sarà la data a e, & la maggiore la e m. Perche inteso e m. diuisa in due parti in n; il quadrato d'essa e m, sarà eguale al quadrato della parte m n, con il quadrato dell'altra parte n e, & con il doppio del dutto della parte m n. nella n e, & però io cambio di questo doppio. con vn sol dutto di a e (doppia ad n e) in m n. Ancora il quadrato di e d, & però di e a, è quadruplo al quadrato di n e, mità di e a; onde il quadrato di d n, & però di n m. ad essi dui di d e, & e n, eguale sarà quincuplo al quadrato di n e, onde giontoli di più il quadrato di n e, la somma de' quadrati di m n, & e n, sarà sessuplo cioe quanto sei quadrati di e n. Onde il quadrato di e m, parte maggiore è quanto sei quadrati di e n, & vn dutto di a e. in n m. Hora intesa a q. eguale alla a m. 1 $\frac{1}{2}$ piu rad. 1 $\frac{1}{4}$. diuisa in a g. eguale alla m n. rad. 1 $\frac{1}{4}$, & in g q. eguale ad n a 1 $\frac{1}{2}$. & però tripla ad n e, si conosce il paralellogrammo a g t e. formato, o imaginato essere il dutto di a e, in m n, perche a g. è eguale ad m n, & il paralellogrammo g t x q. contenere sei quadrati di e n, ouero di t o, che essendo g q. tripla ad n e, & g t dupla all'istessa n e, detto paralellogrammo g t x q. si potrà diuidere in sei paralellogrammi quadrati ciascuno de' quali sarà eguale al quadrato

drato

drato di e n, il parallelogrammo a x dunque dutto di a e, parte minore nella totale a m, cosi come il quadrato di e m, parte maggiore saranno eguali alle medesime cose cioe a sei quadrati di n e, con vn dutto di a e, in n m; perilche essi dui cioe il dutto di a e, in a m, & il quadrato di e m. saranno eguali fra loro, & però la totale a m, sarà vna retta diuisa nella proportione del medio, & dui estremi, & hauerà per sua parte minore la a e, data come si era proposto di fare.

Veggano hora li Studiosi di quanta efficacia sia la marauigliosa, & vtilissima Dottrina Algebrica, o Cossica applicabile a tutte le Scienze, & Arti, poiche da se ci fa venire in cognitione del la resolutione di molti Quesiti, & del modo Geometrico da operare senza affaticarci l'intelletto in particolari Speculationi, quali manco non si ritrouariano da chi non fusse di molto eccellente ingegno, & prattico nelle dimostrationi Geometriche. Onde saria molto bene che molti ancora si incaminassero in tal Dottrina che si và si può dire annichilando; & dalli soli libri, ne i quali non si può scriuere ogni cosa non è molto facile da apprendere, nè se non in longhezza di tempo. Io mentre che ho ancora qualche vigore se bene afflitto dalle indispositioni, & incommodi mi affaticarei volontieri in introdurla in buon numero di persone atte, & di virtuosi costumi, & gli reputarei, & trattarei con ogni mio potere presente, & futuro, come fratelli quando vi si dedicassero ad gloriam Dei eterni omnipotentis, salutaremque ornamentum Mundi.

Propositione 32. Theorema 22.

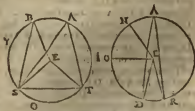
SE di dui Triangoli, dui lati dell'vno siano proportionali a dui lati dell'altro, & siano essi dui Triangoli accompagnati insieme ad vn'angolo di modo che i lati corrispondenti d'essi dui Triangoli siano equidistanti l'vno all'altro, & ciascuno delli dui angoli corrispondenti contenuto da i lati proportionali sia coalterno all'angolo con il quale essi dui Triangoli siano accompagnati insieme, all'hora il restante lato dell'vno sarà in linea retta con il restante lato dell'altro.

Nelli dui Triangoli *B* A C, C D R, siano i dui lati A B, A C. dell'vno proportionali alli dui lati C D, D R, dell'altro, cioe da A *B*. 6. ad A C 9. come da D C, 2. a D R 3. & siano accompagnati insieme ad vn angolo A C D. di modo che il lato A *B*. sia equidistante allo a lui corrispondente D C, & il lato A C, equidistante al D R, si che anco ciascuno delli dui angoli A & D. corrispondenti fra loro (essendo i continenti i dui lati proportionali in ciascuno delli dui Triangoli) sia coalterno all'angolo A C D. nel quale essi dui Triangoli sono accompagnati insieme; si dice che i dui restanti lati loro *B* C, C R. componeranno vna linea retta, cioe che essi B C, C R, saranno accompagnati insieme per il diritto, o vogliamo dire, che allungato l'vn lato esso allungamento si vnirà con l'altro. Dimostratione. Perche la retta A *B*, è equidistante alla D C, & sopra ad esse cade la A C, formando li dui angoli coalterni A. & D C A; ne segue che l'A, sia eguale al D C A. Ancora, perche le due rette A C, D R, sono equidistanti, & sopra ad esse cade la D C. formando li dui angoli coalterni D. & D C A. ne segue che ancora l'angolo D, sia eguale al detto D C A. onde (per la prima commune concessione) l'angolo A. sarà eguale al D. ma li dui lati continenti l'angolo A. sono proportionali alli dui lati continenti l'angolo D. però (per la 6. propositione di questo libro) essi dui Triangoli *B* A C, C D R, sono equiangoli, cioe l'angolo B. sarà eguale al D C R, suo corrispondente, & il restante B C A. al restante R, essendo dunque l'angolo A, eguale al D C A, & il *B*. eguale al D C R, il composto delli dui A. & B. sarà eguale al composto delli dui A C D, D C R, cioe al totale angolo A C R, perilche cosi alli dui A, & B. come all'A C R, giunto communemente l'angolo A C B. la somma dall'vna parte che sono li 3. angoli del Triangolo A B C, sarà eguale alla somma dall'altra, che è li dui angoli A C *R*, A C B; Ma la somma delli 3. angoli del Triangolo A B C, è (per la 32. del primo) eguale a dui retti, perilche anco la somma delli dui A C R, A C B, sarà medesimamente eguale a dui retti, Onde perche dal termine C, della retta A C, sono tirate in diuerse parti le due rette C B, C *R*, & occorre che li dui angoli A C B. A C R, che elle fanno con la A C, sono eguali a dui retti, ne segue (per la 14. del primo) che esse due rette C B, C R, siano congiunte insieme per il diritto facendo vna sola linea

retta B R, che è quello che si voleua mostrare. Auertasi che di sopra si è posta quella conditione che nelli dui Triangoli ciascuno delli dui angoli che hanno i lati proportionali, cioe li A. & D, sia coalterno all'angolo con il quale si sono accompagnati essi dui Triangoli, & è l'angolo A C D perche l'altra conditione dell'essere equidistanti i dui, & dui lati proportionali corrispondenti in essi Triangoli non basta a concludere che i dui restanti lati *B* C, C R, d'essi siano congiunti in linea retta, o per il diritto, che se dal punto *B*. tiraremo la B D. lunga a beneplacito, poniamo 24, equidistante alla A C, presa per sua corrispondente, & dal punto D. la D R, equidistante alla A *B*. presa per sua corrisuondente, & essa D R, fatta lunga tanto che ella alla D *B*, habbi la proportione di B A, ad A C, (che essendo A B. 10. A C, 15. & B D. 24. sarà la D R 16) & tirata la B R. intesi li dui Triangoli C A B, B D R, accompagnati insieme mediante l'angolo C B D, & hauenti li dui lati C A. A *B*, proportionali alli dui lati B D, *D R*, & d'essi l'A B. equidistante al D R, suo corrispondente, & anco l'A C, equidistante al D B. a lui corrispondente, non perciò il restante lato B C, sarà in linea retta con il restante lato B R, Et questo auuiene, perche l'angolo A, non è coalterno al C *B* D. che accompagna li dui Triangoli, si come nè anco è il D. corrispondente all'A. coalterno a detto C B D. & perciò essi angoli corrispondenti A, & D. non sono eguali fra loro; che quando anco fussero eguali come nella seconda figura, & il lato *A* C, equidistante al *B* D, suo corrispondente non saria poi l'altro lato *B* A. equidistante a lo a lui corrispondenre D R, & cosi essi angoli A, & D. corrispondenti & eguali non potriano essere coalterni al C D *B*, che accompagna essi dui Triangoli, onde acciochei dui restanti lati delli dui Triangoli siano in linea retta, conuiene che non solo i lati detti siano equidistanti a i lati a loro corrispondenti, ma che anco come nella terza figura essi Triangoli stiano in tal modo che ciascuno delli dui angoli A, & D. corrispondenti di lati proportionali venghino ad essere coalterni, & però eguali all'angolo A C D. che li accompagna.

Propositione 33. Problema 23.

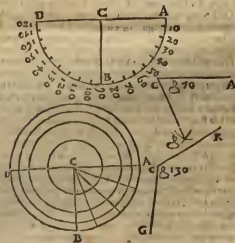
SE in Cerchi eguali stiano angoli sopra al centro, o sopra alla Circonferenza la proportione d'essi angoli sarà eguale alla proportione delli Archi che riceuono quelli angoli, come basi loro, Et la istessa proportione sarà fra li Settori constituiti nelli centri d'essi Cerchi.

Siano i dui Cerchi eguali A D R, *B* S T; i centri delli quali siano e, & E, & piglinsi in essi dui archi come si voglino, & siano D R, S T, sopra alli quali dalli loro centri si faccino gli angoli D E R & S E T, & dalle circonferenze gli angoli D A R, & S *A* T, si dice che la proportione dell'angolo D E R, all'angolo S E T, Et dell'angolo D A R, all'S *A* T, Et anco dal settore D E R (contenuto dalli doi semidiametri E D, E R, & dall'arco D R, al Settore S E T, contenuto dalli dui semidiametri E S, E T, & dall'arco S T, sarà eguale alla proportione che è dall'arco D R, all'arco S T, Per dimostrarlo. Tirata la retta S T, corda dell'arco S T, da vn termine d'essa, poniamo dall'S. si accommodi la a lei eguale S B. che sarà corda de l'arco S B, quale arco S *B*, sarà eguale all'arco S T (per la 28. del terzo) Onde ancora (per la 27 del terzo) l'angolo S E *B*, (inteso tirato il semidiametro E *B*, sarà eguale all'angolo S E T, perilche cosi sarà moltiplice duplo l'angolo, o spatio *B* E T, verso S. contenuto dalli dui eguali B E S, *S* E T. come ancora è moltiplice duplo l'arco B S T, all'arco S E T, Ancora nell'altro Cerchio tirata, o imaginata la retta D *R*, corda dell'arco D R, & dall'vno de suoi estremi, & sia dal D. accommodate, o continuate altre linee rette a beneplacito poniamo le due D O, O N, eguali ciascuna di esse a detta R D. sarà ciascuno delli dui archi D O, O N, eguale all'arco D R, onde tutto l'arco N O D R, sarà triplo al *D* R, Et anco (intesi tirati alli punti O, & N, li semidiametri E O, E N) ciascuno delli dui angoli D E O O E N. sarà eguale all'angolo D E R, perilche il totale angolo N E R (contenuto dalli tre eguali detti N E O, O E D, D E R) sarà triplo all'angolo D E R, cioe talmente è moltiplice l'angolo N E R, all'angolo D E *R*, come è l'arco N R, all'arco D R; Et in essi Cerchi eguali se l'arco B S T, sarà eguale

guale all'arco N O D R, ancora l'angolo o spatio *B* E T, verso S. sarà eguale all'angolo N E R; ma se l'arco B S T sia maggiore, o minore dell'arco N O D R, ancora similmente l'angolo, o spatio B E T detto, sarà maggiore, o minore dell'angolo N E *R*. Hora inteso l'arco S T, come prima quantità, & l'arco D R, come seconda, l'angolo S E T come terza, & l'angolo D E R, come quarta, perche alla prima, & terza sono presi i moltiplici egualmente (cioe doppij) che sono l'arco B S T & l'angolo, o spatio *B* E T, & alla seconda, & quarta sono anco presi i moltiplici egualmente, (cioe tripli) che sono l'arco N O D *R*, & l'angolo N E R. & si conosce che quello che auuiene al moltiplice della prima rispetto al moltiplice della seconda (cioe all'arco B S T, rispetto all'arco N O D R) in esserli eguale, o maggiore o minore; auuiene anco al moltiplice della terza rispetto al moltiplice della quarta (cioe all'angolo, o spatio *B* E T detto, rispetto all'angolo N E R) in esserli similmête eguale, o maggiore, o minore, ne segue (per la 6. diffinitione del quinto libro) che la proportione quale è dalla prima quantità alla seconda sia anco dalla terza quantità alla quarta, cioe, che come è dall'arco S T, all'arco D R, sia anco dall'angolo S E T, all'angolo D E R; Et perche cosi l'angolo S E T al centro è doppio all'angolo S A T alla circonferenza (per la 20 del terzo, hauendo vn'istesso arco S T per base) come anco l'angolo D E R al centro è doppio all'angolo D A R alla circonferenza, & perciò dall'angolo S A T alla circonferenza all'angolo D A R, alla circonferenza come dall'angolo S E T al centro, all'angolo D E R al centro, & da questo S E T al D E R, è come dall'arco S T, al D R, ne segue consequentemente che anco dall'angolo S A T della circonferenza al D A R, sia come dall'arco S T base dell'vno, all'arco *D* R base dell'altro. Il che anco si potria dimostrare adoprando modo simile a quello che si è fatto intorno alli angoli del centro. Ancora nelle portioni S T, S *B*, imaginiamo essere fatti li angoli T o S; S r B. i quali saranno eguali (per la 27. del terzo consistendo sopra basi eguali di circonferenza) che sono *B*. T. *B* T S. ciascuna delle quali è quello che rimane dalla totale circôferenza del Cerchio, cauatone vna volta l'arco S T, & l'altra l'arco *B* S. eguali fra loro) perilche esse due portioni sono simili, & anco eguali essendo sopra le due corde S T, S B. eguali, onde aggiunto all'vna il Triangolo S E T, & all'altra il Triangolo S E *B*, che sono eguali (per la 4. propositione, o per la 8. del primo) essendo i dui lati, & loro angolo dell'vno (ouero i tre lati dell'vno) eguali alli dui lati, & angolo dell'altro (ouero alli tre lati dell'altro) la somma da vna banda che è il Settore S E T, sarà eguale alla somma dall'altra, che è il Settore S E *B*. perilche il Settore composto da questi dui cioe il *B* E T, verso S. sarà doppio al Settore S E T, cioe talmente è moltiplice il Settore *B* E T detto, al Settore S E T, qualmente è moltiplice l'arco *B* S T, all'arco S T. Ancora nell'altro Cerchio nel medesimo modo, intese le corde R D, D O, O N, eguali; eguali saranno ancora li suoi tre archi, & nelle tre portioni loro imaginati tre angoli essi saranno eguali fra loro, consistendo sopra a basi eguali di circonferenza perilche esse tre portioni sono simili. & anco eguali, essendo sopra a tre corde eguali fra loro, onde a ciascuna d'esse aggiunto il suo Triangolo rettilineo contenuto dalla corda, & dui semidiametri, che li tre Triangoli sono N E O, O E D, D E R, & eguali fra loro, le tre somme, o Settori che se ne formaranno saranno eguali l'vno all'altro, perilche il Settore composto da tutti loro che è l'N E R, hauente per base circonferentiale l'arco N O D R, sarà triplo al solo Settore D E *R*; cosi come è triplo l'arco N O D R, al solo arco D R, cioe il Settore N E R, è talmente moltiplice al Settore D E R, come è moltiplice l'arco N O *D* R, all'arco D R, Et perche se l'arco B S T, sia eguale all'arco N O D R, ancora il Settore B E T detto sarà eguale al Settore N E R. & se esso arco *B* S T, sia maggiore, o minore dell'arco N O D R, ancora similmente il Settore B E T, detto sarà maggiore, o minore del Settore N E R. Inteso hora l'arco S T, essere prima quantità, l'arco D R seconda, il Settore S E T, terza, & il Settore D E R, quarta, di 4. quantità proportionali, & essendosi presi a beneplacito i moltiplici egualmente alla prima, & terza, & anco i moltiplici a beneplacito egualmente alla seconda, & quarta, & conoscendosi che sempre (siano i moltiplici come è detto presi con tale ordine) auuiene che quello che occorre al moltiplice della prima rispetto al moltiplice della seconda in esserli eguale, o maggiore, o minore, occorre anco di necessità similmente con il medesimo ordine al moltiplice della terza rispetto al moltiplice della quarta, ne segue (per la 6. diffinitione del quinto) che la proportione della prima quantità alla seconda, & la proportione della terza quantità alla quarta siano vna medesima, cioe, che dal Settore S E T, al Settore D E R, sia la proportione, che è dall'arco S T, all'arco D R, perilche è manifesto quanto si voleua dimostrare.

Corollario.

Dalle cose dette è manifesto che la proportione del Settore al Settore, è come dall'angolo all'ãgolo, Perche l'vna, & l'altra proportione è la istessa che è dall'arco all'arco.

Da

Da questa Propositione in Prattica se ne può deriuare il modo di conoscere la quantità d'vn' angolo dato, cioe che proportione egli habbia con l'angolo retto, Che inteso nel Cerchio A *B* G D. tirati i dui diametri A G, *B* D. che si seghino ad angoli retti nel centro C. ciascuo d'essi 4. angoli retti ad vn solo angolo retto, come è da tutta la circonferenza alla quarta parte, o al quadrante d'essa, Et diuidendo l'angolo retto poniamo il G C D, per mezo con la retta C n, ella diuiderà anco l'arco G D. per mezo, cioe il G n, sarà eguale al D n, Et diuidendo l'angolo retto in tre parti eguali, o in 4. o in 5. o più, si verrà anco a diuidere il quadrante, o quarta parte della circonferenza similmente in tre parti eguali, o in 4. o in 5; o più, & cosi tal parte sarà vn'angolo acuto del retto, qual parte è l'arco che egli ha per base; del quadrante, o quarta parte della circonferenza, Et perche, per commodità si suole diuidere la totale circonferenza del Cerchio in 360. parti eguali che si chiamano gradi (essendo che questo numero 360. si può diuidere in molte parti eguali senza rotto, che egli ha mità, terzo, quarto, quinto, sesto, ottauo, nono, decimo, duodecimo, 15. esimo, 18. esimo, 20. esimo, 24. esimo, 30. esimo, 36. esimo, Quarātesimo, 45. esimo, sessantesimo, 72. esimo, 90. esimo, 120. esimo, 180. esimo, & 360. esimo in intieri) il Quadrante d'essa si diuiderà, o conterrà gradi 90, & perciò l'angolo retto si dice essere angolo di gradi 90, il mezo angolo retto è angolo di gradi 45; l'$\frac{1}{3}$. d'angolo retto è angolo di gradi 30, li $\frac{2}{3}$ di retto, (che è angolo del Triangolo Equilatero) è angolo di gradi 60 (che 60, è li $\frac{2}{3}$ di 90) Et cosi de gli altri. Onde proposto vn'angolo per vederne la quantità sogliono i Prattici hauere diuisa la circonferenza di vn mezo cerchio in 180. parti eguali, cioe ciascun quadrante in 90, parti che si chiamano gradi, & proposto poniamo l'angolo g C R per trouarne la grandezza; Pongono l'angolo, o punto C, nel punto, o centro C, del semicircolo di modo che vna linea dell'angolo, & sia la C *R*, vada sopra al semidiametro C A, (esca poi il punto R, fuori del semidiametro quanto occorra essendo la C R più lunga del semidiametro C A) Et l'altra retta C g. dell'angolo voltata di dentro al semicircolo si vede per qual numero dell'arco *A B* D. p. assa, & sia che passi per il 70, che perciò l'ampiezza, o grandezza di esso angolo si dirà essere di gradi 70, che sono li $\frac{7}{9}$, di vn retto, che tal proportione ha il totale angolo retto al suo partiale detto g è R, qual che ha l'arco *A* B di g. 90, sottotendente all'angolo retto, all'arco di gradi 70. sottotendente al proposto angolo g c R, Et se l'angolo f C *R*, proposto fusse maggiore di retto, cioe ottuso, & che perciò accommodata la retta C *R*, sopra al semidiametro C A. (essendo il punto C, con il centro C) l'altra retta G G passando oltre la C B. arriuasse, o passasse per il numero 130; dell'arco A *B* C, questo ci mostraria l'angolo G C *B*. essere di gradi 130, cioe contenere vn retto, & gradi 40. che sono li $\frac{4}{9}$ di vn retto di più, onde sarà angoli retti 1$\frac{4}{9}$. ma i prattici per commodità lo chiamano, o gli danno nome d'angolo di gradi 130. Et conuersamente se volessero formare vn'angolo poniamo di gradi 130. essi tirata vna retta C R. eguale al semidiametro C A. & preso con il compasso la distanza per linea retta che nel mezo cerchio è dal termine *A*. principio al numero 130. dato, segnariano (facendo centro il punto A. della retta tirata in margine) vn pezzo di arco verso doue volessero fare l'angolo, & fatto centro il punto c. della retta tirata & interuallo, o apertura di compasso il semidiametro C A, o C *B*. si segnaria vn'arco finche seghi il già fatto, & dal centro detto al punto del segamento tirata

vna

vna retta, ella con la già tirata formarà l'angolo cercato di gradi 130, Nè importa se il mezzo
cerchio che si adopra sia grande, o piccolo, pur che la sua circonferenza sia diuisa in parti egua-
li con diligenza, (se bene quanto più grande egli sarà tanto più facilmente si diuiderà la circon-
ferenza in detti gradi 180.) perche si come l'angolo che ha per base l' $\frac{1}{4}$. della circonferenza di
qual si vogli cerchio sia egli di che semidiametro si vogli è retto, così quell'angolo che hauerà
per base la mità del quadrante della circonferenza di qual si vogli cerchio sarà similmente la
mità di vn retto, & così seguendo; Et se sopra ad vn medesmo centro si faranno molti Cerchi di
diuerse grandezze, o semidiametri, & dal centro si tiraranno linee rette che seghino tutte esse
circonferenze, elle tutte saranno segate proportionalmente, cioe tal parte sarà la circonferen-
za, o arco d'vn Cerchio rispetto al Quadrante del suo Cerchio, essendo elle inchiuse dalle mede-
sime due rette, che venghino dal Centro, come facilmente si scorge nella figura del margine; Et
questo sarà il fine del presente sesto libro, & si attenderà alli seguenti, concedendone nostro Si-
gnore Dio, & tempo, & com modo, che a gloria di sua Diuina Maestà, & beneficio vniuersale so-
no sempre indrizzati tutti i pensieri, & fatiche.

Alcune cose da aggiungere in diuersi luoghi di questi Elementi.

A facciate 19. nel fine della quinta Propositione.

Corollario.

Dalle cose dette si manifesta che quando nel Triangolo di dui lati eguali vna retta che diuida
l'angolo d'essi lati per mezo arriui alla base ella sega essa base per mezo, & ancora il totale Tri-
angolo in dui Triangoli rettangoli eguali, & che ciascuno de gli angoli dell'vno è eguale a cia-
scuno de gli angoli dell'altro, & ciascuno delli lati dell'vno allo a lui corrispõdẽte lato dell'altro.

A facciate 21. nel fine della sesta Propositione.

Di qui si conosce che nelli Triangoli che hanno i dui angoli sopra alla base eguali, & però i
dui lati eguali, se dall'angolo de i lati si tiri alla base vna perpendicolare ella diuiderà essa base,
& anco il Triangolo totale in due parti eguali.

A facciate 28. nel fine della 11. Propositione.

Ouero inteso o imaginato il semidiametro S C, & considerato il Triangolo C S N. di dui lati
semidiametri eguali, li angoli S C N, S N C. sopra alla base C N, saranno eguali fra loro, Et nel
Triangolo R C S. Equicrure di doi lati semidiametri eguali similmente li angoli S R C. S C R, so-
pra alla base S R, saranno eguali l'vno all'altro, onde tutto l'angolo N C R. sarà eguale alla som-
ma delli dui angoli R, & N. ma tutti tre essi angoli C, N. & R. fanno in somma dui retti (come si
mostrarà nella 32. propositione) però l'angolo C, che è la mità di tutti tre (essendo egli solo egua
le alli dui N. & R) & però di dui retti, sarà retto, onde la retta R C. sarà perpendicolare alla C N

A facciate 33. nel fine della 17. Propositione.

Ouero essendo ciascuno delli dui angoli C, & A D B. eguale al *B*. per rispetto delli dui Trian-
goli Equicrurij B A C. B A *D*. ne seguiria che essi doi angoli C, & A D B. fussero eguali fra loro
cioe l'estrinseco A D *B*. del Triangolo A C D. eguale al C, vno delli dui intrinseci oppositi, il
che è impossibile.

A facciate 36. doppo la 20. Propositione.

Ouero dall'angolo A alla base B D. si tiri la perpendicolare A C, che all'hora perche l'angolo
A C *B*. nel Triangolo A C B è retto egli sarà maggiore dell'angolo C A *B*. & però il lato A *B*,
opposto all'angolo retto sarà più lungo del lato *B* C, & per la medesima ragione il lato *A* D. sa-
rà più lungo di C D. onde la somma di A *B* & A D. sarà più lunga che la somma di *B* C, & C D.
cioe che il totale *B* D. Et se la perpendicolare A C. cada fuori del Triangolo, perche all'hora nel
Triangolo A C D. l'angolo C è retto, & però maggiore del C A D. ne segue che il lato *A* D. oppo
sto all'angolo retto C. sia più lungo del C D. opposto all'angolo C A D. minore del C. perilche
sarà tanto maggiormente più lungo della retta *B* D. parte della C D. onde tanto più poi la som-
ma delli dui lati *B* A, A D. sarà maggiore del lato B D.

A facciate 51. a righe 9. doppo le parole, del numero de' suoi lati si pona questa parẽtesi
(intendendosi nondimeno che tutti li angoli della figura siano compresi da tutti gli angoli
delli Triangoli, perche la figura potria stare in modo che ella si potria diuidere in minor nume-
ro di Triangoli che non è il numero delli suoi lati manco 2. come si vede per elempio nella figu-

ra a b c d e f g h. di 8. lati che è solo diuisa in 3. Triangoli perche li dui lati a h, & e d, sono per il diritto, o in retta linea fra loro, & anco li 3. punti angolari f g d, sono in vna istessa dirittura, ma non hanno la cõditione che si ricerca in essi Triangoli, cioe che tutti gli angoli della figura siano compresi o contenuti ne gli angoli delli Triangoli)

Et nel fine d'essa 51. facciata si aggiunga il seguente discorso.

Ma noi potiamo considerare quello che a questa similitudine auuenga ancora alle altre figure allungando i suoi lati finche concorrino insieme, & formatne la Regola discorrendo come seguen

Intesa la figura di 6. lati i suoi 6. angoli interni sono eguali a 8. retti che è il doppio di 6. numero delli lati cauarone sempre 4, o vogliamo dire è il doppio di 4. numero dell'ordine della figura, che perciò si diuide in 4. Triangoli (cioe in 2. manco del 6. numero de suoi lati) gli angoli tutti delli quali Triangoli sono contenuti da gli angoli della figura; Qui si conosce che vno delli suoi angoli, & sia l'a, con l'angolo, x, sopra alla base a b. del Triangolo A a b, esteriore è eguale di dui retti (per la 13. propositione) & il medesimo angolo a, con l'angolo z, sopra alla base a f. del Triangolo esteriore F f z, è similmente eguale a 2. angoli retti, onde la somma delli 4. angoli a x a z, cioe delli dui x & z, con il doppio dell'a. è quanto 4. retti. Et cosi il doppio dell'angolo b, insieme con li dui x, & z, a lui compagni, o congiuntili delli dui Triangoli esteriori a lui contigui è eguale a 4. retti, & il medesimo si vede auuenire a ciascuno delli altri angoli seguenti della figura, cioe che il doppio dell'angolo della figura insieme con li duoi angoli suoi compagni delli dui Triangoli esteriori a lui contigui è sempre eguale a 4. retti, Onde essendo la figura di 6. lati, & però di 6. angoli vi si conteniranno nel modo detto 6. volte 4 angoli retti che 6 volte 4. fa 24. angoli retti, Onde di questi a 4. retti cauandone il doppio del valore de gli angoli della figura, cioe il doppio d'8. che fa 16. & cauato da 24. resta 8, questo 8. restante mostra che li 12. angoli sopra alla base (o lati della figura) delli 6. Triangoli esteriori importano quanto 8. retti, ma tutti li 18. angoli delli 6. Triangoli importano 2. volte 6. cioe 12. angoli retti, perilche li soli 6. A B C D E F. delle cime loro o concorso de' lati allungati della figura importano la differenza che è da 12. a 8. valore delli 12. angoli detti sopra alle basi, quale differenza è 4. Concluderemo dunque che d'vna figura di 6. lati, gli angoli, & sono ancora essi 6. fatti dalli allungamenti delli 6. lati d'essa da ciascuna banda loro, eguali a 4. angoli retti.

Similmente intesa vna figura di 7. lati i suoi 7. angoli presi due volte con li 14. contigui delli 7. Triangoli esteriori sono eguali a 4. volte 7. fa 28. angoli retti de i quali cauato 20. doppio di 10. angoli retti alli quali sono eguali li 7 angoli della figura restano 8. angoli retti alli quali sono eguali li 14. detti delli 7. Triangoli; ma li angoli tutti cioe li angoli a 21. delli 7. Triangoli importano 2. volte 7. cioe 14. retti de i quali cauati li 8. detti restano 6. però a 6. angoli retti sono eguali li 7. del concorso de i lati. Onde in ogni figura a moltiplicare 4. per il numero de i suoi lati, o angoli il prodotto è il numero de gli angoli retti alli quali sono eguali gli angoli della figura con gli angoli delli Triangoli a loro contigui giuntoli di più vn'altra volta il valore de gli angoli della figura (perche egli si considera due volte) & gli angoli della figura sono eguali a tanti angoli retti, quanto è il doppio manco 4. de' suoi lati, onde il doppio del doppio del numero de i suoi angoli, o lati, farà 2. volte 4. cioe 8. angoli retti di più di quello che importa il numero de gli angoli retti, alli quali sono eguali gli angoli della figura sia ella di quanti lati, o angoli si voglio; vogliamo dire, Quando di dui numeri A. numero de lati della figura, & B numero delli Triangoli nelli quali almeno ella si diuida il B. è 2. manco dell'A. all'hora il quadruplo di B. farà ancora manco del quadruplo di A. nel quadruplo di 2. differenza di A, a B. cioe in 8. quale 8. è sempre il numero de gli angoli retti alli quali sono eguali gli angoli de i Triangoli esteriori fatti sopra alle basi, o lati della figura, che sono in numero tanti Triangoli quanti sono i lati d'essa figura; ma tutti gli angoli d'ogni Triangolo sono eguali a 2. retti, però gli angoli retti alli quali sono eguali tutti gli angoli di tutti i Triangoli esteriori è quanto il doppio del numero delli Triangoli, onde da esso doppio cauando 8. il restante farà il numero de gli angoli retti alli quali sono eguali gli angoli de' Triangoli che sono nel concorso delli lati allungati della figura. Et cosi si vede poter si dire per Regola. Dato il numero de' lati o angoli d'alcuna figura Dal doppio del numero de' suoi lati si caui sempre 8. che il restante farà il numero de gli angoli retti alli quali sono eguali gli angoli che si formino nel concorso di tutti i lati della figura allungati da ciascuna delle sue due bande. Per esempio. Hauendo vna figura di 100 lati Dal suo doppio 200. si caui 8. che resta 192. però a 192. angoli retti saranno eguali li 100. angoli del concorso delli suoi 100. lati; che se la figura fusse equiangola, cioe di angoli eguali, ancora li 100. angoli del concorso sariano eguali fra loro, onde ciascun d'essi saria $\frac{192}{100}$, diretto cioe importaria angoli retti $1\frac{23}{25}$.

Et perche dal doppio del numero de i lati d'vna figura cauandone 4. resta il numero de gli angoli retti a i quali gli angoli della figura sono eguali; ma da esso doppio cauandone 8. il restante è il

è il numero de gli angoli retti a i quali sono eguali gli angoli del concorso di lati d'essa figura, si conosce che gli angoli del concorso importano sempre 4. retti di manco di quello che importano gli angoli della figura.

A faceiate 117. nel fine della terza Propositione.

Si conosce mò che quando vna retta che venga dal Centro non facci angoli retti con la da le segata essa non sarà mai segata in due parti eguali.

A faceiate 180. la Diffinitione ottaua è male stampata, & ha da dire.

Quando di quattro quantità tolti i moltiplici egualmente alli dui antecedenti prima, & terza, & ancora alli dui consequenti seconda, & quarta il moltiplice della prima ecceda il moltiplice della seconda, ma il moltiplice della terza non ecceda il moltiplice della quarta, all'hora dalla prima alla seconda si dice essere maggiore proportione che dalla terza alla quarta.

MOdo di ponere in disegno con lo Squadro, & misurare vn sito proposto andandoui intorno, o serrandolo con vn quadrilatero, o altra figura.

Sia il sito A B D E F G. da ponere in disegno, noi comineiando da vn'angolo d'esso poniamo dal *B.* & segnatali lontano quanto ci venga commodo la retta e o d, vedremo sopra ad essa ad angolo retto il punto angolare B. imaginandoci la retta e B perpendicolare alla e d, & andando sopra ad essa e o d, segnaremo il punto o, doue ad angolo retto si vegga l'angolo D. & voltandoci dal d, segnato doue ci venga commodo segnaremo la retta d e, f R g h i k. o ad angolo retto con la e d, o ad altro angolo acuto, o ottuso come ci venga commodo & andandoui sopra segnaremo sopra ad essa li punti e f. R g h i. dalli quali ad angolo retto si veggano i punti angolari B D, E F G. & anco il punto R, dal quale si veda l'Artificio, o Casa posta dentro al sito proposto, & così voltandoci al punto k, & poi all'm, sopra alla k m, & m a, segnaremo i punti, q p l S m, & l'a, da doue ad angolo retto si veggano li punti *F.* E, G. Casa, & *A.* Et nell'andare sù per le linee e d, d k k m, m a, si misuri con diligenza di mano in mano ciascuna delle sue parti e o, o d, d e, e f, f R, R g, g h, h i, i k, k q, q p, p l, l S, S m, m a; Et similmente con esquisitezza si pigli la ampiezza, o quantità di ciascuno delli angoli d; h, m, contenuti dalle linee adoprate, Et così andar vedendo da dui luoghi ciascuno de gli angoli & Casa del sito detto, acciòche fatta la medesma operatione in Carta con le sue misure iui si possa mediante il concorso d'ogni due perpendicolari venir segnando gli angoli detti, & tirare le linee dall'vno all'altro, che poi formato il sito in carta si potrà ancora in carta diuidendolo in Triangoli, o in altro modo trouare la sua grandezza

le perpendicolari e *B*, & e B. mostrano il punto angolare B.

le e D. & f D. d d; le g E, p E, l'E; le h F. q F, l'F,

le i G. l G. il G; le m A, a A. l'A: le R O, S O, la Casa.

Questa figura va a faceiate 36.
A faciatee 51.
A faceiate 51.
A faceiate 263.
A faceiate 264.
A faceiate 271.